



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

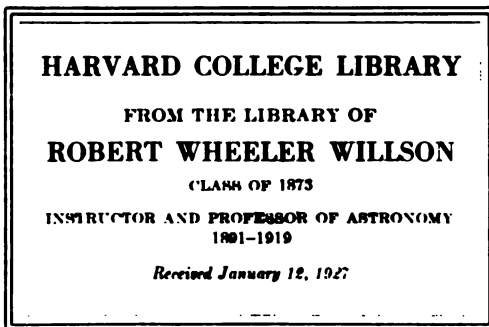
- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

150.8.2

B



Mr. Allen
Dunbar

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AUR.

PERPETUIS COMMENTARIIS ILLUSTRATA,

COMMUNI STUDIO

PP. THOMÆ LE SEUR ET FRANCISCI JACQUIER,

EX GALLICANA MINIMORUM FAMILIA, MATH. PROFF.

EDITIO NOVA, SUMMA CURA RECENSITA.

VOL. II.

GLASGUÆ:

EXCUDIT GEORGIUS BROOKMAN;

IMPENSIS T. T. ET J. TEGG, LONDINI;

ET R. GRIFFIN ET SOC., GLASGUÆ.

MDCCCXXXIII.

Phys 150.8.2
- B

HARVARD COLLEGE LIBRARY
DEPARTMENT OF
ASTRONOMY
R. W. WILSON COLLECTION
JULY 10, 1938

69
10
11

SERENISSIMO PRINCIPI

ARMANDO GASTONI

DE ROHAN DE SOUBISE

S. R. E. CARDINALI AMPLISSIMO

EPISCOPO ET PRINCIPI ARGENTINO

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC

CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

THOMAS LE SEUR ET FRANCISCUS JACQUIER.

MONITUM.

PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Libros tres totidem Voluminibus complecti meditabamur, idque jam in alterâ operis nostri parte fueramus polliciti. Cur tertium Newtoni Librum in duas dividamus partes datamque fidem non liberemus, in causâ sunt præclara de Fluxu et Refluxu Maris Opera quæ anno 1740. a celeberrimâ Parisiensi Academiâ præmio fuere condecorata. Tot et tam eximia in hisce operibus continentur, quæ non ad fluxum refluxumque maris duntaxat, sed etiam ad generales attractionis leges universamque astronomiam referuntur, ut clariss. Vir D. J. L. Calandrinus cujus consilia impensè veneramur, nos optimè facturos judicaverit, si prædicta Opuscula iis adjungeremus Propositionibus quas de fluxu et refluxu maris habet Newtonus; quod quidem commodè fieri non poterat, nisi tertium Librum in duas partes divideremus. Quamvis eam religiosè servemus legem, sine quâ honestus scriptor nemo esse potest, ut scilicet nihil insigne ex aliquo autore in usum nostrum convertamus, quin ei quod suum est, dum locus occurrit, tribuatur, specialem nihilominus grati animi significationem profiteri volumus clarissimis omnique laude nostrâ majoribus viris DD. Cassini, de Mairan, de Maupertuis, quorum præclaris inventis plurimum debent hæc nostra Commentaria. Sed tanta sunt in universum hocce nostrum Opus prælaudati clariss. D. J. L. Calandrini beneficia, ut huic doctissimo viro pares meritis gratias referre non possimus.

Jam sub prælo est altera et ultima Commentariorum nostrorum Pars; quia verò nullus est tam mediocris ingenii, quem usus et exercitatio non edoceant, hinc factum est ut aliqua nobis in mentem venerint quæ brevi collecta appendice simul cum reliquâ tertii Libri parte justi voluminis molem component.

*Datum Roma
in Con^{tu}. SS^æ. Trinitatis anno 1742.*

PP. LE SEUR ET JACQUIER

DECLARATIO.

NEWTONUS in hoc tertio Libro Telluris motæ hypothesim assumit. Autoris Propositiones aliter explicari non poterant, nisi eâdem quoquè factâ hypothesi. Hinc alienam coacti sumus gerere personam. Cæterum latis a summis Pontificibus contrâ Telluris motum Decretis nos obsequi profitemur.

EDITORIS MONITUM.

INTELLEXIMUS quosdam malignè interpretari notulas quas adjecimus Commentariis P P. Le Seur et Jacquier, quasi sæpius Newtoni mentem non attigissent; ne autem ipsis vitio vertatur quod concesserunt ob ipsorum absentiam ab urbe in quâ liber edebatur, ut nempe quæcumque viderentur corrigenda, ab Editore ipso mutarentur, sive levia sive gravia forent, monendum puto, me Autorum diligentiam et doctrinam nusquam desiderasse, correctiones quas feci levissimi esse momenti, nec esse tales ut propter ipsas quidquam ex debitâ Autoribus gloriâ tollatur quod meæ opellæ tribuatur, et asterisco notatas fuisse, non quod aliquid laudis exinde speraverim, sed quia si illic aliquid vitii irrepserit, æquum est ut in Editorem, non in Autores ea culpa transferatur; ne similibus cavillationibus occasio in posterum detur, tales distinctionis notulæ non adhibebuntur in secundâ hujus Voluminis parte, in quâ speramus calculos NEWTONIANOS circa Lunam potissimum satis intricatos, in apertam lucem expositum iri.

C O N T E N T A

PARTIS PRIMÆ TOMI SECUNDI.

	Pag.
I. <i>Autoris Epistola Dedicatoria</i>	iii
II. <i>Admonitio Commentatorum</i>	iv
III. <i>Altera Dni. Calandrini</i>	v
IV. <i>Introductio ad tertium Librum</i>	ix
V. <i>Præfatio Autoris in eundem de Mundi Systemate</i>	1
VI. <i>Regulæ Philosophandi, &c.</i>	2
VII. <i>Admonitio Dni. Calandrini de tribus, quæ subsequuntur, Dissertationibus</i>	99
1. <i>Traité sur le Flux et Reflux de la Mer par Mr. Daniel Bernoulli</i>	101
2. <i>D. MacLaurin de Causâ Physicâ Fluxûs et Refluxûs Maris</i> ...	209
3. <i>D. Euler Inquisitio Physica in causam Fluxûs ac Refluxûs Maris.</i>	247
 I. <i>Traité du Flux et Reflux de la Mer par Mr. Daniel Bernoulli</i>	 101
CHAP. I. <i>Contenant une Introduction à la Question proposée par l'Académie des Sciences</i>	
CHAP. II. <i>Contenant quelques Lemmes sur l'Attraction des Corps</i> ...	107
CHAP. III. <i>Contenant quelques Considérations Astronomiques et Physiques, préliminaires pour la détermination du Flux et Reflux de la Mer</i>	115
CHAP. IV. <i>Qui expose en gros la cause des Marées</i>	120
CHAP. V. <i>Contenant quelques Propositions de Géométrie préliminaires pour l'explication et le calcul des Marées</i>	135
CHAP. VI. <i>Sur l'heure moyenne des Marées pour toutes les Lunaisons. Table Fondamentale pour trouver l'heure moyenne des hautes Marées</i>	142
CHAP. VII. <i>Qui contient, à l'égard de plusieurs circonstances variables, les corrections nécessaires pour les Théorèmes et pour la Table du Chapitre précédent, et une explication de plusieurs observations faites sur les Marées</i>	155

CONTENTA.

	Pag.
CHAP. VIII. <i>Sur les Différentes hauteurs des Marées pour chaque jour de la Lune</i>	168
CHAP. IX. <i>Sur les hauteurs des Marées corrigées, suivant différentes circonstances variables</i>	174
CHAP. X. <i>Dans lequel on examine toutes les propriétés des Marées, qui dependent des différentes Déclinaisons des Luminaires et des différentes Latitudes des Lieux</i>	180
CHAP. XI. <i>Qui contient l'explication et solution de quelques Phénomènes et questions dont on n'a pas en occasion de parler dans le corps de ce Traité, sur-tout à l'égard des Mers détachées, soit en partie, soit pour le tout, de l'Océan</i> ...	194
<i>Conclusion</i>	205

Index Dissert. D. MacLaurin.

SECT. I. <i>Phænomena</i>	209
SECT. II. <i>Principia</i>	211
SECT. III. <i>De figurâ quam Terra fluida æqualiter densa indueret ex inæquali particularum gravitate versùs Lunam aut Solem.</i>	215
SECT. IV. <i>De motu Maris quatenus ex motu Telluris diurno aliisve de causis immutatur</i>	237
<i>Annotanda in Dissert. præcedentem</i>	243

3. D. Euler Inquisitio Physica in causam Fluxûs ac Refluxûs Maris...

CAP. I. <i>De causâ Fluxûs ac Refluxûs Maris in genere</i>	ibid.
CAP. II. <i>De viribus Solis et Lunæ ad Mare movendum</i>	256
CAP. III. <i>De figurâ quam vires cùm Solis, tùm Lunæ, Terræ inducere conantur</i>	266
CAP. IV. <i>De Fluxu ac Refluxu Maris si aqua omni inertia careret</i> ...	277
CAP. V. <i>De tempore Fluxûs ac Refluxûs Maris in eadem hypothesi.</i>	285
CAP. VI. <i>De vero æstu Maris, quatenus a Terris non turbatur</i>	296
CAP. VII. <i>Explicatio præcipuorum Phænomenorum circa æstum Maris observatorum</i>	318
CAP. VIII. <i>De Æstûs Maris perturbatione a Terris ac littoribus oriundâ</i>	328

CONTENTA

PARTIS PRIMÆ TOMI SECUNDI.

	Pag.
<i>Introductio ad Lunæ Theoriam</i>	iii
<i>Libri Tertii continuatio</i>	1
<i>De Motu Nodorum Lunæ</i>	51
<i>Libri Tertii continuatio</i>	107

INTRODUCTIO

AD

TERTIUM LIBRUM

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

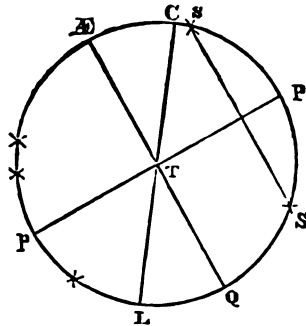
IS. NEWTONI.

CAPUT PRIMUM.

Quale oculo nudo appareat mundi systema paucis exponitur, et prima Astronomiæ Elementa breviter revocantur.

1. FIGURA telluris est propemodùm sphærica, et ideò gravium directio (ut pote quæ aquarum stagnantium superficiei perpendicularis est) ad centrum terræ tendit quam proximè. Patet per Eciipses Lunares in quibus umbra terrestris, in quamcumque cœli plagam vergat, est semper ad sensum circularis.

2. Spectatori terrestri cœlum apparet tanquam superficies sphærica concava, stellis plurimis distincta, cujus ipse spectator centrum occupat, quæque circà puncta fixa ceù cardines ab ortu ad occasum æquabiliter convertitur, et 24 circiter horis integram revolutionem absolvit. Puncta illa opposita P et p circà quæ rotari videtur sphæra, *poli* mundi dicuntur, quorum is qui nobis conspicuus est, ut P, arcticus vel borealis dicitur, ipsi verò oppositus p antarcticus seu australis appellatur. Recta linea P p utrumque polum connectens *axis mundi* vocatur.



Æquator sivè *æquinoctialis* est circulus sphæræ cœlestis maximus cujus poli iidem sunt cum polis mundi; proindèque sphæram mundanam dividit

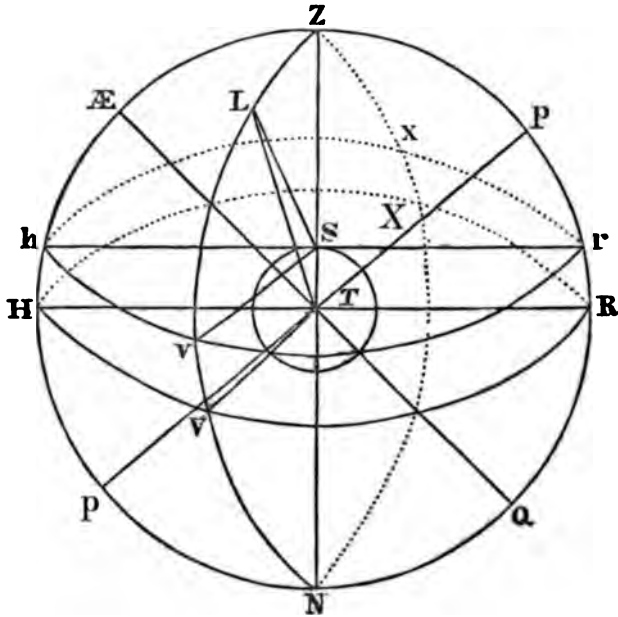
Cancer ☊, Leo ♌, Virgo ♍. Sex etiam australia videlicet Libra ♎, Scorpium ♏, Sagittarius ♐, Capricornus ♑ vel ♒, Aquarius ♒, Pisces ♓. Aries, Taurus ac Gemini, quæ inter punctum æquinotiale vernum et punctum solstitiale æstivum continentur dicuntur, signa vernalia; Cancer, Leo, Virgo a solstitiali æstivo ad æquinotiale autumnale numerata appellantur æstiva; Libra, Scorpium et Sagittarius autumnalia; Capricornus, Aquarius et Pisces, hyberna. Signa ascendentia a puncto solstitiali hyberno ad æstivum, descendentia verò a solstitiali æstivo ad hybernum computantur.

5. *Zodiacus* est sphaeræ cœlestis portio seu zona duobus circulis eclipticæ parallelis et gradibus 8 vel 9 hinc indè ab eclipticâ distantibus terminata, sub quâ planetæ omnes motus suos absolvunt. Dum planeta ab occasu in ortum seu secundum ordinem signorum, aut quod idem sonat, in signa consequentia nimirum ab Ariete ad Taurum, a Tauro ad Geminos, &c., motu proprio fertur, ille planeta tunc temporis directus vocatur; cum ipsius motus proprius cessare videtur, seu dum planeta in eodem cœli puncto morari per aliquot dies cernitur, eundem situm fixarum respectu servans, stationarius dicitur; retrogradus tandem appellatur ubi contrâ signorum ordinem seu in antecedentia, ut a Tauro ad Arietem, ab Ariete ad Pisces, &c. proprio motu incedit.

6. Luna et Sol sunt semper directi; at cæteri planetæ tum superiores, videlicet, Saturnus, Jupiter et Mars, tum inferiores, nimirum, Venus et Mercurius, directi deindè stationarii et postea retrogradi videntur. Eorum tempora periodica quibus totum zodiacum in consequentia peragunt, sunt inæqualia. Nam Saturnus 30 circiter annis periodum suam absolvit; Jupiter annis circiter 12, Mars annis duobus ferè, Luna diebus 27 et horis 7 circiter, Venus autem et Mercurius cum Sole anno uno. Nam hi duo planetæ Solem ita constanter comitantur ut Venus nunquam ultra 47 circiter gradus, nec Mercurius ultra 28 a Sole digrediat, id est, angulus maximus sub quo distantia Veneris aut Mercurii a Sole e Terrâ conspicitur, gradus 47 vel 28 nunquam superat.

7. *Circuli declinationis*, seu *circuli horarii*, sunt circuli maximi per mundi polos transeuntes et proindè æquatori perpendiculares. Sideris vel puncti cujuslibet in sphaerâ mundanâ *declinatio* est arcus circuli declinationis inter sidus vel datum punctum et æquatorem interceptus. *Ascensio recta* sideris est arcus æquatoris inter punctum æquinotiale vernum et circulum declinationis sideris illius comprehensus ac secundum ordinem signorum numeratus. *Circuli latitudinis* siderum sunt cir-

culi sphæræ maximi per polos eclipticæ et per sidera transeuntes, atque ideò eclipticæ perpendiculares. Hinc *latitudo* sideris est arcus circuli latitudinis inter sidus et eclipticam interceptus. *Longitudo* sideris est arcus eclipticæ ab Arietis initio versùs ortum seu in consequentia usquè ad latitudinis circulum numeratus. Punctum intersectionis eclipticæ cum circulo latitudinis sideris dicitur *locus sideris*, eclipticus, sive locus in eclipticâ, vel locus ad eclipticam reductus.



8. Si per locum quemvis S in superficie terræ ducatur per terræ centrum T linea recta Z S N quæ sphæræ cœlesti occurrat in Z et N, punctum Z dicitur loci S *zenith* seu vertex, et punctum N vocatur ejusdem loci *nadir*. *Horizon sensibilis* seu apparens loci S, est sphæræ circulus h v r x centrum habens in S, et polos in Z et N. *Horizon rationalis* seu verus est circulus H V R X, centrum habens in T, et polos in Z et N, ideòque horizonti sensibili parallelus.

Circulus verticalis est circulus quilibet maximus Z V N X per zenith atquè nadir et per aliud quodcumque punctum in sphærâ mundanâ transiens, ideòque horizonti perpendicularis.

Meridianus est circulus verticalis P Z N R per polos mundi P et p transiens, ac proindè æquatori perpendicularis et circulos omnes æqua-

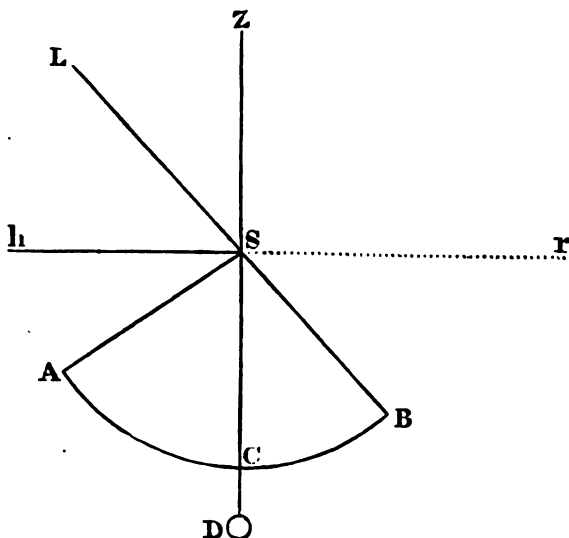
tori parallelos bifariam dividens. Intersectio plani meridiani cum plano horizontis $H R$ vel $h r$ dicitur *linea meridiana*. Circulus *verticalis primarius* est ille verticalis qui per polos meridiani transit. Sit $Z V N X$ verticalis primarius horizontem rationalem $H V R X$ intersecans in V et X , quem meridianus etiam secat in H et R . Puncta quatuor R, X, H, V , dicuntur *cardines mundi*; punctum quidem R in hemispherio boreali cardo *septentrionis*, H cardo *meridiei*, V ad partes orientis cardo *orientis* et punctum oppositum X cardo *occidentis*.

9. Distantia horizontis apparentis ab horizonte vero sive telluris semi-diameter $S T$, sensibilis non est, si conferatur cum stellarum (Lunâ ferè solâ exceptâ) distantis, et ideò terra respectu sphaeræ stellarum tanquam punctum, et quilibet terræ locus tanquam hujus sphaeræ centrum considerari potest. Nam omnes ferè Astronomorum observationes id supponunt et computa indè inita cum phaenomenis cœlestibus quadrant. Porro quemadmodum singula terræ loca pro centro sphaeræ stellarum usurpari potest, itâ fingi potest in spatiis cœlestibus sphaerica superficies cujus tanta sit diameter ut illius respectu evanescat Solis vel stellæ datæ a Tellure distantia, et hujus sphaeræ centrum poterit collocari indifferenter vel in terrâ vel in sole aut in spatio intermedio.

10. *Altitudo poli* P *suprà horizontem* est meridiani arcus $P R$ a polo ad horizontem interceptus. Ea semper æqualis est arcui $Z \mathcal{A} E$ a vertice Z ad æquatorem $\mathcal{A} Q$ intercepto; Nam si ex circuli quadrantibus $Z P R$ et $\mathcal{A} Z P$ subducatur arcus communis $Z P$, remanebunt arcus æquales $\mathcal{A} Z$ et $P R$. *Altitudo æquatoris suprà horizontem* est arcus meridiani $\mathcal{A} H$, inter æquatorem et horizontem interceptus; æqualis est complemento altitudinis poli seu arcui $Z P$, quod, ablato ex quadrantibus $H \mathcal{A} Z$ et $\mathcal{A} Z P$ communi arcu $\mathcal{A} Z$ manifestum est. *Altitudo apparens sideris vel puncti* cujuslibet L in sphaerâ mundanâ, est angulus $L S v$, sub quo ex centro S horizontis sensibilis videtur arcus $L v$ circuli verticalis per L ducti usquè ad horizontem sensibilem $h v r x$. *Altitudo vera puncti* L est angulus $L T V$, seu ipsius mensura arcus $L V$ in circulo verticali per L ducto usquè ad horizontem rationalem $H V R X$. Undè (9) stellarum fixarum et Solis altitudines apparentes et veræ coincidunt.

11. Jam verò quâ ratione phaenomena quæ suprà retulimus, et alia quæ deinceps referemus, observari potuerint, paucis exponemus; et quidem ab observatione altitudinis apparentis siderum quæ præcipuum totius Astronomiæ fundamentum est, initium ducemus. Circuli quadrans

S A B cujus limbus A C B in gradus et minuta divisus est ità statuitur ut filum S C D pondere D tensum ideóque verticale, limbum illius tangat, deindè ità vertitur ut sidus L cujus altitudo observanda est, per diop-

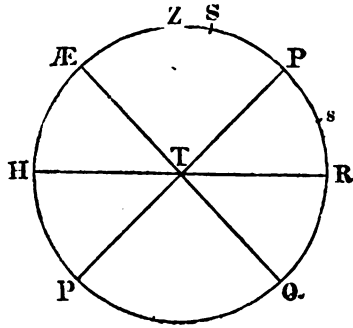


tras aut per telescopium lateri S B affixum videatur in eodem latere S B producto. Quo facto, habetur arcus A C, mensura altitudinis apparentis L S h; nam cùm filum e quadrantis centro S, pendens sit semper in plano verticali, quadrans A S B erit etiam in eodem plano, (Eucl. 18. XI.) ideóque h r ad S D perpendicularis, erit intersectio horizontis sensibilis et plani verticalis per L ducti, atquè angulus L S h sideris L altitudo apparens. Sed si ab angulis rectis L S A, et h S D, subducatur communis h S A, remanent æquales anguli L S h et A S C; hujus verò mensura est arcus A C.

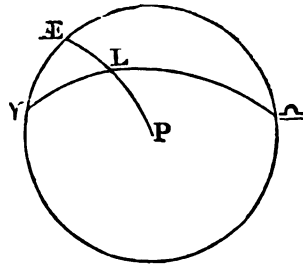
12. Ilinc describi potest linea meridiana suprà quam si statuitur perpendiculariter quadrans circuli, observari poterit altitudo meridiana sideris. Nam meridianus portiones illas circulorum æquatori parallelorum, quæ supra horizontem eminent et qui arcus diurni dicuntur, bifariam secat (per El. XI. 19. et 4., et El. III. 30.) cùm sit illis circulis et horizonti eos arcus terminanti perpendicularis, et propterea si in circulo quolibet diurno sumantur puncta duo hinc indè orientem et occidentem versùs a meridiano æquidistantia, ea puncta erunt supra horizontem sensibilem æquè alta, et contrà si æquè alta sint, a meridiano hinc indè æqui-

distabunt. Quare si stellæ fixæ meridiano vicinæ altitudo observetur versùs orientem, et deindè quadrans circà filum verticale immotum ceù circa axem convertatur versùs occidentem et expectetur donec stella eandem altitudinem habeat, recta quæ bifariam dividet angulum inter duas quadrantis cum horizonte intersectiones comprehensum, erit linea meridiana.

13. Datis per observationes duabus ejusdem stellæ nunquam occidentis altitudinibus meridianis $S R$, $s R$, dantur poli P et æquatoris $\mathcal{A} E Q$ altitudines $P R$ et $\mathcal{A} E H$ supra horizontem $H R$. Nam datis arcibus $S R$ et $s R$ datur eorum differentia $S s$; et quia stella S circum descript æquatori parallelum (3) cujus P est polus, erit $S P = s P$; undè datur $P s$, cui si addatur $s R$, habebitur arcus $P R$ altitudo poli. Est autem $H \mathcal{A} E$ æqualis arcui $Z P$ seu complemento altitudinis poli ad rectum (10), datur ergò $H \mathcal{A} E$ altitudo æquatoris.



14. Datâ stellæ S altitudine meridianâ $S R$ cum æquatoris vel poli altitudine, datur illius declinatio $S \mathcal{A} E$; est enim arcus $S \mathcal{A} E$ æqualis differentie arcuum $\mathcal{A} E P R$ et $S R$. Sic observando quotidie altitudinem meridianam centri Solis et inde eruendo ipsius declinationem, determinatum est planum eclipticæ et ejus ad æquatorem inclinatio seu maxima ab æquatore declinatio quæ inventa est $23\frac{1}{2}$ grad. aut verius $23^{\circ}. 29'$. Datâ autem inclinatione eclipticæ ad æquatorem cum solis declinatione, datur ascensio recta Solis ac longitudo. Sit enim P polus mundi, $\mathcal{A} E \simeq$ æquator, $\mathcal{V} L \simeq$ ecliptica, et $P L \mathcal{A} E$, circuli quadrans æquatori perpendicularis in $\mathcal{A} E$, et datis in triangulo sphærico $\mathcal{A} E \mathcal{V} L$ rectangulo in $\mathcal{A} E$, latere seu declinatione Solis $L \mathcal{A} E$, et angulo $\mathcal{A} E \mathcal{V} L$, $23^{\circ} 29'$, dantur latus $\mathcal{V} \mathcal{A} E$ ascensio recta solis, seu puncti L , et latus $\mathcal{V} L$ quod est ejusdem longitudo, imò datur etiam angulus $\mathcal{A} E L \mathcal{V}$, quem circulus declinationis efficit cum eclipticâ; Cùm verò præter angulum $\mathcal{A} E \mathcal{V} L$, data fuerit longitudo $\mathcal{V} L$, dabitur tum $\mathcal{V} \mathcal{A} E$ ascensio recta, tum $\mathcal{A} E L$, declinatio.



15. Si quotidie observetur meridiana Solis altitudo, atque inde eruantur ipsius declinatio, ascensio recta et longitudo, dabuntur motus Solis in eclipticâ, motus puncti declinationis in æquatore et temporis momenta quibus declinatio vel nulla est vel maxima, seu dabuntur æquinociorum et solstitiorum momenta (4). Porro observatum est nec longitudinem nec ascensionem rectam Solis uniformiter crescere et proinde dies solares esse inæquales. Nam dies solaris est tempus unius revolutionis diurnæ Solis a meridiano ad eundem meridianum; dies sidereus seu primi mobilis (qui semper idem manet) est tempus revolutionis diurnæ stellæ fixæ a meridiano ad eundem. Unde cum Sol motu proprio ab occasu in ortum feratur, si stella fixa et Sol in eodem meridiano simul observentur, stella ad eundem meridianum prius redibit quam Sol qui motu proprio versus orientem tendit. Attamen si ascensio recta Solis ex ipsius motu proprio in eclipticâ uniformiter cresceret, dies solares licet diebus sideris longiores, essent tamen inter se æquales; Quare cum Solis ascensio recta non augeatur uniformiter, necesse est ut dies solares inæquales sint. Simili modo collatis inter sese æquinociorum et solstitiorum observationibus deprehensum est Solem intervallo 8 fere dierum diutius morari in signis borealibus quam in signis australibus; ac tandem comparando antiquas observationes ad determinandum momenta æquinociorum vel solstitiorum cum recentioribus, definita est quantitas anni æquinocialis, sive tempus quo Sol motu proprio ab uno æquinocio ad idem æquinocium, vel ab uno solstitio ad idem solstitium progreditur et ab authoribus Calendarii Gregoriani Lahirio, Cassino et Blanchinio inventa est 365^{dier.} 5^{hor.} 49'.

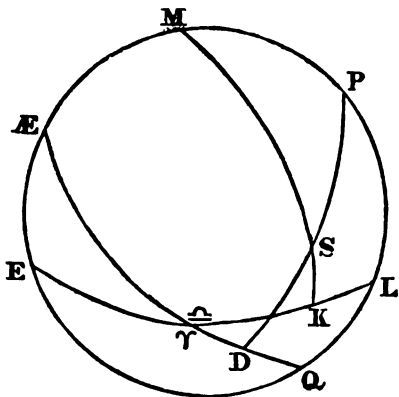
16. Datâ quantitate anni æquinocialis, datur motus Solis medius pro quolibet dato tempore, hoc est motus qui Soli competeret si uniformiter in eclipticâ ferretur. Est enim ut 365^{d.} 5^{h.} 49'. ad tempus datum, ita 360° quos Sol anni æquinocialis tempore describit proprio motu ad arcum eclipticæ dato tempore conficiendum. Hæc proportionem arcus eclipticæ anno communi 365^{dier.} describendus est XI Signorum 29°. 45' 40'', die uno est 59' 8" 20''', horâ unâ est 2' 28'', minuto uno est 2' 28'''.

Arcus æquatoris qui dato tempore sub Meridiano transit simili modo invenietur; nam quærat arcus æquatoris dato tempore sidereo sub meridiano transiens, dicendum est: ut 24 horæ sidereæ ad tempus datum, ita 360 grad. ad arcum quæsitum, is ergo horâ unâ erit 15°; minuto uno primo 15', minuto secundo 15''. Cum autem Sol die uno describat motu proprio medio ad æquatorem relato arcum 59' 8" 20''' ab occasu

ad ortum, ut inveniatur arcus æquatoris dato tempore solari medio sub meridiano transiens, dicatur ut 24 horæ solares ad datum tempus solare, ita $360^{\circ} 59' 8'' 20'''$ ad arcum quæsitum. His igitur proportionibus tempus solare medium vel tempus sidereum convertitur in gradus æquatoris et contrâ. Facile autem patet ex dictis diem solarem medium æqualem esse 24 horis sidereis cum $3' 56'' 32'''$.

17. Si observetur altitudo meridiana Solis et dato ante vel post meridiem tempore observetur etiam altitudo meridiana stellæ alicujus, stellæ hujus dabuntur declinatio et ascensio recta. Nam ex datâ altitudine meridianâ Solis datur ejus ascensio recta (14) et tempore quod inter duas observationes intercedit in arcum æquatoris converso (16) datur arcus æquatoris qui tempore inter duas observationes elapso per meridianum transit; hic arcus addatur vel subducatur ascensioni rectæ Solis, et summa vel differentia erit ascensio recta stellæ. Declinatio autem stellæ ex ipsâ altitudine ejus meridianâ eruitur (14). Quod si centrum Solis et centrum stellæ in meridiano simul reperiantur, eadem est utriusque ascensio recta.

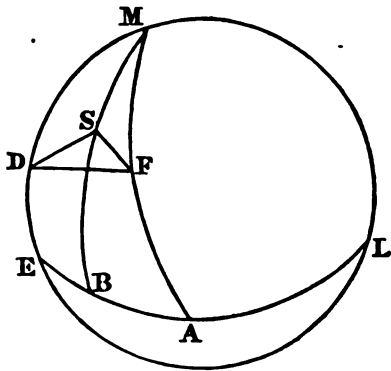
18. Datis declinatione et ascensione rectâ stellæ, dantur ipsius longitudo et latitudo. Sunto Æ Q æquator, E L ecliptica, P polus mundi, M polus eclipticæ, S stella, P S D quadrans circuli declinationis, et M S K , quadrans circuli latitudinis. Quærantur arcus γ vel $\sphericalangle \text{K}$ et K S . In triangulo P S M datur latus P M seu distantia polorum P et M $23^{\circ} 29'$, datur quoque latus P S declinationis S D complementum et angulus M P S seu Æ P D , cujus mensura est arcus Æ D datus ob datos per ascensionem rectam arcum γ D vel $\sphericalangle \text{D}$ et quadrantem $\text{Æ } \gamma$. Quare (per trig. sphær.) invenitur latus M S latitudinis S K complementum et angulus M , cujus mensura est arcus K L ; ex circuli quadrante $\gamma \text{ L}$ vel $\sphericalangle \text{L}$ subducatur K L , et dabitur $\gamma \text{ K}$ longitudo stellæ S . Hinc etiam facile patet quomodo datis longitudine $\gamma \text{ K}$ et latitudine K S stellæ S inveniri possit ipsius ascensio recta et declinatio. Nam dato $\gamma \text{ K}$ datur K L , et inde datur angulus S M P , et dato S K , datur S M , undè cùm datum



sit $M P$, dantur in triangulo $S M P$ latus $P S$ complementum declinationis et angulus $\angle P D$, cujus est mensura $\angle E D$, ex quâ si auferatur quadrans $\angle E \nu$, dabitur ascensio recta νD .

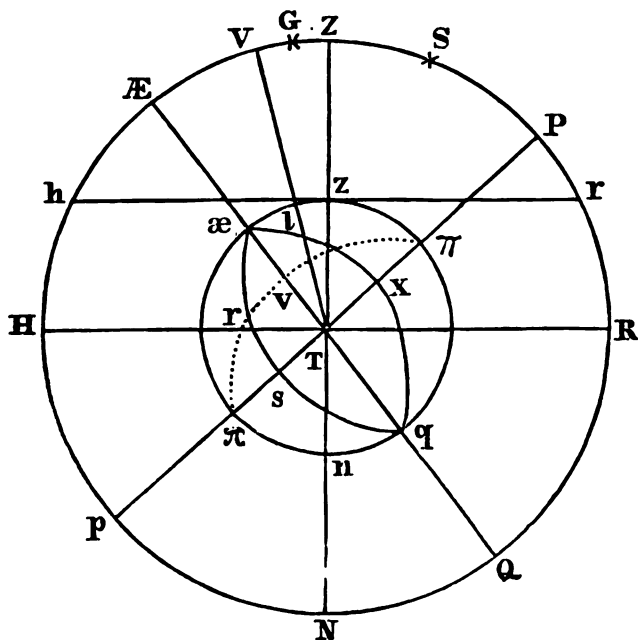
19. Ex hujusmodi observationibus et calculis inventum est fixarum latitudines immutabiles esse, longitudines verò per singulos annos 50 secundis, et per annos 72 gradu uno quamproximè augeri. Undè manifestum fit stellas fixas motu proprio sed lentissimo in circulis eclipticæ parallelis progredi in consequentia, aut si stellæ fixæ omni proprio motu priventur, puncta æquinotialia singulis annis in antecedentia moveri per arcum $50''$, atquæ hæc est præcessio æquinotiorum ex quâ fit ut Sol motu proprio ab æquinotio ad idem æquinotium citiùs revertatur quàm a stellâ fixâ ad eandem. Annus igitur solaris æquinotialis brevior est anno solari sidereo, hoc est brevior est tempore unius revolutionis Solis a stellâ fixâ ad eandem fixam; differentia est $20' 17''$ quo tempore Sol motu proprio arcum $50''$ conficit. Est ergò annus sidereus $365^{\text{dier.}} 6^{\text{hor.}} 9' 17''$.

20. Stellarum distantiam dicimus arcum circuli maximi inter stellarum centra comprehensum, aut, quod eodem redit, angulum quem rectæ a centris stellarum ad oculum spectatoris ductæ efficiunt. Si ope semicirculi vel quadrantis observentur distantie stellæ alicujus ab aliis duabus stellis quarum longitudo et latitudo notæ sunt, illius quoque longitudo et latitudo dabuntur. Nam esto ecliptica $E L$, polus ejus M , stellæ notæ longitudinis et latitudinis S et F , tertia stella D . Ducantur tres circuli latitudinis $M D E$, $M S B$ et $M F A$, sintque datæ distantie $D S$ et $D F$. Quia dantur latitudines $S B$ et $F A$ stellarum S et F , dabuntur earum complementa $S M$ et $F M$ cum angulo $B M A$, cujus mensura est arcus $B A$, differentia longitudinis stellarum S et F , et ideò in triangulo $S F M$, dabitur $S F$, cum angulo $M S F$. Datis in triangulo $D S F$, tribus lateribus dabitur angulus $D S F$, et si ex 360° seu quatuor angulis rectis subducatur summa angulorum datorum $D S F$ et $F S M$, dabitur angulus $D S M$, cum quo et notis lateribus $D S$ et $S M$, reperientur latus $M D$ complementum quæsitæ latitudinis stellæ D , et angulus $E M B$ cujus mensura est arcus $E B$,



differentia longitudinum stellarum D et S; hæ autem observationes distantiarum astrorum inter se propter astrorum continuam conversionem non facîle ad summam acribeiam perducuntur.

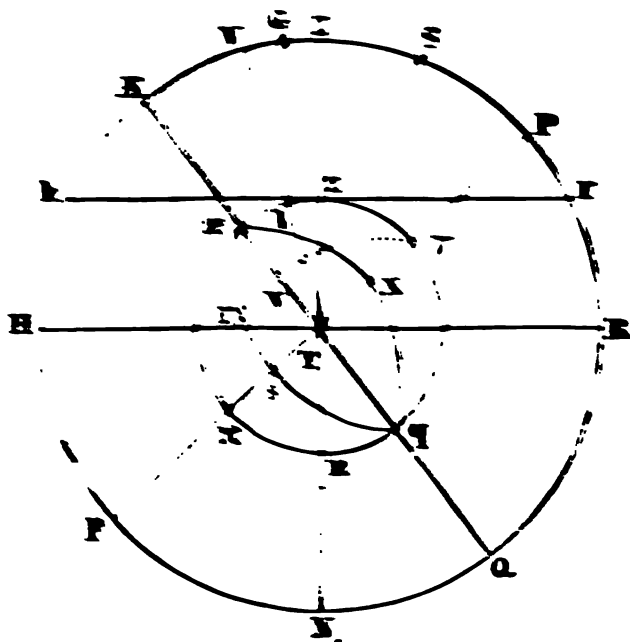
21. Sit $\Pi z \alpha \epsilon \pi q$ telluris globus per cujus centrum T transit axis mundi P p. Loci z sit horizon sensibilis h r, horizon rationalis H R, et meridianus P Z H N. His ita constitutis, axis telluris dicitur pars



$\Pi \epsilon$, axis mundi P p telluris superficie terminata in punctis Π et ϵ , quæ poli terræ vocantur. Polus Π polo cœlesti P nobis conspicuo subjectus borealis vel arcticus, alter ϵ australis vel antarcticus appellatur. Intersectio plani æquatoris cœlestis cujus est diameter A E Q, cum telluris superficie, sive circulus maximus æ s q x, cujus poli sunt Π et ϵ , dicitur æquator terrestris aut etiam circulus æquinoctialis vel $\kappa\alpha\tau' \iota\zeta\omicron\chi\eta$ linea. Latitudo loci cujusvis z in superficie terræ est distantia ejus ab æquatore, sive est meridiani terrestris arcus z æ inter locum z et æquatorem æ s q x interceptus. Undè patet latitudinem loci z in superficie terræ numero graduum æqualem esse declinationi cœlesti verticis Z ejusdem loci, seu elevationi poli P R. Nam arcus P R et Z A E, sunt æquales (10) et arcus Z A E ac z æ similes; per locum in superficie terræ pro arbitrio determinatum ducatur meridianus $\Pi r \epsilon$ æquatorem æ s q x secans in r;

Quoniam $I = r$ semper rectilinea, et per quatuor puncta et longitudinem
 arcuum semper eamdem r esse demonstratur. Porro $I = r$ et meridia-
 nalis $r = l$ arcus semper eamdem esse ad punctum in eodem tractatu.

Si per trigonometricas demonstrationes demonstratur: Arcuum lacorum
 $r = l$ sunt semper rectilinei eamdem r esse demonstratione circuli ex eadem
 hinc demonstratur: Arcuum $r = l$ et $r = l$ semper sunt $r = l$ semper vertici-

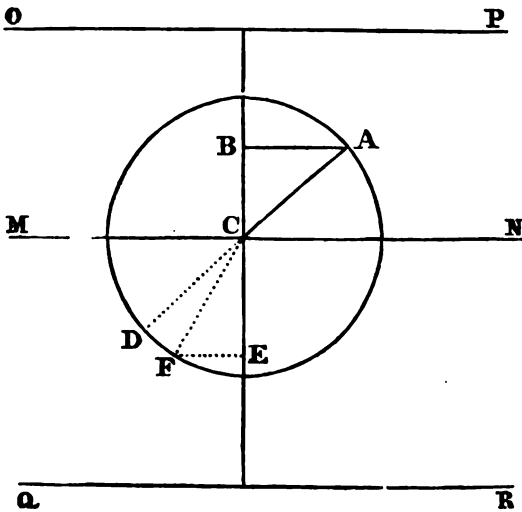


bus Z et V , dabitur scalaris semidiameter r T. Nam datis arcibus $S V$
 et $S Z$, dabitur eorum differentia vel summa $V Z$, et hinc datur arcus $l z$
 qui arcui $V Z$ similis est. Quare per observationes astronomicas notum
 erit quot gradus vel minuta in arcu $l z$ contineantur, et per trigonome-
 tricas mensuras ejusdem arcus longitudo hexapedis vel pedibus aut aliis
 mensuris notis data erit, et inde inferendo ut numerus minutorum in arcu
 $l z$ contentorum ad 360° seu ad $21600'$, ita longitudo $l z$ mensuris notis
 expressa ad circumulum telluris maximum, dabitur hic circulus ex quo in-
 venietur semidiameter r T.

CAPUT II.

Siderum refractio et parallaxis breviter explicantur.

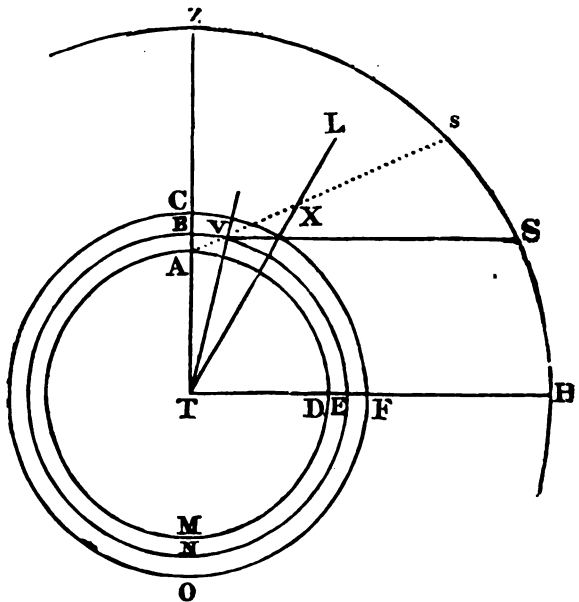
23. SIT $M N$ plana superficies quâ aër rarior $M O P N$ aërem densiorem contingit. Radius lucis per rectam $A C$ propagatus ex aëre



rariori in densiorem obliquè transeat per punctum C et indè feratur per C F, per C ducatur B E ad M N perpendicularis, experientiâ certum est radium A C in aëre densiori non propagari per rectam continuam A C D, sed in puncto C ità refrangi per C F accedendo ad perpendicularem B C E, ut sinus anguli cujusvis A C B sit semper ad sinum anguli E C F in datâ ratione. A C dicitur radius incidens, C punctum incidentiæ, C F radius refractus, A C B angulus inclinationis, E C F angulus refractus, et D C F angulus refractionis

24. Si atmosphæra C X F O M A Terræ A D M circumfusa, divisa intelligatur in innumeras superficies sphæricas telluris superficiei concentricas C X F O, B V E N ær inter duas hujusmodi superficies contentus æt æris superioris

pondere compressus
eò densior erit quò
minùs a telluris cen-
tro T distabit. Sit
Z S H circulus verti-
calis ex centro tellu-
ris T descriptus, ar-
cus S H altitudo si-
deris S supra hori-
zontem rationalem
T H, et Z S distan-
tia sideris a vertice
Z. Si radius lucis
S X e sidere S pro-
pagatus incidat in at-
mosphæram in X, is
refringetur in X per
X V accedendo ad

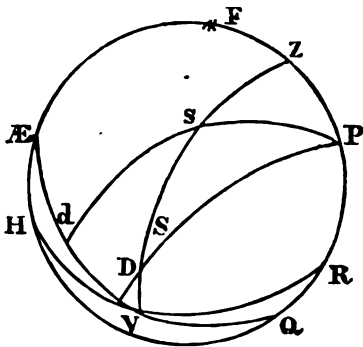


semidiametrum T X superficiei sphaericae C X F O perpendiculararem (23) et quoniam aëris densitas in V major est quàm in X radius in puncto V, superficiei B V E rursus refringetur accedendo ad T V, atquè ità continuò incurvabitur et in lineam X V A versùs T cavam flectetur. Hanc curvam tangat in A recta A s, circulo verticali Z H occurrens in s, et quoniam radius lucis S X V A oculum spectatoris in A ingreditur secundum directionem tangentis A s, sidus, quod est reverà in S, videbitur in s, in loco nempe altiore; notum enim est ex optica objectum videri in eâ rectâ secundùm quam fit directio radiorum oculos ingredientium.

25. Producatur TX ad L , ut sit SXL angulus inclinationis radii SX in atmosphæram incidentis, et VXT angulus refractus, data erit ratio sinûs anguli SXL , ad sinum anguli VXT (23) ac proindè sinus angulorum inclinationis erunt semper ut sinus angulorum refractorum. Quare sideris in vertice Z constituti, ubi nullus est angulus inclinationis, nulla erit refraction, et siderum in æqualibus a vertice distantis sitorum, ubi æquales sunt inclinationum anguli, æquales erunt refractiones. Solis

igitur, Lunæ, fixarum ac siderum omnium extrâ terrestrem atmosphæram constitutorum, in paribus a vertice distantis refractiones sunt æquales.

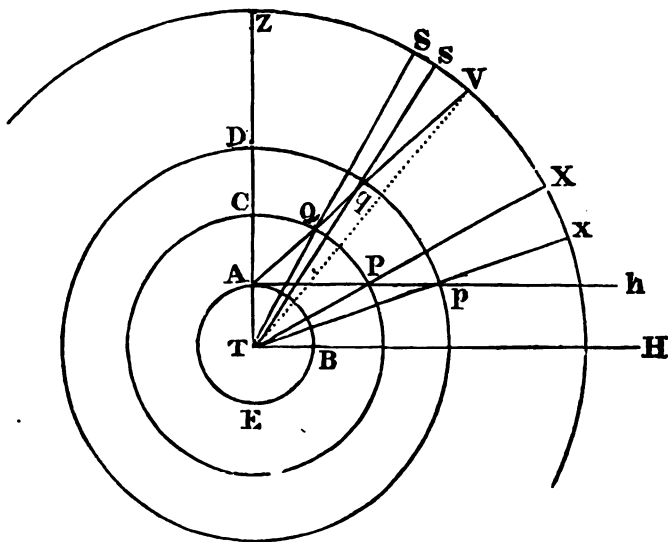
26. Siderum refractione ad singulos altitudinis gradus, observatione definiri potest. Esto $H R$ horizon, P polus mundi, $\mathcal{A} E Q$ æquator, $P Z H$ meridianus, $Z S V$ circulus verticalis, $P S D$ et $P s d$, circuli declinationis. Stellæ fixæ F propè zenith constitutæ observetur altitudo meridiana $H F$, quæ a refractione libera est, et indè eruatur ejus declinatio $F \mathcal{A} E$ (14). Deindè observetur ejusdem stellæ in S positæ altitudo quælibet $S V$, et ope horologii oscillatorii notetur tempus quod inter primam et secundam observationem intercedit, et inveniatur arcus æquatoris $\mathcal{A} E D$ qui eo tempore per meridianum transiit (16). Stella quæ ob refractionem in



loco altiori s apparet sit reverâ in S , erit $P S D$ circulus declinationis stellæ in S constitutæ, et in triangulo $P Z S$, dabitur angulus $Z P S$, cujus mensura est arcus $\mathcal{A} E D$ cum latere $P Z$ quod est distantia poli a vertice et latere $P S$, quod est declinationis $D S$ seu $\mathcal{A} E F$ complementum, undè invenitur latus $Z S$ cum altitudine $S V$, complemento lateris $Z S$. Si ergò ex altitudine observatâ $s V$, subducatur altitudo inventa $S V$, quæ a refractione libera est, dabitur arcus $S s$, refractione stellæ in quolibet gradu altitudinis. Hoc modo D. De la Hire in Tabulis Astronomicis observavit refractiones siderum diversis anni tempestatibus, in pari altitudine easdem esse exceptis refractionibus circâ horizontem quas nonnullis inconstantis obnoxias expertus est, atquè hinc unicam tabulam refractionum ex ipsis observationibus deductam constituit, quam postea correxit D. Cassinus, et eâ correctâ utuntur astronomi. Quoniam verò radiorum lucis in atmosphæram incidentium obliquitas cum sideris a vertice distantia crescit, iisdem observationibus invenit refractiones siderum a vertice ad horizontem usquè ubi maximæ sunt, continuò augeri; at quod ex alienis observationibus supponebat, videlicet refractiones borealium regionum ipsâ etiam æstate, longè majores esse quàm in zonis temperatis, id minimè verum esse ostendunt accuratiores observationes ab academicis Parisiensibus ad circulum polarem habitæ, quibus refractiones etiam horizontales Parisiensibus æquales invenerunt. Vide Domini De

centro sideris efficiunt rectæ AQ et TQ ex oculo A et ex centro terræ T ad sideris centrum Q ductæ. Parallaxis altitudinis quæ et parallaxis simpliciter dicitur, est differentia inter distantiam ZV a zenith Z ex loco A visam et distantiam veram ZS , sivè est arcus SV in circulo verticali $ZSVH$, undè manifestum est altitudinem sideris veram per parallaxim minui et ejus a vertice distantiam augeri, atquè ideò parallaxim esse refractioni contrariam. Parallaxis horizontalis est parallaxis Xh , sideris P in horizonte sensibili Ah apparentis.

29. Parallaxis SV est mensura anguli parallactici AQT . Jungatur TV , et angulus externus AQT æqualis erit duobus internis oppositis QTV et QVT ; sed angulus QVT sivè AVT , evanescente AT respectu TV , nullus est (9), ergò angulus parallacticus AQT , æqualis est angulo QTV , seu STV , cujus mensura est arcus SV .

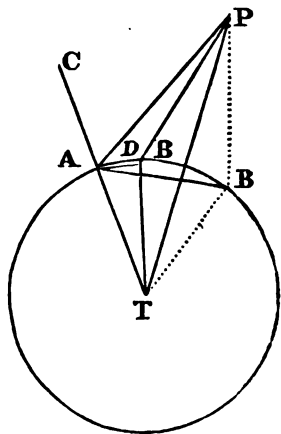


30. Manente sideris a centro terræ distantia, sinus parallaxeos est ad sinum distantiae visæ sideris a vertice in ratione datâ semidiametri telluris ad distantiam sideris a centro terræ. Nam in triangulo AQT , est AT ad QT , in ratione sinûs anguli parallactici AQT seu sinus parallaxeos ad sinum anguli TAQ sivè ad sinum distantiae visæ ZV a vertice, et ideò, datis AT et QT , data est ratio sinuum illorum.

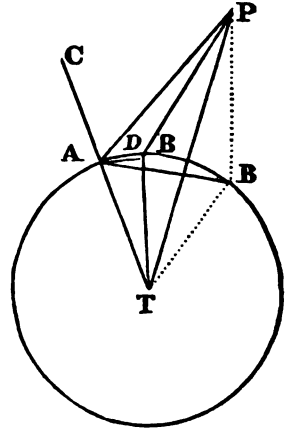
A q T, itâ q T ad A T, ideóque ex æquo, sinus parallaxeos A Q T est ad sinum parallaxeos A q T ut q T ad Q T. Ex quo etiam sequitur siderum in eâdem altitudine apparente existentium, hujus majorem esse parallaxim quod minùs distat a centro terræ.

33. Parallaxis altitudinis, uti de refractione dictum est, sideris declinationem, ascensionem rectam, longitudinem et latitudinem mutat; et eodem modo quo ex refractione altitudinis inveniuntur aliæ refractionum species, sic ex datâ parallaxi altitudinis eruuntur parallaxes declinationis, ascensionis rectæ, longitudinis et latitudinis; illud quoque observandum est sideris in meridiano existentis nullam esse ascensionis rectæ refractionem nec parallaxim; cùm enim altitudinis refractione sidus attollat, et altitudinis parallaxis illud deprimat, in eodem meridiano seu circulo declinationis (per hyp.) ascensio recta indè non mutatur. Similiter si circulus verticalis in quo sidus reperitur sit ad eclipticam perpendicularis, nulla erit longitudinis refractione nullaue parallaxis; nam in hoc casu circulus verticalis est simul circulus latitudinis, et siderum in eodem latitudinis circulo existentium longitudo est eadem.

34. Datâ differentiâ longitudinis locorum duorum in superficie terræ, seu dato arcu æquatoris inter locorum illorum meridianos intercepto, datur tempus quo Sol vel stella fixa ab uno meridiano ad alterum motu diurno transit (16); et indè definiri potest utrum observationes in illis duobus locis habitæ, respondeant eidem temporis absoluti momento an non. Facile idem innotescit per Lunæ et Jovis satellitum eclipses; eodem enim momento temporis eclipsis initium ac finis, et macularum in Lunâ notarum immersio in umbram vel emersio ex umbrâ ex omnibus terræ locis undè conspici possunt videntur, atquè ex his phænomenis differentia longitudinis locorum determinatur. His positis si ex locis duobus A et B, quorum distantia A D B data est, phænomeni vel sideris P in plano verticali A P B T, existentis altitudines apparentes et a refractionibus liberæ observatæ fuerint eodem tempore, inveniri poterit puncti P parallaxis et distantia a centro terræ P T. Nam per observationem altitudinis apparentis in loco A, datur angulus C A P, distantia apparens sideris a vertice et indè datur



angulus $P A T$, anguli $C A P$ complementum ad duos rectos, eodemque modo per observationem in loco B factam invenitur angulus $P B T$. Sed dato arcu $A D B$, datur angulus $A T B$ et hinc in triangulo isoscele $A T B$, dantur anguli æquales $T A B$ et $T B A$. Quare dantur etiam in triangulo $A B P$, anguli $P A B$, et $P B A$ quos latera $P A$ et $P B$ efficiunt cum chordâ $A B$. Ergò triangula duo $A B T$ et $A B P$ dantur specie ac proindè datur ratio $P B$ ad $B T$, et quia datis angulis $A B T$ et $A B P$ datur angulus $P B T$, ductâ rectâ $P T$, dabuntur in triangulo $P T B$, angulus $T B P$, et ratio laterum $T B$ et $B P$, atquè ideò triangulum hoc specie dabitur. Innotescet igitur tum angulus parallacticus $B P T$, tum distantia $P T$, seu ejus ratio ad telluris notam semidiametrum. Hâc igitur ratione inveniri potest parallaxis sideris aut phænomeni vel quiescentis vel utlibet moti. Verùm astronomi recentiores plures invenerunt methodos quibus unus observator in eodem loco manens siderum motu diurno ac proprio agitatorum parallaxes potest determinare. De his, ubi e re visum fuerit, dicemus. Vid. Keill. in Introductione ad Veram Astronomiam.

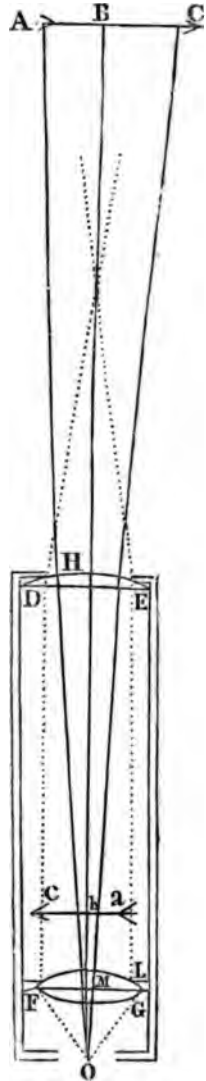


CAPUT III.

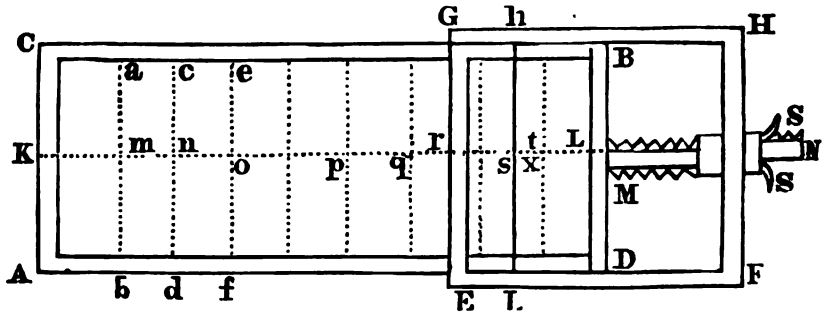
De Telescopii ac Micrometri usu et Phænomenis horum Instrumentorum beneficio observatis pauca.

35. SIT telescopium astronomicum $D F G E$, vitrum objectivum $D E$, oculare $F G$; objectum $A C$; ita remotum ut radii qui ex singulo illius puncto in totam vitri objectivi superficiem incidunt pro parallelis possint usurpari. Radii illi ex eodem puncto v. gr. A propagati, a vitro objectivo ita franguntur ut post vitrum $D E$ coeant in unum punctum a , quod est puncti A imago, et similiter punctum C pingitur in c , totumque objectum $A C$ in $a c$, situ inverso, estque $c a$ foci locus in quo proinde oculus O , trans vitrum oculare $F G$, videt objectum $A C$, seu ipsius imaginem $a c$. Hinc si in foci loco $c a$ positum sit corpus aliquod opacum, oculus illud distinctè videbit tanquam objecto $A C$, seu potius imagini ejus $a c$ contiguum.

36. Sit $B O$ radius ad $A C$ normalis et per centra H et M vitrorum transiens, ideoque irrefractus. Jungatur recta $A O$, et objectum $A B$, oculo nudo videretur sub angulo $A O B$, estque proinde angulus $A O B$, magnitudo apparens objecti $A B$. Quoniam verò radii ex punctis imaginis b et a parallelè propagati colliguntur a vitro oculari $F G$ in ejus foco O ubi oculus versatur, pars objecti $A B$, seu ejus imago $a b$, videtur sub angulo $M O L$, et (per Probl. XXXI. Element. Dioptr. Clariss. Wolf.) distantia foci lentis objectivæ $H b$, est ad distantiam foci lentis ocularis $b M$, ut angulus $M O L$ ad angulum $A O B$, seu ut magnitudo apparens imaginis $a b$ ad magnitudinem apparentem objecti $A B$ nudo oculo visi, ex quo patet quod in eodem telescopio magnitudines apparentes objectorum sunt proportionales magnitudinibus imaginum in foco positarum et trans vitrum oculare visarum.



37. His positis, facile est micrometri usum intelligere. Est autem micrometrum instrumentum quod in foco lentis objectivæ telescopii aptatur ad magnitudines apparentes quæ gradum unum vel gradum cum semisse non superant, dimetiendas. Illius constructionem quam D. De la Hire in Tabulis Astronomicis veluti usibus Astronomicis accommodatiorem dedit, referemus. Constat ex duobus quadris rectangularibus quorum alterum $A C B D$, ut plurimum longitudinem habet duorum pollicum cum semisse et latitudinem unius pollicis cum semisse. Hujus quadri, latera longa $A D$, $C B$, in partes æquales et tertiâ parte unius pollicis inter se distantes dividuntur, itâ tamen ut lineæ ductæ per singulas divisiones sint ad latera $A D$, $C B$, perpendiculares. Hisce divisionibus fila serica benè tensa applicantur, glutinanturque cerâ. Additur



filum sericum $K L$, dictum transversale, quod ad angulos rectos fila parallela modò descripta $a b$, $c d$, $e f$, &c. secet et in medio laterum $A C$, $B D$ glutinatur. Alterum quadrum $E F H G$ cujus longitudo $E F$ non superat unum pollicem cum semisse, ita priori accommodatur ut ejus latera $E F$, $G H$, moveantur super latera $A D$, $C B$, alterius quadri nec ab ipso separentur. Facies hujus secundi quadri quæ divisam faciem prioris respicit, filo etiam serico et tenso $h L$, instruitur, quod, cùm movetur quadrum ubiquè prioris quadri filis parallelum maneat, eaque superlabitur quam proximè, nec tamen eis occurrit. Cochlea deindè $M N$, lateri $B D$, longioris quadri affigitur, cujus striatum receptaculum lateri $F H$ alterius adhæret et in foramine rotundo circumvolvitur. Cochlea ejusque receptaculum auriculis S, S , instructum itâ inter se aptari debent ut receptaculum et quadrum $E H$, ne minimùm quidem moveri possit, nisi receptaculi motu conversionis. Quadrum $A C B D$, telescopii cujusvis longitudinis tubo in distantia foci objectivæ lentis itâ aptatur ut ipsius quadri planum perpendiculare sit ad telescopii axem. His itâ constitutis, telescopium in cælum convertatur et itâ disponatur ut

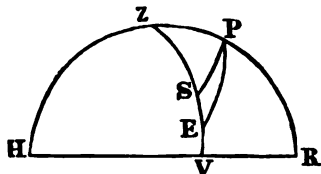
duæ stellæ fixæ quarum distantia apparens in minutis secundis aliundè nota sit, sint in filo transversali KL , positæ verseturque cochlea donec filum mobile hL , per centrum x , stellæ unius transeat, alterius stellæ centro m , vel n , existente in alio filo a b , vel c d . Hæc observatione notum erit cuinam distantiae apparenti respondeat longitudo mx , vel nx , in lineis et lineæ partibus data, et indè per proportionis regulam, observatâ quilibet aliâ siderum distantia nq , dabitur angulus sub quo hæc distantia nudo oculo videretur, inferendo sic: ut mx vel nx ad nq , ita distantia apparens stellarum duarum m , vel n , et x ad distantiam apparentem punctorum n et q . Moveatur jam quadrum $EFGH$ ope receptaculi striati donec filum ejus sericum hL , exactè conveniat cuilibet ex filis parallelis alterius quadri, noteturque positio auricularum receptaculi et iterum moveatur receptaculum donec idem filum quadri $EFGH$ proximo filo alterius congruat, vel, quod idem est, moveatur quadrum $EFGH$, per spatium quatuor linearum, numerenturque revolutiones receptaculi et partes unius revolutionis quæ filorum intervallo linearum quatuor conveniunt. Condatur tandem tabula revolutionum receptaculi et partium ejus quæ singulis minutis primis et secundis ex noto superiùs toto intervallo debentur.

38. Ubi diameter planetarum erit observanda, directo telescopio cum micrometro ad planetam ita disponantur fila movendo telescopium ut sideris limbus unum ex filis parallelis immobilibus percurrat; deindè receptaculum convertatur, donec filum mobile limbum alterum planetæ contingat. Manifestum est ex distantia cognita inter fila micrometri quæ planetam comprehendunt, notam fieri planetæ diametrum apparentem.

39. Datâ declinatione et ascensione rectâ stellæ fixæ, inveniri potest alterius stellæ declinatio et ascensio recta, modò tamen duæ illæ stellæ transire vicissim possint per campum telescopii immoti. Ità enim disponantur fila parallela micrometri ut motus diurnus stellæ quæ alterum præcedit fiat super unum ex illis EG . Super a b , in quo situ filum c d , exponet portionem exiguam paralleli quem stella describit, et filum KL illud ad angulos rectos intersecans, circulum aliquem declinationis. Notetur temporis momentum quo stella præcedens filo transversali occurrit in m . Similiter immoto telescopio observetur tempus appulsus alterius seu sequentis sideris ad idem filum transversale seu circulum declinationis, et si interea filum parallelum mobile hL , sideri huic aptetur, immoto manente micrometro ope distantiae mx , filorum a b et

h L, distantiam apparentem inter parallelos siderum duorum quæ est differentia declinationis siderum, obtinebimus. Sed si differentia temporis inter utriusque sideris transitum per filum transversale in minutâ tam primâ quàm secundâ gradûs convertatur (16) differentiam ascensionalem siderum habebimus.

40. Hæc observatio supponit nullum esse sideris motum proprium nullamque parallaxim. Si sidus motum proprium habeat, illum oportet ex observationibus determinare quoad declinationem et ascensionem rectam illiusque rationem habere. Quo peracto, si aliqua sit sideris parallaxis poterit itâ reperiri. Observetur sideris ad meridianum appellentis ascensio recta quæ parallaxi obnoxia non est (39), et differentia inter hanc ascensionem rectam sideris in meridiano existentis et ascensionem rectam ejusdem sideris alibi existentis observatam, erit parallaxis ascensionis rectæ ex quâ parallaxis altitudinis inveniri poterit. Sit enim H R horizon, H Z R meridianus, Z zenith, P polus mundi, Z S E V circulus verticalis, S sidus observatum in loco S et deindè in meridiano, E locus sideris visus, S locus verus, et ideò S E parallaxis altitudinis; S P et P E circuli declinationis. Datur, (per Hyp.) angulus S P E, cujus mensura



est parallaxis ascensionis rectæ sideris observata. Datur etiam punctum illud quod est intersectio æquatoris et meridiani tempore observationis sideris in E, apparentis, undè habetur arcus æquatoris inter meridianum R Z H et circulum declinationis P E interceptus qui est mensura anguli Z P E. Quare in triangulo Z P E, dantur latus Z P distantia poli a vertice, et latus Z E distantia visa sideris a vertice cum angulo Z P E. Innotescet igitur angulus P Z E, ab angulo Z P E, subducatur datus S P E, et dabitur angulus Z P S. Denique in triangulo Z P S, ex datis angulis P Z S et Z P S, cum latere Z P, dabitur latus Z S, vera sideris a vertice distantia quæ ex visâ Z E, ablata relinquet S E parallaxim altitudinis.

41. Telescopium maculas quamplurimas variables quæ super corpus Solis incedere videntur ostendit, ex earum motu Solem circa proprium axem $25\frac{1}{2}$ diebus revolvi infertur. In Venere pro variâ ejus ad Solem et Terram positione phases diversæ conspiciuntur phasibus Lunaribus similes itâ ut partem illuminatam Soli constanter obvertat. Præterea Mercurius et Venus tanquam maculæ nigræ et rotundæ discum Solis

trajicere visi sunt. Undè notum factum est Planetas illos esse corpora opaca a Sole illustrata. In Jove, Marte ac Venere maculæ observatæ fuerunt quarum motus rotationem illorum planetarum circà proprium axem probat. Circà Jovem quatuor revolvi videntur lunulæ Jovis corpus perpetuò comitantes. Sunt omnes ut et Jupiter ipse corpora opaca lumen suum a Sole mutuantia; nam Jove inter ipsas et Solem diametraliter interposito, lumine privantur et cælo sereno evanescunt; ubi verò aliqua Jovialis Lunula inter Solem et Jovem transit, ejus umbra instar maculæ nigræ ac rotundæ observatur in ipso Jovis disco. Quinque pariter Lunulæ Saturnum comitantur et circà eum revolutiones suas agunt lumineque privantur dum radii Solares a Saturni corpore opaco intercipiuntur. Hugenius ex propriis observationibus intulit Saturnum cingi annulo tenui, plano, nusquam cohærente cum corpore Saturni et ad Eclipticam inclinato; quæ hypothesis, si ita nunc potest appellari, non solum Phænomenis ab Hugenio observatis, sed et aliis plurimis quæ magnâ diligentia a Cassino et Maraldo observata fuere satisfacit. Tandem per telescopium stellæ longè plures quam oculo nudo cernuntur; Stellæ illæ quas nebulosas dicunt et integra via lactea nihil aliud sunt quam plurimarum stellarum quæ oculo non distinguuntur congeries. Novæ quoque in cælis stellæ apparent et quæ antè videbantur, nonnunquam inconspiciuæ fiunt, illarum quædam apparitionis et disparitionis periodos habent quæ quamdam regularitatem obtinere videntur, earumque magnitudo sub initio apparitionis crescit et sub finem decrescit.

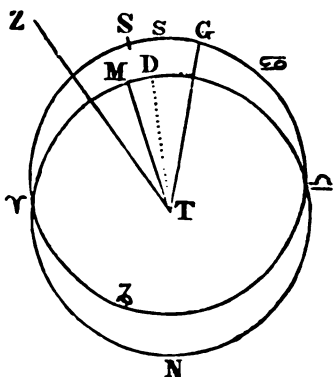
42. Si sæpius observetur tum motus Solis in Eclipticâ (15) tum ipsius diameter apparens (39) quàm fieri potest accuratissimè, circà datum punctum in plano describi poterit curva similis orbitæ quam Sol circà terram percurrere videtur. Nam cùm diametri Solis apparentes sint reciprochè ut ipsius a tellure distantia, ex datis diametris apparentibus dantur distantiarum rationes et ex dato Solis motu in Eclipticâ, dantur anguli inter illas distantias contenti. Si verò ex hujusmodi observationibus conferantur diametri apparentes Solis cum ipsius angulari velocitate circà terram, apparet areas quas Sol radio ad terram ducto verit, esse temporibus proportionales, Solisque orbitam non multum differre a circulo et haberi posse pro ellipsi cujus umbilicum alterum occupat terra. Est autem Solis diameter apparens maxima 32' 40", et minima 31' 36" juxtà D. Cassini in Tabulis Astronomicis et ideò maxima distantia Solis a terrâ est ad distantiam minimam ut 32' 40" ad 31' 36", sive ut 1960 ad 1896 circiter, sive 245 ad 237. Ex similibus observationibus, tum

diametri apparentis Lunæ, tum velocitatis ipsius in unâ revolutione colligitur hunc planetam radio ad centrum terræ ducto areas describere temporibus circiter proportionales.

43. Si itaque observetur locus Solis in Eclipticâ quandò tum ipsius velocitas tum diameter apparens minima est, dabitur tempore dato locus Apogæi Solis et collatis plurium annorum observationibus innotescet Apogæi motus annuus qui juxta D. Cassini est $1' 2''$ et inde per proportionis regulam habetur motus Apogæi pro quolibet dato tempore. Hinc si tempore quovis observetur Solis longitudo vera, dabitur eodem tempore locus Apogæi Solis et ipsius anomalia vera ex quâ eruetur ejusdem anomalia media (per Schol. ad Prop. XXXI. Lib. I.) ac proinde longitudo media habebitur tempore observationis. Hæc longitudo media assumatur tanquam radix seu principium motuum mediorum Solis et tempus observationis tanquam epocha temporum mediorum computandorum et dato quolibet alio tempore medio inveniri poterit medius Solis motus huic tempori proportionalis, et inde habebitur ipsius longitudo media et distantia ejus media ab Apogæo seu anomalia media dabitur ex quâ deinde eruetur anomalia coæquata, ac proinde longitudo vera Solis habebitur.

44. Quia verò dies Solares sunt inæquales (15), necesse est ut tempus apparens quod diebus solaribus constat, fluat enim inæquabiliter. Differentia quæ est inter tempus apparens seu verum et tempus æquabile seu medium dicitur æquatio temporis quâ indigemus ut tempus medium convertatur in tempus apparens et vice versâ, ideòque ut invento loco Solis pro tempore medio, inveniatur etiam pro tempore vero et contrâ.

45. Sit T, Cœli et Terræ centrum T Z, planum immobile circuli alicujus horarii, γ M \triangle N æquator, γ S \triangle β ecliptica, S Sol, γ S Solis longitudo vera, γ s ejusdem longitudo media, cui æqualis capiat arcus æquatoris γ M, et γ D sit Solis ascensio recta vera. Ducantur ad puncta mobilia M et D radii æquatoris T M et T D qui semper moveantur cum punctis M et D, in consequentia. Quoniam æquator per circulum horarium T Z, motu æquabili diurno nempè qui fit ab oriente in occidentem, transit; si punctum D ascensionis



rectæ Solis etiam æquabiliter progredieretur in æquatore ab occidente in orientem, dies Solares seu revolutiones singulæ puncti D a circulo horario T Z ad eundem, essent æquales et tempus apparens a medio non differet. Sed cùm motus ascensionis rectæ D, inæquabilis sit, dies et horæ Solares sunt quoquæ inæquales. At punctum M, æquabiliter progreditur in æquatore ab occasu ad ortum, et ideò motus illius constitui potest pro mensurâ temporis medii. Itaque longitudo Solis media φ s vel æqualis est ascensioni rectæ φ D vel eâ major est aut minor. In primo casu punctum M coincidit cum puncto D, in secundo casu est ultrâ D, versùs orientem et in tertio casu est citrà D, versùs occidentem. Temporis absoluti momentum quo punctum M, coincidit cum puncto D, sumatur tanquam principium a quo tempus apparens et tempus medium incipiunt computari et quo simul coincidunt; et in aliis casibus tempus apparens a medio differet pro quantitate arcûs M D in tempus solare conversi (16); Nam dum punctum D, est sub meridiano T Z, horâ 12^a computatur in loco cujus meridianus est T Z, et ubi punctum M distat a puncto D, arcus M D, in tempus solare conversus, dabit differentiam inter meridiem apparentem et meridiem medium qui contingit quandò punctum M est in meridiano T Z.

46. Itaque tempus medium in apparens sic convertitur. Quæritur longitudo Solis tum media, tum vera tempori dato respondens (44) indè eruitur longitudinis veræ ascensio recta (14), si hæc major est mediâ Solis longitudine, differentia in tempus solare conversa subtrahitur ex tempore medio ut fiat apparens, additur si minor est. At tempus apparens in medium ita mutatur. Tempus apparens tanquam medium consideratur, et inquiritur pro dato tempore longitudo Solis tum media, tum vera, et indè eruitur longitudinis veræ ascensio recta; si hæc mediam Solis longitudinem superat, differentia in tempus solare conversa additur tempori apparenti ut fiat medium. Si verò longitudinis veræ ascensio recta minor est mediâ Solis longitudine, differentia in tempus solare conversa a tempore apparente subducitur. Quod si media Solis longitudo æqualis sit ascensioni rectæ longitudinis veræ, tempus apparens congruit cum medio nullaque eget æquatione. Hæc omnia ex modò dictis (46) manifesta sunt; si enim punctum D est orientalius puncto M, hoc citius ad meridianum T Z, pervenit quàm illud, ac proinde hora 12^a temporis medii computatur, cùm nondum est meridies temporis apparentis, et contrarium contingit, si punctum D puncto M fuerit occidentalius. Ubi tempus apparens in medium oportet converti, tempore apparente utimur tanquam

medio ad locum Solis inveniendum; cùm enim tempus apparens non multum differat a tempore medio, differentia inter ascensionem rectam et longitudinem mediam Solis est quam proximè eadem, sive per tempus medium, sive per tempus apparens inquiratur.

47. Jam verò si tempore quovis apparente observetur Solis ascensio et longitudo vera, indèque eruatur ipsius longitudo media (44) ac tempus apparens convertatur in tempus medium (47) habebimus locum Solis medium pro dato temporis medii momento, et hic locus erit radix motuum Solis, momentum verò temporis medii datum epocha temporum computandorum; quibus semel constitutis ad quodlibet aliud datum tempus medium vel apparens inveniri poterit locus Solis verus vel medius in eclipticâ et contrâ. Exposuimus jam (44) quomodò locus Solis dato tempore medio inquiratur. Si datum sit tempus apparens, hoc tanquam tempus medium usurpetur et quærat locus Solis verus huic correspondens (44); deindè longitudini Solis sic inventæ tantum longitudinis addatur vel dematur quantum temporis æquationi debetur et ità prodibit locus Solis tempori apparenti respondens. Facile est ex dictis problema inversum solvere, seu ex dato loco Solis medio aut vero tempus medium aut apparens huic Solis loco respondens invenire.

48. Nec opus est ut moneamus easdem esse motuum coelestium apparentias, sive cælum omne cum stellis circâ tellurem motu diurno revolvatur ab oriente in occidentem, sive terra circâ proprium axem eodem tempore ab occidente in orientem converti supponatur immoto cælo; sive etiam terra immota maneat et Sol proprio motu ab occasu ad ortum feratur, seu circa Solem immotum terra motu annuo circumvolvatur in eclipticâ. Nam in utrâque suppositione diametri apparentes et velocitates relativæ sunt eædem.

DE

MUNDI SYSTEMATE.

LIBER TERTIUS.

In Libris præcedentibus principia philosophiæ tradidi, non tamen philosophica sed mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum et virium leges et conditiones, quæ ad philosophiam maximè spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi scholiis quibusdam philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, et in quibus philosophia maximè fundari videtur, uti corporum densitatem et resistantiam, spatia corporibus vacua, motumque lucis et sonorum. Superest ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem systematis mundani. De hoc argumento composueram librum tertium methodo populari, ut a pluribus legeretur. Sed quibus principia posita satis intellecta non fuerint, ii vim consequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent, quibus a multis retro annis insueverunt: et propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in propositiones, more mathematico, ut ab iis solis legantur qui principia prius evolverint. Verumtamen quoniam propositiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematicè doctis moram nimiam injicere possint, auctor esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit siquis definitiones, leges motuum et sectiones tres priores libri primi sedulo legat, dein transeat ad hunc librum de mundi systemate, et reliquas librorum priorum propositiones hic citatas pro lubitu consulat,

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I. (*)

Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ et veræ sint et earum phænomenis explicandis sufficient.

DICUNT utique philosophi: Natura nihil agit frustra, et frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est et rerum causis superfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideoque effectuum naturalium ejusdem generis eadem assignandæ sunt causæ, quâtenus fieri potest.

Uti respirationis in homine et in bestiâ; descensus lapidum in Europâ et in Americâ; lucis in igne culinari et in Sole; reflexionis lucis in terrâ et in planetis.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi et remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt.

Nam qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt, ideoque generales statuendæ sunt quotquot cum experimentis generaliter

(*) 49. * *Regula prima.* Hæc regula duas habet partes; prima est, ne philosophia in vana abeat opinionum commenta, causæ rerum naturalium non aliæ admitti debent quàm quæ reverà existunt et quæ phænomenis explicandis sufficient; undè si velimus cum evidentia ac certitudine philosophari, omnes hypotheses negligendæ nobis sunt; hypothesis enim si legitima est, causæ quidem possibilitatem, minimè verò existentiam adstruit, cùm effectus idem pluribus modis produci possit. Verumtamen ubi certitudinis obtinendæ ab experimentis et inde mathematicâ viâ procedendo spes non affulget aypothesibus quibusdam particularibus uti licet

ad veritatem novis experimentis indagandam, quemadmodum astronomi varias adhibuerunt hypotheses ut phænomena cœlestia prædicere et accuratius observare, atquè ita veras eorum causas conjectando investigare possent. Altera pars regulæ, ea scilicet quæ præscribit non plures admittendas esse rerum naturalium causas quàm quæ eorum phænomenis explicandis sufficient, manifesta est; nam cùm vera effectus causa per experientiam semel inventa est, et matheseos ope præsertim demonstratum est causæ illius eam esse vim quæ ad effectum producendum sufficiat, liquet aliam quamlibet causam esse inutilem.

quadrant; et quæ minui non possunt, non possunt auferri. Certè contra experimentorum tenorem somnia temerè confingenda non sunt, nec a naturæ analogiâ recedendum est, cùm ea simplex esse soleat et sibi semper consona. Extensio corporum non nisi per sensus innotescit, nec in omnibus sentitur: sed quia sensibilibus omnibus competit, de universis affirmatur. Corpora plura dura esse experimur. Oritur autem durities totius a duritiæ partium, et inde non horum tantùm corporum quæ sentiuntur, sed aliorum etiam omnium particulas indivisas esse duras meritò concludimus. Corpora omnia impenetrabilia esse, non ratione sed sensu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, et inde concludimus impenetrabilitatem esse proprietatem corporum universorum. Corpora omnia mobilia esse, et viribus quibusdam (quas vires inertię vocamus) perseverare in motu vel quiete, ex hisce corporum visorum proprietatibus colligimus. Extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas et vis inertię totius oritur ab extensione, duritiæ, impenetrabilitate, mobilitate et viribus inertię partium: et inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi et duras esse et impenetrabiles et mobiles et viribus inertię præditas. Et hoc est fundamentum philosophiæ totius. Porro corporum partes divisas et sibi mutuò contiguas ab invicem separari posse, ex phænomenis novimus, et partes indivisas in partes minores ratione distingui posse ^(b) ex mathematicâ certum est. Utrum verò partes illæ distinctæ et nondum divisæ per vires naturæ dividi et ab invicem separari possint, incertum est. At si vel unico constaret experimento quod particula aliqua indivisa, frangendo corpus durum et solidum, divisionem pateretur: ^(c) concluderemus vi hujus regulæ, quod non solum

^(b) 50. * *Ex mathematicâ certum est.* Demonstrationes passim reperiuntur apud eos auctores qui de materiæ divisibilitate tractant, ut ex incommensurabilitate lateris quadrati et ejus diagonalis, &c.

^(c) * *Concluderemus vi hujus regulæ,* seu ex analogiâ naturæ quæ simplex esse solet et sibi semper consona. * Hinc patet differentia Newtonianismi et Hypotheseos Atomorum; atomistarum necessariò et metaphysicè atomos esse indivisibiles volunt, ut sint corporum unitates; metaphysicam hanc questionem missam facit Newtonus, et huc redit ejus sententia, si illæ partes quas Deus condidit indivisas, quæque ideo sunt corporum physica elementa seu physice monades, frangendo dividerentur, tunc etinde adocti, statueremus eas posse dividi, ideoque ulterius sine fine divisibiles esse diceremus, omnem hæc de re theoriam metaphysicam experimentis facile postponentes. Hæc etiam fluunt ex Lockii, de ratione quâ

agnoscimus qualitates essentielles, doctrinâ; ignoramus planè, inquit ille, quenam qualitates cum subjecti naturâ sint conjunctæ si rem metaphysicè spectemus; sed fit ut experienciâ magistrâ, has aliasve qualitates ad universa subjecta quæ ad eandem classem referimus pertinere deprehendamus, aut saltem ad omnia in quæ experimenta instituere licuit, et eas essentielles dicere lubuit. Hinc infert Newtonus, eadem istâ regulâ quâ utimur vulgo ad agnoscendas eas qualitates, eadem etiam regulâ in rebus philosophicis uti debemus ubi experienciâ quidem, sed minus obviâ ac vulgari, similem inductionem instituere dabitur. Adjungit quidem præter eam inductionem, caracterem hunc metaphysicum, ut illæ qualitates intendi ac remitti nequeant, etenim qualitates quæ remitterentur, gradatim eadem ratione quâ remittuntur, aboleri possent, sicque universorum corporum qualitates non amplius forent.

partes divisæ separabiles essent, sed etiam quod indivisæ in infinitum dividi possent.

Denique si corpora omnia in circuitu terræ gravia esse in terram, idque pro quantitate materiæ in singulis, et lunam gravem esse in terram pro quantitate materiæ suæ, et vicissim mare nostrum grave esse in lunam, et planetas omnes graves esse in se mutuo, et cometarum similem esse gravitatem in Solem, per experimenta et observationes astronomicas universaliter constet: dicendum erit per hanc regulam quod corpora omnia in se mutuo gravitant. Nam et fortius erit argumentum ex phænomenis de gravitate universali, quàm de corporum impenetrabilitate: de quâ utique in corporibus cœlestibus nullum experimentum, nullam prorsus observationem habemus. Attamen gravitatem corporibus essentialem esse minimè affirmo. Per vim insitam intelligo solam vim inertię. Hæc immutabilis est. (d) Gravitās recedendo a terrâ, diminuitur.

REGULA IV.

In philosophiâ experimentalī, propositiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obstantibus contrariis hypothesibus, pro veris aut accuratè aut quamproximè haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxie.

(e) Hoc fieri debet ne argumentum inductionis tollatur per hypotheses.

(d) * Gravitās recedendo a terrâ diminuitur, ut infra demonstrabitur.

(e) * Hoc fieri debet. Hanc regulam in quæstionibus opicis hoc ferè modo exponit Newtonus. In physicis non secus ac in mathematicis scientiis, ad res difficiles inquirendas methodus analytica prius est usurpanda quàm synthetica methodus in auxilium vocetur. Hæc prima methodus in eo posita est ut adhibeantur experimenta atquæ observationes ex quibus deindè per inductionem conclusiones generales deducantur, non obstantibus contrariis hypothesibus, nisi eas aliquo experimento aut certâ aliquâ veritate nixas esse contigerit. Nam quod hypotheses spectat, eas in philosophiâ experimentalī locum habere non debent. Quamvis ratiociniis ab experimentis et observationibus per inductionem de-

ducta ad stabiliendas modo demonstrativo conclusiones generales satis non sint, hic tamen ratiocinandi modus est omnium quos rerum naturâ admittere possit optimus, iaque eò tutius reputari debet quò generalior est inductio; si autem nulla repugnaverint phænomena, generalem conclusionem deducere licebit. Sin verò deinceps contraria occurrant phænomena, exceptionibus necessariis limitanda erit atquæ restringenda conclusio. Hujus analyseos auxilio a compositis ad simplicia, a motibus ad vires producentes, et generatim ab effectibus ad eorum causas perveniri potest. Quod ad synthetam pertinet, hæc causas cognitās atquæ probatas tanquam principia assumit quorum ope phænomena indè nota explicantur.

P H Æ N O M E N A.

PHÆNOMENON I.

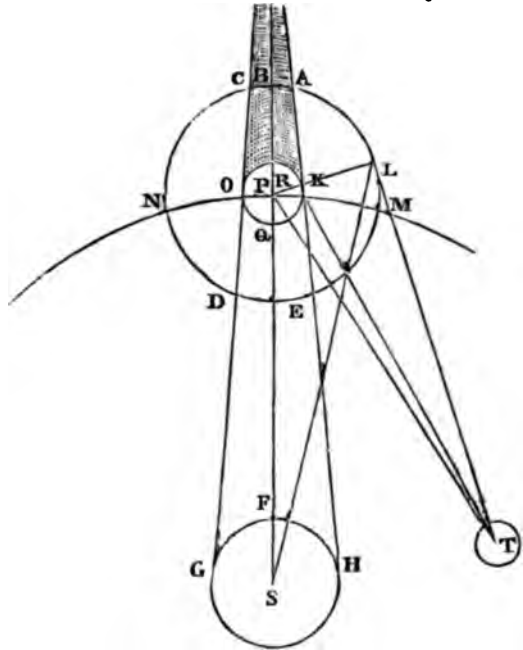
(ⁿ) *Planetæ circumjoviales, radiis ad centrum jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquuplicatâ distantiarum ab ipsius centro.*

(ⁿ) 51. • *Planetæ circumjoviales.*

Lemma Satellitum Jovis et Saturni arbes ac motus determinare.

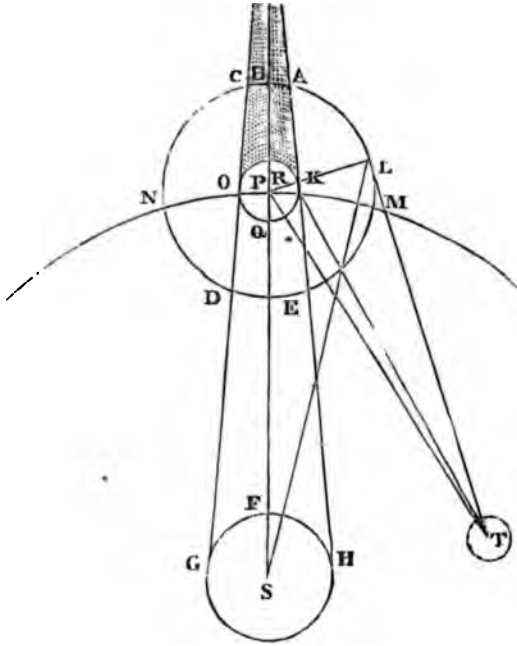
Sit $HFGH$ Sol, cujus centrum S , T Terra; $K O Q$ Jupiter vel Saturnus circa Solem S describens orbitam $M P N$, $A C D E L$ orbita satellitis; radii Solis extremi $G O$, $H R$ paulo plusquam dimidium planetæ P illustrent, et producti umbram conicam $R A C O$ terminant, cujus axis est recta $S P B$ per Solis et planetæ centra transiens. Dum satelles in orbitâ suâ $L C D E$ girans, conum umbrosum attingit in A , in umbram immergitur et cessat videri; deinde ex umbrâ emergens in C rursus apparet. Attamen satellitum Saturni, ob nimiam illorum a Sole et Tellure distantiam, eclipses observari huc usque non potuerunt, sed omnium satellitum Jovis eclipses e terrâ conspici possunt, cum hoc tamen discrimine quod immersiones et emersiones quarti et tertii et nonnunquam secundi in eâdem eclipsi cernantur, primi verò immersio tantum vel emersio observari possit. Sit jam satelles in L , et ductis e terrâ T rectis $T P$, $T L$, angulus $P T L$, dicitur elongatio seu digressio geocentrica satellitis L a planetâ primario P . Ducatur etiam recta $T K$ discum primarii planetæ tangens in K , et angulus $P T K$ erit semidiameter primarii e tellure visa seu apparens, ideòque elongatio geocentrica erit ad semidiametrum apparentem ut angulus $P T L$ ad angulum $P T K$. Observatis pluribus hujusmodi elongationibus geocentricis et semidiametris apparentibus, iisque inter se collatis, inveniuntur elongationes maximæ ubi ratio

anguli $P T L$ ad angulum $P T K$ maxima est, et hoc modo observatum est elongationes maximas geocentricas ejusdem satellitis in variis orbitæ suæ locis æquales esse inter se quam proximè, ideòque satellites describunt circulos planetæ primario concentricos. Quia ergò, ubi



elongatio maxima est, $P K$ est quamproximè ad $P L$, ut angulus $P T K$ ad angulum $P T L$, ob datam rationem horum angulorum et datam quoque semidiametrum $P K$, datur et $P L$, seu distantia satellitis a centro primarii. Angulus

P S L sub quo e centro Solis S videretur distantia satellitis a centro primarii P, dicitur ejus



elongatio heliocentrica; quæ maxima est, cùm angulus S P L rectus est. Quia verò P L data est, elongationes maximæ heliocentrica et geocentrica æquales sunt, ubi planeta P a Sole et terrâ æquè distat.

Cognitis orbitarum diametris, tempora periodica satellitum inveniri possunt per eorum eclipses maximæ durationis, atque etiam per transitum satellitis aut umbræ illius per medium discum planetæ primarii. Nam cùm radius circuli sit æqualis arcui grad. 57.29578, (Lib. I. not. 372.) et data sit ratio radii P L ad diametrum planetæ primarii O R, erit quamproximè ut P L ad O R, ita gradus 57.29578. ad numerum graduum arcus exigui C A, qui ferè æqualis est diametro O R, ob parallelas O C, R A. Fiat deindè ut numerus graduum aut partium gradus C A vel O R ad gradus 360, ita tempus quo describitur C A vel O R ad tempus periodicum satellitis, quod ita dabitur. Supposita theoriâ primarii planetæ per observationes determinatâ, tempora periodica inventiuntur mensurando intervalla temporis inter duas satellitum conjunctiones, vel etiam inter duas digressiones maximas.

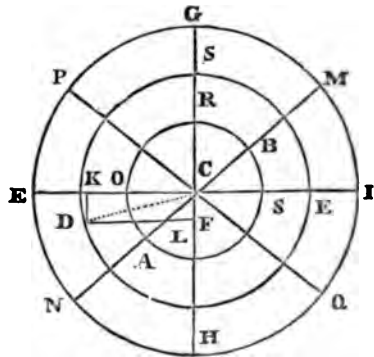
52. Satellitum a centro Jovis distantias observandi et in diametri partibus æstimandi triplitem methodum describit Clariss. Cassinus in Elementis Astronomiæ anno 1740 editis.

1°. Sit A R B Jupiter, D S E D orbita satellitis, micrometro capistur diameter Jovis

A B, deinde ubi satelles in maximâ elongatione versatur, capistur distantia D C, inter centrum Jovis C, et satellitem D, quo facto, distantia D C, conferatur cum diametro Jovis, habebitur distantia satellitis a centro Jovis in partibus diametri.

2°. Adhibendum est telescopium in cujus foco aptantur fila quatuor, quorum duo G H, E I sese perpendiculariter secant, reliqua duo N M, P Q his ad angulos semirectos insistant in communi sectione C. Quibus ita paratis dirigatur telescopium et continuò vertatur, donec centrum Jovis C, motu diurno unum ex his filiis, puta E I, percurrere videatur, in quo situ filum G H circulum aliquem horarium representabit. Observetur deindè differentia temporis inter appulsum centri Jovis et appulsum satellitis in maximâ sua elongatione versantis ad eundem circulum horarium G H, differentia temporis convertatur in gradus et minuta, ita ut quatuor minutis horariis respondeat gradus unus, habebitur portio D F vel K C, circuli paralleli Jovis. Observetur etiam differentia temporis inter appulsum satellitis ad L, et ap-

pulsum ad F, quæ differentia simili modo in gradus circuli paralleli graduumque partes convertatur, habebitur L F, cui æqualis est F C, ob angulos L C F, F L C, semirectos. Datis verò D F



et F C, datur D C. Jam conferatur D C, cum diametro Jovis A B vel O S, cujus diametri mensura habebitur, si tempus quo diameter per filum horarium G H transit, in gradus et minuta convertatur, utriusque diametri D C,

Constat ex observationibus astronomicis. (*) Orbes norum planetarum non differunt sensibiliter a circulis Jovi concentricis, et motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica esse in sesquiplicatâ ratione semidiametrorum orbium consentiunt astronomi; et idem ex tabulâ sequente manifestum est.

(^b) *Satellitum Jovialium tempora periodica.*

1^d. 18^h. 27'. 34". 3^d. 13^h. 13'. 42". 7^d. 3^h. 42'. 36". 16^d. 16^h. 32'. 9".

(¹) *Distantiæ satellitum a centro Jovis.*

<i>Ex observationibus</i>	1	2	3	4	} Sem'diam. Jovis
Borelli	5 $\frac{2}{3}$	8 $\frac{2}{3}$	14	24 $\frac{2}{3}$	
Townlei per microm.	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini per telescop.	5	8	13	23	
Cassini per eclips. satell.	5 $\frac{2}{3}$	9	14 $\frac{25}{30}$	25 $\frac{5}{10}$	
(¹) <i>Ex temporibus periodicis.</i>	5,667	9,017	14,384	25,299	

O C obtinebitur ratio, et eorumdem absoluta magnitudo in gradibus circuli maximi sphaeræ habebitur, gradibus circuli paralleli Jovis ad gradus circuli maximi reductis, dicendo, ut radius circuli maximi ad radium paralleli, ita numerus graduum et minutorum in arcu circuli paralleli ad numerum graduum et minutorum in arcu circuli maximi. Nam in circulis inæqualibus, gradus qui æqualibus arcubus continentur, esse reciproci ut circulorum radios, ex elementis patet.

3^o. In eclipsibus satellitum centralibus, dum nempe duratio est omnium maxima, observetur tempus quod ab ingressu centri satellitis in disco Jovis usque ad illius egressum interfluxit. Deinde fiat, ut tempus periodicum satellitis ad tempus moræ in disco Jovis, ita 360° ad quartum proportionalem, hoc est, ad gradus quos continet arcus æqualis disco Jovis, satellitis orbitæ applicato. Iterum (ex trigon.) inferatur, ut sinus semissis ejusdem arcus ad sinum totum, ita semidiameter Jovis ad semidiametrum orbitæ satellitis, ideoque comparari poterit semidiameter Jovis cum semidiametro orbitæ satellitis, hoc est, cum distantia satellitis a centro, ac proinde habebitur distantia satellitis a centro Jovis in partibus semidiametri Jovis.

Quod Saturnum spectat, solis oculis telescopio adjunctis distantias satellitum a centro Saturni cum diametro annuli comparare solent astronomi.

(*) * *Orbes horum planetarum* (51.)

(^b) * *Satellitum Jovialium tempora periodica.* (ibid.)

* In novissimo Cassini opere suprà laudato tempora periodica paulo majora constituuntur, scilicet, primus satelles 62", 2^{us}. sat. 4' 12"; 3^{us}. sat. 17'; 4^{us}. sat. 1^h, 32', 58', tardius revolutiones suas absolvere statuuntur; illæ autem differentie totius temporis periodici respectu minimæ sunt, maximæ enim differentie non excedunt trecentessimam partem durationis totius revolutionis.

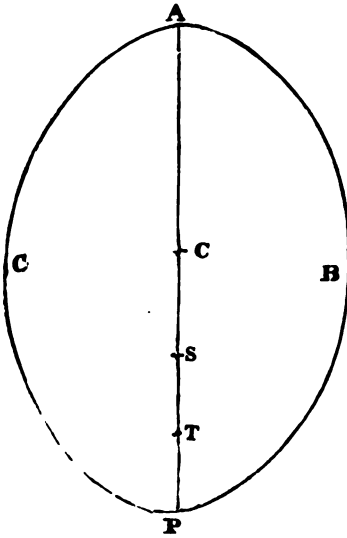
(¹) * *Distantiæ satellitum a centro Jovis* (52.)

(¹) * *Ex temporibus periodicis.* Newtonus computum iniit hoc modo. Assumpsit distantiam observatam primi satellitis 5 $\frac{2}{3}$, seu 5'667, et deinde per tempora periodica etiam observata quæsitit aliorum satellitum distantias, supponendo quadrata temporum periodicorum cubis distantiarum proportionalia. Nam si logarithmi temporum periodicorum primi et secundi satellitis dicantur 1, L, et logarithmi distantiarum d, D, erit 2 1 ad 2 L, arithmetice ut 3 d ad 3 D, ideoque 2 1 + 3 D = 2 L + 3 d, unde invenitur D = d + $\frac{2}{3} \frac{L}{L} - \frac{2}{3} L$. Est autem d = 0,7533532, $\frac{2}{3} L = 2,324591$, et $\frac{2}{3} L = 2,1228512$, quare habetur D = 0,955093, cui respondet numerus 9,07, uti Newtonus invenit; et ita inveniuntur cæterorum satellitum distantie per eorum tempora periodica.

Elongationes satellitum Jovis et diametrum ejus D. Pound micrometris optimis determinavit ut sequitur. ^(m) Elongatio maxima heliocentrica satellitis quarti a centro Jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit, et prodiit in mediocri Jovis a Terrâ distantia 8'. 16" circiter. Ea satellitis tertii micrometro in telescopio pedes 123 longo capta fuit, et prodiit in eâdem Jovis a Terrâ distantia 4'. 42". Elongationes maximæ reliquorum satellitum in eâdem Jovis a Terrâ distantia ex temporibus periodicis prodeunt 2'. 56". 47"', et 1'. 51". 6".

Diameter Jovis micrometro in telescopio pedes 123 longo sæpius capta fuit, ⁽ⁿ⁾ et ad mediocrem Jovis a Sole vel Terrâ distantiam reducta, semper minor prodiit quàm 40", nunquam minor quàm 38", sæpius 39". In telescopiis brevioribus hæc diameter est 40" vel 41". ^(o) Nam lux Jovis per inæqua-

^(m) 53. * *Elongatio maxima heliocentrica satellitis in mediocri Jovis a Sole distantia æqualis est ipsius elongationi maximæ geocentricæ in mediocri distantia ejusdem Jovis a Terrâ. Sit enim A B P G orbita Jovis, Sol in S, A aphe-*



lium Jovis, P perihelium, T Terra, erit A S maxima distantia Jovis a Sole, S P minima; A T verò maxima distantia Jovis a Terrâ, P T minima, et idè mediocris distantia Jovis a Sole seu $\frac{1}{2} A P = \frac{1}{2} A S + \frac{1}{2} S P$, et mediocris distantia Jovis a Terrâ erit $\frac{1}{2} A T + \frac{1}{2} T P = \frac{1}{2} A P$. Quare dum illæ mediocris distantia sunt æquales, idèquæ elongationes maximæ heliocentricæ et geocentricæ in mediocribus illis distantis sunt etiam æquales.

⁽ⁿ⁾ 54. * *Et ad mediocrem Jovis a Sole. Datur positio lineæ ducta ab oculo spectantis ad Jovem tempore observationis, et per theoriam Solis, datur etiam positio lineæ ductæ ab oculo ad Solem (47) eodem tempore; unde datur angulus his duabus lineis interceptus, seu elongatio Jovis a Sole. Insuper datur, per theoriam Jovis, locus ejus in propriâ orbitâ, et idè notus est angulus quem comprehendunt duæ lineæ a centro Solis ductæ ad Jovem et ad Terram seu oculum observantis. In triangulo igitur ex tribus illis lineis facto cujus angulus unus est in oculo spectantis seu in Terrâ, alter in Sole et tertius in Jove, dantur anguli omnes, et exindè datur ratio laterum seu ratio distantia Jovis a Sole ad distantiam Jovis a Terrâ tempore observationis. Datur verò, per theoriam Jovis ex observationibus constitutam, ratio distantia Jovis a Sole tempore observationis ad ipsius distantiam mediocrem a Sole vel a Terrâ. Quare datur ratio distantia Jovis a Terrâ tempore observationis ad distantiam ejus mediocrem a Sole vel a Terrâ. Sed diametri apparentes Jovis et Terrâ visi sunt inter se inversè ut distantia Jovis a Terrâ, dabitur itaque ratio diametri apparentis tempore observationis ad diametrum apparentem in mediocri distantia Jovis a Terrâ vel Sole.*

^(o) 55. * *Nam lux Jovis. Newtonus Prop. VII. Lib. I. Optices, experimentis et calculis invenit quod, si ex puncto lucido in axem telescopii posito ad ingentem distantiam, radii in vitrum objectivum incident axi paralleli, distincta et minima hujus puncti imago in vitri foco depicta, est circulus, non verò punctum ut esse deberet, obstante nimirum non tantum vitri sphericitate, sed præcipuè radiorum inæquali refrangibilitate quâ lux ea dilatur. Nam in vitro plano convexo cujus convexitas puncto lucido obversitur, cujusque sphericitas diametrum habet 100 ped. seu 1200 digit. apertura verò 4 digit diameter celli qui ex vitri sphericitate oritur erit ad diametrum ejusdem circelli maximè distincti*

lem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, et hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum Jovis in longioribus et perfectioribus telescopiis quàm in brevioribus et minus perfectis. Tempora quibus satellites duo, primus ac tertius, transibant per corpus Jovis, ab initio ingressus ad initium exitus, et ab ingressu completo ad exitum completum, observata sunt ope telescpii ejusdem longioris. (P) Et diameter Jovis in mediocri ejus a Terrâ distantia prodiit per transitum primi satellitis $37\frac{1}{8}''$, et per transitum tertii $37\frac{3}{8}''$. Tempus etiam quo umbra primi satellitis transiit

qui ex inæquali refrangibilitate provenit ut $\frac{961}{72000000}$ ad $\frac{4}{250}$, seu ut 1 ad 1900; distinctio

siquidem ejus puncti lucidi imago et maxime splendida continet partem 250^{am} . aperturæ vitri objectivi optimè elaborati, neglectâ luce dibili et subobscurâ quæ imaginem illam circumdat. Unde in telescopio cujus apertura est 4 digit. et longitudo 100 ped. hujus imaginis diameter trans vitrum oculare visa occupat $2'' 4'''$ vel $3''$, et in telescopio cujus apertura est duorum digitorum et longitudo 20 aut 30 ped. occupabit imago $5''$ vel $6''$. Itaque in telescopio optimo Hugeniano 123 ped. error erit circiter $2''$ in minoribus major.

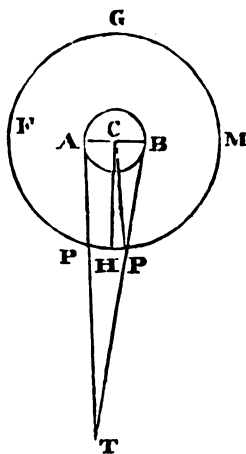
* In telescopiis autem rectè constitutis sive secundum theoriam Prop. LVI. Dioptrices Hugenii, id curatur ut aberratio lucis circa imaginem puncti lucidi æquale occupet spatium super retinâ, sed imago ipsius objecti in telescopiis majoribus majus occupat spatium in retinâ, idque secundum rationem radicum quadratarum longitudinis telescopiorum. Ergo lux erratica quæ dilatat objecti imaginem ab utraque ejus extremitate, minorem habet rationem ad illius objecti apparentiam in majoribus telescopiis quàm in minoribus, in ratione nempe inversâ radicum quadratarum longitudinis telescopiorum.

Hæc omnia ex doctrinâ Newtonianâ circa colores ita jam sunt cognita ut ea fusius et accuratius demonstrare necessarium non judicemus.

56. Hugenius planetarum lucem obstaculo quodam intercepti majores invenit planetarum diametros quàm ab aliis micrometro definitum est; nam lux erratica, ubi tegitur planeta, vividioribus radiis minus extenuatur, ideoque latius propagari videtur. Contrariam ob causam fit quod planetæ in Sole visi, dilatata luce non parum attenuentur. Mercurius in Sole, Hevelio, Galletio et Halleo observantibus, non superavit $12''$ vel $15''$, et Venus Crabrio solum $1' 3''$, Horroxio $1' 12''$ occupare visa est, quæ tamen juxta mensuras Hevelii et Hugenii extrâ discum Solis captas implere debuisset $84''$ ad minimum. Sic et Lunæ diameter apparens quæ anno 1682, paucis diebus antè et post eclipsim Solis mensurata fuit in observatorio Parisiensis $31' 30''$, in ipsâ eclipsi non superabat

$30'$ vel $30' 5''$. Quare patet diametros planetarum extrâ Solem minuendas esse, et intrâ Solem augendas minutis aliquot secundis.

(P) 57. * Et diameter Jovis in mediocri, &c. Sit T Tellus, A B diameter Jovis, P F G M orbita satellitis, ductis e Terrâ radiis T A. T B fere parallelis, dum satelles describit arcum P p; videbitur e Terrâ describere diametrum Jovis A B cui æqualis est arcus P p quamproximè, propter distantia T P magnitudinem. Datis autem tempore periodico et tempore quo describitur P p, datur ratio P p ad totum circumulum,



seu datur arcus P p, in gradibus vel partibus gradus, et inde datur dimidius arcus P H, hincque habetur angulus P C H seu A C P. Jam verò datur P C ob datas per observationem elongationes maximas satellitum a centro Jovis in mediocri Jovis a Tellure distantia; quare si fiat A B ad P C ut duplus sinus anguli dati P C H, ad sinum totum, dabitur (ex trig.) diameter apparens Jovis seu angulus A T B, sub quo videtur in mediocri ejus a Tellure distantia. Eodem modo patet determinari diametrum Jovis per transitum umbræ hanc diametrum percurrentia.

per corpus Jovis, observatum fuit, et inde diameter Jovis in mediocri ejus a Terrâ distantia prodiit 37'' circiter. Assumamus diametrum ejus esse 37 $\frac{1}{4}$ '' quamproximè; et elongationes maximæ satellitis primi, secundi, tertii, et quarti æquales erunt semidiametris Jovis 5,965, 9,494, 15,141, et 26,63 respectivè.

PHÆNOMENON II.

Planetæ circumsaturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas describere temporibus proportionales, et eorum tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquuplicatâ distantiarum ab ipsius centro.

(†) Cassinus utique ex observationibus suis distantias eorum a centro Saturni et periodica tempora hujusmodi esse statuit.

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

1 ^d . 21 ^h . 18'. 27".	2 ^d . 17 ^h . 41'. 22".	4 ^d . 12 ^h . 25'. 12".
15 ^d . 22 ^h . 41'. 14".	79 ^d . 7 ^h . 48'. 00'.	

Distantiæ satellitum a centro Saturni in semidiametris annuli.

<i>Ex observationibus</i>	1 $\frac{19}{20}$.	2 $\frac{1}{2}$.	3 $\frac{1}{2}$.	8.	24.
<i>Ex temporibus periodicis.</i>	1,93	2,47.	3,45.	8.	23,35.

Quarti satellitis elongatio maxima a centro Saturni ex observationibus colligi solet esse semidiametrorum octo quamproximè. At elongatio maxima satellitis hujus a centro Saturni, micrometro optimo in telescopio Hugenario pedes 123 longo capta, prodiit semidiametrorum octo cum septem decimis partibus semidiametri. Et ex hac observatione et tem-

(†) Cassinus utique, &c. Hæc ex Philosophicis Transactionibus n. 187. sunt deprompta: exigua quædam est horum differentia a numeris quos in Elementis Astronomiæ assignat Cassinus filius; ille ita determinat satellitum Sat. tempora periodica, et distantias.

Primi 1^d. 21^h. 18'. 27". 1. 933, &c.

Secundi 2^d. 17^h. 41'. 22". 2. 5.

Tertii 4^d. 12^h. 25'. 12". 3. 5.

Quarti 15^d. 22^h. 34'. 38". 8.

Quinti 79^d. 7^h. 47'. 0". 23. paulo plus.

Observat autem primi et secundi satellitis distantias a Saturno æstimatione solummodo potuisse determinari; motibus verò eorum satis

accuratè nunc cognitæ ex unius nempe quarti cognitâ distantia 8 semi-diametrorum annuli per regulam Kepleri reliquorum distantias posse exquiri, atque ita inveniri.

Distantia primi 1. 93.

Secundi 2. 47.

Tertii 3. 45.

Quarti (ex observat.) 8.

Quinti 23. 23.

Quæ quidem, inquit, adeò congruunt cum observationibus immediatis, ut sine errore sensibili adhiberi possint. *Elem. Astr. Tom. I. pag. 640. et seq.*

poribus periodicis, distantiae satellitum a centro Saturni in semi-diametris annuli sunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. et 25,35. Saturni diameter in eodem telescopio erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7, et diameter annuli diebus Maii 28 et 29 anni 1719. prodiit 43". (*) Et inde diameter annuli in mediocri Saturni a Terrâ distantia est 42". et diameter Saturni 18". (†) Hæc ita sunt in telescopiis longissimis et optimis, propterea quod magnitudines apparentes corporum cœlestium in longioribus telescopiis majorem habeant proportionem ad dilatationem lucis in terminis illorum corporum quàm in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter Saturni haud major quàm 16".

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios, Mercurium, Venerem, Martem, Jovem et Saturnum orbibus suis Solem cingere.

Mercurium et Venerem circa Solem revolvī (*) ex eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem siti sunt;

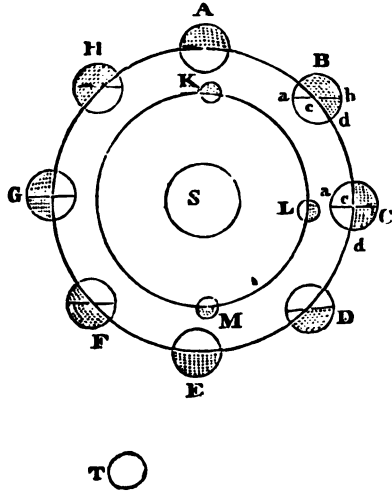
(*) * *Et inde diameter annuli.* Quia diametri apparentes sunt in distantiarum ratione reciproca, datis diametro annuli diebus Maii 28 et 29 anno 1719, et distantia Saturni a Terrâ iisdem diebus datâ (per theoriam planetæ) dabitur quoque diameter annuli in datâ mediocri distantia Saturni a Terrâ, hæc autem diameter prodiit 42"; sed Saturni diameter erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7 (per observ.) quare diameter Saturni in mediocri a Terrâ distantia est 18".

(†) * *Hæc ita sunt (55.)* * Si in hoc telescopio lux erratica subtrahatur angulum duorum secundorum, fiet diameter annuli 40" et Saturni 16" ut revera sint in ratione 5 ad 2. hinc autem ut id obiter notemus, cùm parallaxis Solis in distantia Terræ mediocri a Sole sit 10" sive diameter Telluris a Sole tunc visa sit 20", distantia verò mediocri Terræ a Sole sit ad mediocrem distantiam Saturni a Terrâ vel a Sole, quod idem est (n. 53.) ut 100 ad 954, hinc diameter Terræ erit ad diametrum annuli ut 100 ad 1908, sive ut 1 ad 19 et ad diametrum ipsius Saturni ut 1 ad 7½.

Pariter, cùm diameter Jovis in mediocri ejus a Sole distantia sit 37½" sitque mediocri distantia Terræ ad mediocrem distantiam Jovis a Sole ut 10 ad 52; erit diameter Terræ, ad diametrum Jovis ut 1 ad $\frac{23 \times 37\frac{1}{2}}{200}$, sive ut 1 ad

9.685; sicque diameter Jovis est circiter dimidia diametri annuli Saturni, et est ad ipsius Saturni diametrum ut 5 ad 4. Solis autem diameter vera est circiter decupla diametri Jovis.

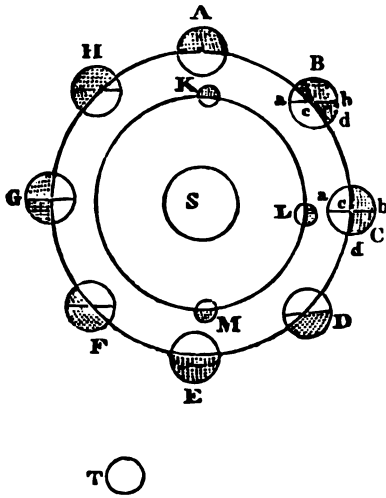
(*) * *Ex eorum phasibus lunaribus.* Si Veneris faciem telescopio contemplemur, in unâ ejus conjunctione cum Sole, plenâ facie fulgere cernitur, deinde phasibus habere lunari-



bus simillimas partemque illuminatam Soli constanter obvertere videtur. Dum verò ad alteram conjunctionem cum Sole pervenit, tenebris obvolvitur, et nonnunquam per discum Solis

dimidiatâ e regione solis; falcatâ cis Solem, per discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Martis quoque plenâ facie prope Solis conjunctionem, et gibbosâ in quadraturis, certum est, quod is Solem ambit. De Jove etiam et Saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur: hos enim luce a Sole mutuâ splendere ex umbris satellitum in ipsos projectis manifestum est.

ad modum maculæ nigræ et rotundæ transit, nunquam verò Soli opponitur, neque ab eo digreditur ultra gradus 47. Eadem ferè de Mercurio observantur quantum licet per ejus



exiguitatem, cum hoc tamen discrimine quod ejus elongationes maximæ a Sole 28 gradus nunquam superent. Sunt igitur Venus et Mercurius corpora opaca et rotunda quorum pars circiter dimidia Soli obversa illustratur, et pars altera a Sole aversa lumine privatur. Undè cum Venus et Mercurius in unâ conjunctione in E vel M hemisphærium obscurum Telluri T obvertant, hemisphærium verò illustratum Soli S, necesse est ut in illâ conjunctione inter Solem et Tellurem constituantur; e contrâ ubi in alterâ proximè sequenti conjunctione in A vel K versantur, totam faciem illustratam et Soli obversam e Tellure T, observamus, hinc necesse est ut tunc temporis Sol S, inter ipsos atquè Tellurem T positus sit. Ubi verò Venus aut Mercurius a Sole digreditur, primum gibbosa apparet, tum dimidiatâ facie lucet, postea falcata fit et deni-

que tota obscuratur ut in locis B, C, D, F, et contrariâ ratione splendescere in locis, F, G, H, videtur. Si verò ex Tellure T, ad Veneris centrum ducatur linea recta ad quam ducatur planum perpendiculare a b, per centrum Veneris transiens, ea pars tantum apparet quæ est inter planum a c, et planum c d, undè cum projectio plani C c d, sit ellipsoïdis, hinc gibbosa apparet planetæ pars visa in B, in C dimidiatâ, et in D, falcata, &c., quia a puncto A, conjunctionis superioris cum Sole, elongatio seu angulus A T B, crescit usque ad situm C e regione Solis, ubi digressio maxima est et deinde decrescit in D, atque evanescit in E, ac postea rursum crescit usque ad G, ac deinde decrescit et denique rursus evanescit in A. Evidens ergò est quod Venus et Mercurius circâ Solem revolvantur in orbitis quæ Tellurem excludunt. Jam cum maximæ elongationes Veneris a Sole majores sint elongationibus Mercurii, necesse est ut orbita Veneris orbitam Mercurii complectatur.

Mars, Jupiter et Saturnus Soli S oppositi, e Tellure M in E plenâ facie lucentes conspicuntur, ideòque Tellus tunc temporis inter Solem et planetas illos collocatur. At verò in conjunctione ut in A, iidem planetæ pleno orbe fulgent, proindeque partem illustratam Soli ac Terræ obvertentes, sunt ultra Solem positi; deinde verò digrediuntur a Sole, et Mars quidem in quadrato cum Sole aspectu ut in C, aliquantulum gibbosa apparet, quod hemisphærium ipsius illustratum et Soli obversum non posset totum Terræ sensibilibiter obverti, quia non satis magnus est ejus a Tellure distantia. At Jupiter et Saturnus cum longius a Sole et Tellure distent, hemisphærium illuminatum Soli ac Telluri semper obvertunt sensibilibiter; nam cum (ex ob.) Mars Jovem, et Jupiter Saturnum nonnunquam tegant, necesse est ut orbita Saturni orbitam Jovis, et hæc orbitam Martis complectatur, tres verò orbitæ illæ Terram et Solem ambiunt. Quia verò diametri apparentes planetarum superiorum multò minores videntur in oppositionibus quàm in conjunctionibus planetarum, et distantie a Terrâ sunt ut diametri apparentes inversè, necesse est ut orbitæ Martis, Jovis et Saturni sint Telluri admodum excentricæ.

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, et vel Solis circa Terram vel Terræ circa Solem tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquuplicatâ mediocrium distantiarum a Sole.

Hæc a Keplero inventa ratio in confesso est apud omnes. (¹) Eadem utique sunt tempora periodica, eademque orbium dimensiones, sive Sol circa Terram, sive Terra circa Solem revolvatur. Ac de mensurâ quidem temporum periodicorum convenit inter astronomos universos. Magnitudines autem orbium Keplerus et Bullialdus omnium diligentissimè ex observationibus determinaverunt: et distantie mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non differunt sensibiliter a distantis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermediæ; uti in tabulâ sequente videre licet.

Planetarum ac Telluris tempora periodica circa Solem respectu fixarum, in diebus et partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♂	♀	♁
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

(¹) 58. * Eadem utique sunt tempora periodica. Tempora periodica planetarum circa Solem hoc modo possunt inveniri. Observentur planetarum oppositiones et conjunctiones cum Sole, tunc enim planeta e Sole videtur in loco qui oppositus est loco Solis e Terrâ visi, undè e Sole loco datur planetæ locus in cælo. Jam verò observatis pluribus oppositionibus cum temporum intervallis inter singulas oppositiones interceptis, datur tempus quo planeta circa Solem motu vero describit angulos ad Solem inter oppositiones contentos, et per regulam proportionis habetur tempus quo planeta 360 gradus seu revolutionem unam absolvit. Tempore periodico ita crassè determinato, habetur numerus revolutionum planetæ tempore mens longo peractarum. Si autem capiantur duæ oppositiones valdè dissitæ iisque addatur arcus necessarius ut planeta ac idem orbitæ suæ punctum redeat, totumque tempus dividatur per numerum revolutionum, habebitur tempus periodicum accuratius, supponendo quod aphelia planetæ non aliter moveantur quàm fixæ. Sufficit verò in his Newtoni phenomenis ut hæc tempora, neglectis minutis, desiniantur.

Potest etiam tempus periodicum determinari per observationes latitudinum planetæ. Nam dum latitudo nulla est, planeta versatur in

plano eclipticæ, seu in nodo orbitæ suæ; invenitur autem tempus, ubi latitudo nulla est, observando illam antequam nulla sit et ubi decrescit, aut postquam nulla fuit et ubi crescit, atque per regulam proportionis ex incrementis vel decrementis, determinatur tempus, quando nulla fuit. Si itaque observetur hoc modo tempus elapsum inter appulsum planetæ ad nodum, et reditum ejusdem ad eundem nodum, hoc erit tempus periodicum planetæ; constat enim planetarum nodos vix in unâ revolutione planetæ moveri.

59. Longitudo ac latitudo planetæ observari possunt (per not. 17. 18. 20.) et indè determinatur tempus syzgiarum, cum videlicet longitudo planetæ non differt a longitudine Solis quo tempore fit conjunctio, vel differt semicirculo ut in oppositione. Quod Mercurium spectat, determinatur ipsius conjunctio inferior cum Sole per ipsius transitum in diaco Solis qui vicibus octo observatus fuit, dum transitus Veneris semel tantum visus est, in his verò non supponitur Telluris motus nec quies. Determinato tempore periodico planetæ, habetur motus ejus medius in orbitâ, et ex observatis pluribus locis planetæ e Sole visis per oppositiones vel conjunctiones aut per digressiones, dantur etiam ipsius motus veri, ac proinde dantur differentie inter motus veros et motus medios. Indè verò

Planetarum ac Telluris distantiae ^() mediocres a Sole.*

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	δ	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
Secundum Keplerum	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum Bullialdum	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710.

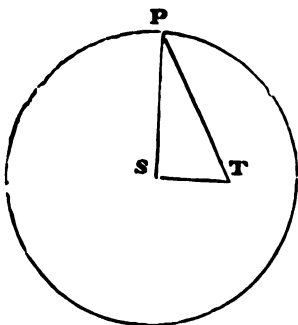
(¹) De distantiiis Mercurii et Veneris a Sole disputandi non est locus, cùm hæ per eorum elongationes a Sole determinantur. De distantiiis etiam superiorum planetarum a Sole tollitur omnis disputatio per eclipses

determinantur aphelia et perihelia planetarum cum ipsorum excentricitate, atque construi possunt tabulæ per quas tempore quolibet inveniri potest eorum locus in propriâ orbitâ. Quæ omnia quomodò ex observationibus determinari possint independentè ab hypothæis, Tom. I. Element. Astronom. exposuit celeberrimus Cassinus.

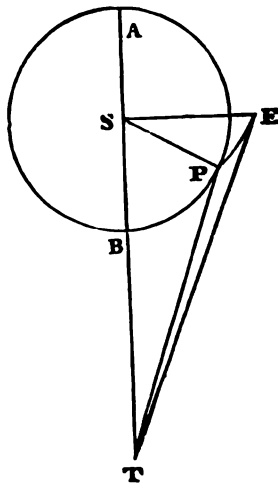
(²) 60. * *Distantiæ mediocres a Sole.* Planetarum distantia a Sole per observationes possunt definiri. Hic autem non quærentur absolutæ distantia planetarum a Sole, sed solummodò rationes illarum distantiarum ad distantias Solis a Tellure. Itaque sit Sol in S, Terra quiescens vel mota in T, planeta in P, observetur locus planetæ in cælo, et per theoriâ Solis, dabitur locus Solis tempore observationis seu positio

planetæ a Sole ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ. Negligimus autem minutias quæ ex inclinatione orbium planetarum ad eclipticam oriri possunt, et præterea observationes possunt fieri dum planeta est propè nodos, ubi fere in plano eclipticæ versatur.

(³) 61. * *De distantiiis Mercurii et Veneris.* Sit A B P orbita Veneris, S Sol, Terra T, Venus P in maximâ suâ elongatione. Quia orbita Veneris est fere circularis, linea T P tanget orbitam in P, idèoque angulus S P T,



lineæ T S, undè datur angulus S T P. Quæritur etiam locus planetæ P, in propriâ orbitâ per theoriâ planetæ, et quia datur locus Terræ T a Sole visus atque locus planetæ P, dabitur angulus P S T. In triangulo igitur P S T, dantur tres anguli, ac proinde datur etiam ratio laterum P S et S T; sed, per theoriâ Solis, datur ratio S T ad mediam distantiam Solis a Terrâ, et per theoriâ planetæ P, datur ratio distantia S P, ad mediam distantiam planetæ a Sole, ergò dabitur ratio distantia mediocri



rectus. Undè est ut sinus totus ad sinum elongationis maximæ seu anguli observati S T P, ita distantia Solis a Terrâ S T ad distantiam S P, Veneris a Sole. Supponitur autem orbita circularis, quia Venus nunquam digreditur a Sole ultra 4° 30' et ejus elongationes maximæ nunquam minores sunt gradibus 45° 30'. Quare angulus S P T est fere rectus. Si verò considerare velimus inclinationem orbitæ Veneris, sit

satellitum Jovis. (7) Etenim per eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, et eo nomine habetur Jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ et geocentricâ inter se collatis determinatur distantia Jovis.

PHÆNOMENON V.

Planetæ primarios, radiis ad Terram ductis, areas describere temporibus minime proportionales; at radiis ad Solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

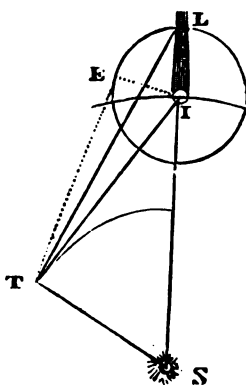
Nam respectu Terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis respectu semper progrediuntur, idque pro-

latitudo Veneris ex Tellure observata PTE , e Sole via PSE , E punctum in eclipticâ, erit ut PS ad PT , ita tangens latitudinis PTE , ad tangentem latitudinis PSE . Nam ob angulos EPT et EPS rectos, est PT ad PE ut sinus totus ad tangentem anguli PTE ; et similiter PS ad PE ut sinus totus ad tangentem anguli PSE , ideoque ut PS ad PT , ita tangens anguli PTE ad tangentem anguli PSE , quare dabitur angulus iste cum recto EPS , et ideo erit SP ad SE ut sinus anguli SEP , complementi PSE ad rectum ad sinum anguli PSE , dabitur ergo SE , seu ratio ejus ad ST , sicque observatis variis distantis SP , dabitur mediocris; quia verò datur ratio ST ad mediocrem distantiam Solis a Terrâ tempore observationis, dabitur ratio distantie mediocris Veneris ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ. Mercurii distantie a Terrâ determinantur etiam per elongationes ejus maximas a Sole, sed quia orbita Mercurii est admodum excentrica, si Mercurius fit in P , in maximâ digressionem, per observationem notus sit oportet angulus STP et per theorum motuum Mercurii angulus PST unde deducetur angulus TPS , quia angulus ille rectus non est, unde tandem cetera determinentur ut in Venere, neglectis minutis.

(7) 62. * Etenim per eclipses Jovis determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, et eo nomine habetur Jovis longitudo heliocentrica.

* Sit S Sol; T Terra; I Jupiter; L Satelles ejus per medium umbræ IL transiens: ex Terrâ T observetur in partibus semi-diametri Jovis, distantia centri Jovis a satelite in umbram sese immergente et ex eâ emergente, medium inter eas distantias erit distantia a centro Jovis ad satellitem in medio umbræ immersum in partibus semi-diametri Jovis, eadem distantia in minutis et secundis observari poterit, eritque mensura anguli ITL ; ducatur TE tangens

ad orbitam satellitis, et IE quæ erit in ET perpendicularis, quia cognoscitur ratio maximæ elongationis hujus satellitis ad semi-diametrum Jovis, et hic habetur in secundis semi-diameter



Jovis habebitur in secundis angulus ITE sub quo apparere deberet linea IE , si satelles foret in maximâ suâ elongatione eo temporis momento; sed ex trigonometricis, est sinus anguli ITE , ad sinum totum sive sinum anguli E , ut est IE ad TI , rursus in triangulo TEL est IL (sive IE ipsa equalis) ad TI ut sinus anguli observati ITL ad sinum anguli TLI ; itaque ut sinus anguli ITE ad sinum totum, ita sinus anguli ITL ad sinum anguli TLI sive TLS ; unde in triangulo TLS , cognito per observationem angulo STL et invento ut indicatum est, angulo TLS , habetur angulus TSI , qui additus vel detractus e longitudine heliocentricâ Terræ dat Jovis heliocentricam longitudinem. Q. e. i.

pemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in periheliis ac tardius in apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est astronomis notissima, (*) et in Jove apprimè demonstratur per eclipses satellitum, quibus eclipsibus heliocentricas planetæ hujus longitudes et distantias a Sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum a vi Solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce phænomenis negligo.

(*) *Et in Jove apprimè demonstratur.* Nam Solem, et orbita ipsa describi potest; undè per eclipses satellitum determinatur locus Jovis quemadmodum de Sole diximus (48) patet a Sole visus ejusque a Sole distantia, et ideò Jovem describere aream temporibus proportionales circa Solem. collatis plurium eclipsium observationibus, habetur motus verus Jovis in propriâ orbitâ circa

P R O P O S I T I O N E S.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis et in orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis, et esse reciproce ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

PATET pars prior propositionis per phænomenon primum, et propositionem secundam vel tertiam libri primi: et pars posterior per phænomenon primum, et corollarium sextum propositionis quartæ ejusdem libri.

Idem intellige de planetis qui Saturnum comitantur, per phænomenon secundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus planetæ primarii perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, et in orbibus suis retinentur, respicere Solem, et esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior propositionis per phænomenon quintum, et propositionem secundam libri primi: et pars posterior per phænomenon quartum, et propositionem quartam ejusdem libri. Accuratissimè autem demonstratur hæc pars propositionis (*) per quietem apheliorum. Nam

(*) * *Per quietem apheliorum.* * Astronomi motus coelestes calculant referendo astra ad eclipticam, cujus initium per intersectionem æquatoris et eclipticæ determinatur; sed illud initium fixum non est, et propter axis Terræ nutationem intersectio illa in antecedentia fertur 51 circiter secundis singulo anno, hinc fixæ totidem secundis progredi videntur. Aphelia planetarum etiam progredi videntur respectu ejus initii eclipticæ, progreditur ergo singulo anno.

Aphelium Terræ	- - -	62".
Saturni	- - -	78".
Jovis	- - -	57".
Martis	- - -	78".
Veneris	- - -	86".
Mercurii	- - -	80".

Sed multum abest quàm ut ille apheliorum motus, certissime determinetur, et uniformis esse deprehendatur, ex observationibus motûs aphelii Terræ nunc plus procedere quàm 50" nunc minus deprehenditur, unde quidam astronomi nunc alium esse ejus motum præter motum ipsius initii eclipticæ censent. Pariter ex observationibus aphelii Saturni, ejus motus irregularis videretur, aliquando accelerari, aliquando retrocedere, ex gratia, ab anno 1694 ad finem anni 1708, minutis ferè 33 retrocessisse testatur Cassinus. Aphelium Jovis ad motum fixarum proximè accedere videtur, &c. Unde constat, aphelia quamproximè quiescere, et eam quantitatem exiguam motûs ipsius assignati quæ excedit motum fixarum, forte observationum erroribus deberi,

aberratio quàm minima a ratione duplicatâ (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) motum apsidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Vim, quâ Luna retinetur in orbe suo, respicere Terram, et esse reciprocè ut quadratum distantiae locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior per phænomenon sextum, et propositionem secundam vel tertiam libri primi: et pars posterior per motum tardissimum lunaris apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium et minutorum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) quod si distantia Lunæ a centro Terræ sit ad semidiametrum Terræ ut D ad 1; vis a quâ motus talis oriatur sit reciprocè ut $D^2 \frac{4}{3}$, id est, reciprocè ut ea ipsius D dignitas cujus index est $2 \frac{4}{3}$, hoc est, in ratione distantiae paulo majore quàm duplicatâ inversè, sed quæ partibus $59 \frac{1}{3}$ proprius ad duplicatam quàm ad triplicatam accedit. Oritur verò ab actione Solis (ut posthac dicetur) et propterea hic negligendus est. (b) Actio Solis quâtenus Lunam distrahit a Terrâ, (c) est ut distantia Lunæ a Terrâ quamproximè;

forte actioni mutus vicinorum planetarum inter se; sic cùm anno 1703 Saturnus et Jupiter conjuncti fuerint, et cùm nonnisi quinque annis nonaginta gradibus a se mutuo discedant, patet quod ab anno 1698 ad annum 1708 Jupiter inter Solem et Saturnum erat versatus, ejusque actio in Saturnum adjuncta fuerat actioni Solis in Saturnum; posito autem quod reverà vis Solis in Saturnum decreseat secundum quadrata distantiarum, et Jovis interpositione vim qualemcumque illi addi quæ X dicatur, ex Propositione XLV. primi Libri habebitur angulum apsidis

imæ cum summâ esse 180° . $\sqrt{\frac{1+X}{1+3X}}$ sed

$\frac{1+X}{1+3X}$ est fractio ideòque ille angulus est

minor 180° . regreditur itaque apsis ex his hypothesebus planè ut observatione constat: unde non obscurè colligitur apheliorum fixarum respectu quies (semotis his accidentalibus causis) ac per consequens quod vires quibus planetæ ad Solem retrahuntur, sunt in duplicatâ distantiarum ratione accuratè, siquidem si vel unâ sexagesimâ parte accederet ratio a duplicatâ ad triplicatam, apsidēs tribus ad minimum gradibus progredirentur, ut demonstratum fuit in fine primi Coroll. Prop. 45^a. Lib. I.

(b) * Actio Solis quâtenus Lunam distrahit a Terrâ. * Motus apogæi lunaris uniformis non est, sed aliquando procedit, aliquando recedit, aliquando quiescit, sed ita ut omnibus compensatis progrediatur, et octo aut novem annis 360. gr. percurrerit; pariter et actio Solis quâ Lunam distrahit a Terrâ non est continua, actio Solis Lunam a Terrâ distrahit dum Luna a syzygiâ non plus quàm 55. gradibus hinc inde discessit, circa quadraturas verò actio Solis cum Terræ attractione consentit, Lunamque ad Terram attrahit, sed tunc et debilior est et per pauciores gradus agit, quàm circa syzygiâ, hinc effectus qui resultat pendet ex actione Solis quâ Luna distrahitur. (Lib. I. Prop. LXVI. Cor. 6. 7. 8. cum notis.)

(c) * Est ut distantia Lunæ a Terrâ quamproximè. * Propter motum Telluris cum Lunâ circa Solem, omnia puncta lunaris orbitæ successivè obvertuntur Soli, et versantur in syzygiâ, postea verò in quadraturâ, et cùm ea orbita non sit circulus cujus Terra sit centrum, patet puncta syzygiarum et quadraturarum, nunc viciniora nunc remotiora fore Terræ; jam verò vis quâ Sol distrahit Lunam a Terrâ, in syzygiâ, sicut et vis quâ Sol Lunam attrahit Terram versus in quadraturis, crescit secundum distantias Lunæ a Terrâ, in iis autem punctis

(^a) ideòque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. I.) est ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, seu 1 ad 178 $\frac{29}{40}$. Et neglectâ Solis vi tantillâ, vis reliqua quâ Lunâ retinetur in orbe erit reciproce ut D^a. Id quod etiam plenius constabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in propositione sequente.

Corol. ()* Si vis centripeta mediocris quâ Luna retinetur in orbe augeatur primò in ratione 177 $\frac{29}{40}$ ad 178 $\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicatâ semidiametri Terræ ad mediocrem distantiam centri Lunæ a centro Terræ: habebitur vis centripeta lunaris ad superficiem Terræ, posito quod vis illa descendendo ad superficiem Terræ perpetuò augeatur in reciproca altitudinis ratione duplicatâ.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitate in Terram, et vi gravitatis retrahi semper a motu rectilineo, et in orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris a Terrâ in syzygiis est semidiametrorum terrestrium, secundum Ptolemæum et plerosque astronomorum 59, secundum Vendelinum et Hugenum 60, secundum Copernicum 60 $\frac{1}{2}$, secundum

precipua est Solis actio ad apogæum Lunæ movendum, unde effectus resultans pendebit a differentiâ earum actionum quæ erit sicut distantia Lunæ a Terrâ: vel ut melius res concipitur, fingatur orbitam Lunæ cingi undique Solibus æqualiter a Terrâ distantibus, ita ut singulum punctum orbitæ lunaris sit simul in syzygiâ et quadraturâ; cùm actio Solis in syzygia, sicut et actio Solis in quadraturâ, sit ut distantia Lunæ a Terrâ, differentia earum actionum erit etiam ut distantia Lunæ a Terrâ, sed effectus differentie earum actionum erit idem ac id quod resultabit ex translatione dicti puncti per syzygiam et postea per quadraturam: hinc si motus apogæi medius assumatur, is pendebit ab actione quæ erit ut distantia Terræ a Lunâ; addit autem Newtonus quàm proximè propter actionem in punctis inter syzygias et quadraturas, sed quæ parum hanc rationem turbant; nam in punctis intermediis ubi actio quâ Luna distrahitur a Terrâ magis recederet ab hac ratione, actiones compositæ sese mutuò destruunt et in punctis a syzygiis aut a quadraturis non remotis actio Solis sequitur proximè easdem rationes ac in ipsis Syzygiis ac quadraturis; hinc actio Solis quatenus Lunam distrahit a Terrâ, est proximè ut distantia Terræ a Lunâ.

(*) * Ideòque per ea quæ dicuntur in Cor. 2. Prop. XLV. Lib. I. * Dicitur in eo Corollario,

quod si ex vi decrescente secundum quadratâ distantiarum auferatur vis quæ crescat secundum ipsas distantias, quæ sit ad priorem ut 1 ad 357.45, motus progressivus apogæi erit 1⁴. 31'. 28" in singulâ revolutione; motus autem progressivus apogæi lunaris est circiter duplo velocior, hinc vis illa ablatitia debet esse ad vim Lunæ centripetam ut 2 ad 357.45 sive ut 1. ad 178.725.

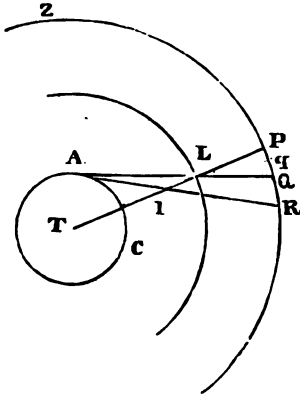
(*) * Si vis centripeta mediocris. Quoniam vis ablatitia Solis est ad vim centripetam Lunæ ut 1 ad 178 $\frac{29}{40}$, si vis ablatitia Solis sit 1, erit vis centripeta Lunæ 178 $\frac{29}{40}$, ideòque detractâ vi ablatitiâ Solis, erit vis Lunæ quâ reverâ retinetur in orbitâ suâ per vim Terræ minutam actione Solis 177 $\frac{29}{40}$. Quare si vis mediocris quâ Luna retinetur in orbe, augeatur in ratione 177 $\frac{29}{40}$ ad 178 $\frac{29}{40}$, obtinebitur vera vis Lunæ centripeta, qualis foret si nulla esset actio Solis. Hinc posito quod vis illa descendendo ad superficiem Terræ perpetuò augeatur in reciproca altitudinis seu distantie a centro Terræ ratione duplicatâ, ut habeatur vis centripeta in superficie Terræ, dicendum est ut quadratum semidiametri Terræ ad quadratum distantie mediocris centri Lunæ a centro Terræ, ita vis centripeta ad quartum, quod erit vis in superficie Terræ.

Streetum $60\frac{1}{2}$, et secundum Tychonem $56\frac{1}{2}$. Ast Tycho, et quotquot ejus tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones Solis et Lunæ (^f) (omnino contra naturam lucis) majores quàm fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, (^g) auxerunt parallaxin Lunæ scrupulis totidem, hoc est, quasi duodecimâ vel decimâ quintâ parte totius parallaxeos. Corrigitur iste error, et (^h) distantia evadet quasi $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium, ferè ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum in syzygiis; et lunarem periodum respectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab astronomis statuitur; atque ambitum Terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti (ⁱ) a Gallis mensurantibus definitum est: et si Luna motu omni privari fingatur ac dimitti, ut urgente vi illâ

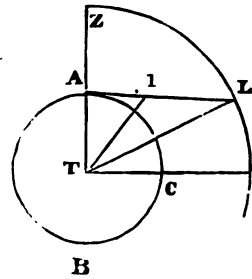
(^f) • Omnino contra naturam lucis (25.).

(^g) • Auxerunt parallaxin Lunæ. Tantùm augeri parallaxim Lunæ quantum augetur refraction, patet si determinetur parallaxis Lunæ, quod ita præstari potest. Sit A C T, Tellus

(^h) • Distantia evadet. Sit T centrum Terræ et angulus A L T parallaxis horizontalis mediocris. Ob angulum L A T rectum, erit semidiameter Terræ A T ad distantiam mediocrem Lunæ a Terrâ T L, ut sinus parallaxeos medio-



cujus centrum T, observetur altitudo meridiana centri Lunæ L ex loco A in Q a refractionibus libera, et ex tabulis eruatur pro tempore observationis longitudo et latitudo Lunæ; deinde (per trigon.) quæraturs ipsius declinatio, habebitur ejus distantia a vertice Z seu locus P e Terræ centro T visus, differentia P Q seu angulus P L Q aut æqualis A L T est parallaxis Lunæ. Porrò ut habeatur locus Q e loco A visus a refractione liber, quoniam refraction auget altitudinem, sit locus visus q, Q q metietur refractionem, undè arcus Q q addendus est arcui P q ut habeatur parallaxis tota P Q; si verò refraction major assumatur ut q R, parallaxis erit major, nempe P R, quasi Luna esset in 1; undè tantum augetur parallaxis quantum refraction ipsa.



cris ad sinum totum. Est autem parallaxis ipsa $58'$ circiter. Jam ducatur T l, sitque angulus A l T $63'$ vel $62'$, ob refractionem malè constitutam, erit T l ad T L ferè ut 58 ad 62 vel 63, ideòque cùm sit juxta Tychonem T l = $56\frac{1}{2}$ semid. Terræ, erit ut 58 ad 62 vel 63 ita $56\frac{1}{2}$ ad $60\frac{1}{2}$ vel $61\frac{1}{2}$. Quare si corrigatur error qui ex refractione malè constitutâ oritur, distantia mediocris Lunæ a Terrâ evadet quasi $60\frac{1}{2}$ semid. terrestri.

(ⁱ) • A Gallis mensurantibus. A Picarto nimirum inventum est gradui circuli-maximi terrestri respondere hexapedas 57060 seu ped. Paris. 342360. Quare inferatur (22) ut numerus graduum arcus distantie duorum locorum ad 360° . seu peripheriam integram, ita idem arcus in milliariibus aut pedibus expressus ad ambitum Telluris in eadem mensurâ inveniendum, sicque definitum est ambitum Telluris esse ped. Paris. 123249600 ejusque proinde diameter est ped. Paris. 39231566.

ad superficiem Terræ major sit partibus 60×60 quàm ad Lunam; corpus vi illâ in regionibus nostris cadendo, describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses $60 \times 60 \times 15\frac{1}{3}$, et spatio minuti unius secundi pedes $15\frac{1}{3}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. et lin. $1\frac{1}{3}$. Et eadem vi gravia reverâ descendunt in Terram. Nam penduli, in latitudine Lutetiæ Parisiorum ad singula minuta secunda oscillantis, longitudo est pedum trium Parisiensium et linearum $8\frac{1}{2}$, ut observavit Hugenius. ⁽¹⁾ Et altitudo, quam grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam Hugenius) ^(m) ideóque est pedum Parisiensium 15. dig. 1. lin. $1\frac{1}{3}$. Et propterea vis quâ Luna in orbe suo retinetur, si descendatur in superficiem Terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideóque (per Reg. 1. et 11.) est illa ipsa vis quam nos gravitatem dicere solemus. Nam si gravitas ab eâ diversa esset, corpora viribus utrisque conjunctis Terram petendo duplo velocius descenderent, et spatio minuti unius secundi cadendo describerent pedes Parisienses $30\frac{1}{2}$: omninò contra experientiam.

⁽ⁿ⁾ Calculus hic fundatur in hypothese quod Terra quiescit. Nam si Terra et Luna moveantur circum Solem, et interea quoque circum com-

⁽¹⁾ * Et altitudo. (471. Lib. I.)

^(m) * Ideóque est ped. Paris. (ibid.)

⁽ⁿ⁾ 64. * Calculus hic fundatur in hypothese quod Terra quiescit. Undecimâ Sectione Libri I. quesivit Newtonus qualis oriretur differentia inter motus corporum attractorum, quando tota vis uni immoto tribuitur, aut quando (sicut res se habet) attractione mutuâ in se agunt, et demonstravit Propositione LVIII. et LIX. Quod si e duobus corporibus se mutuo attrahentibus et circa commune gravitatis centrum ellipses similes describentibus, alterutrum sit nostra sedes, ita ut motum totum alteri tribuamus quod circa nos ellipsim describere videretur; illud eadem vi centripetâ eandem ellipsim circa nos, si immoti reverâ foremus, nonnisi longiori tempore describeret, ita ut tempus quo mutuâ actione gravitatis circa nos motos revolvi videretur, foret ad tempus quo circa nos immotos revolveretur, in ratione subduplicatâ corporis centralis immoti ad summam duorum corporum revolvantium; unde, manente eadem gravitatis lege, ellipsis quæ describeretur circa nos immotos eodem tempore quo describitur ellipsis relativa circa nos motos, minor foret quàm ea ellipsis relativa, et ratio axium invenietur dicendo, quadratum temporis quo hæc ellipsis describitur, sive (ex Hyp.) quadratum temporis quo describitur ellipsis relativa circa nos, est ad quadratum temporis quo ellipsis relativæ ellipsi æqualis circa nos verè immotos describitur, ut cubus

semi-axis ellipseos minoris descriptæ circa corpus immotum ad cubum semi-axis ellipseos majoris descriptæ circa corpus etiam immotum, et quæ ellipsi relativæ est æqualis, sed illa tempora erant in subduplicatâ ratione massæ corporis immoti ad summam massarum duorum corporum, ergo, ut massa corporis immoti ad summam massarum duorum corporum, sic cubus semi-axis ellipseos minoris descriptæ circa corpus immotum ad cubum semi-axis ellipseos majoris reverâ descriptæ; hinc cum hactenus immotam Terram supposuerimus Lunamque revolvantem tempore quo reverâ revolvitur, et semi-axem orbitæ lunaris 60 semi-diametrorum Terræ assumserimus, sitque massa Terræ ad massam Lunæ ut 42. ad 1. erit 42. ad 43. ut cubus 60. ad cubum semi-axeos ejus ellipseos quam (manente eadem gravitatis lege eodemque tempore periodico) Luna relativè describet circa Terram dum ipsa Terra mutuâ Lunæ attractione circa centrum gravitatis commune reverâ revolvitur; ille ergo semi-axis erit $\frac{43 \times 216000}{42}$ cujus radix cubica est 60.47 ferè $60\frac{1}{2}$ ut habet Newtonus.

65. Eodem modo quo Luna in orbitâ suâ revolvitur circâ Tellurem, itâ aliud quodvis grave ex puncto extrâ Telluris superficiem secundum rectam horizontalem satis validè projectum orbitam describeret, et planetæ instar periodum suam compleret (10. Lib. I.). S I

mune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis, distantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri potest per Prop. LX. Lib. I.

Scholium.

Demonstratio Propositionis sic fusius explicari potest. Si Lunæ plures circum Terram revolverentur, perinde ut fit in systemate Saturni vel Jovis; harum tempora periodica (per argumentum inductionis) observarent legem planetarum a Keplero detectam, et propterea harum vires centripetæ forent reciprocæ ut quadrata distantiarum a centro Terræ, per Prop. I. hujus. Et si earum infima esset parva, et vertices altissimorum montium prope tangeret: hujus vis centripeta quâ retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproximè, efficeretque ut eadem lunula, si motu omni quo pergit in orbe suo privaretur, defectu vis centrifugæ quâ in orbe permanserat, descenderet in Terram, idque eadem cum velocitate quâ gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus descendunt. Et si vis illa quâ lunula illa infima descendit, diversa esset a gravitate, et lunula illa etiam gravis esset in Terram more corporum in verticibus montium, eadem lunula vi utrâque conjunctâ duplo velocius descenderet. Quare cum vires utræque, et hæ corporum gravium, et illæ Lunarum, centrum Terræ respiciant, et sint inter se similes et æquales, eadem (per Reg. 1. et 11.) eandem habebunt causam. Et propterea vis illa, quâ Luna retinetur in orbe suo, ea ipsa erit quam nos gravitatem dicere solemus: idque maximè ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplò velocius cadat quàm corpora gravia solent cadere.

quò altius est suprâ Terram punctum illud ex quo grave projicitur, eò minori opus est vi projectili ut projectum in planetam mutetur, et quò humilior est eò majori (ibid.) hoc est, celeritas per vim projectilem impressa erit inversè ut distantia, v. gr. Si Luna eadem celeritate quâ nunc in orbitâ suâ revolvitur juxta Terram, projiceretur secundum directionem horizontalem, circâ Tellurem non giraret, sed terrestrium projectilium more in Terram caderet, antequam per tertiam partem minuti esset mota. Nam arcus quem Luna 20 scrupulis secundis horariis

in suo circulo percurrit est $11''$ si juxta Tellurem accedat et eadem celeritate moveatur, ille arcus erit $11'$; sinus versus arcus $11'$ est $\frac{51}{10.000.000}$ radii, qui radius cum sit pedum 19615783 erit sinus ille versus pedum centum circiter, sed grave prope Terram viginî istis scrupulis secundis cadendo percurrit $20 \times 20 \times 15\frac{1}{2}$, sive 6033 ped. Unde Luna in circulo suo non manebit, sed longè prius in Terram impegerit quàm 20 secunda elapsa fuissent.

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas circumjoviales gravitare in Jovem, circumsaturnios in Saturnum, et circumsolares in Solem, et vi gravitatis suæ retrahi semper a motibus rectilineis, et in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones planetarum circumjovialium circa Jovem, circumsaturniorum circa Saturnum, et Mercurii ac Veneris reliquorumque circumsolarium circa Solem, sunt phaenomena ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram, et propterea (per. Reg. 11.) a causis ejusdem generis dependent: præsertim cum demonstratum sit quod vires, a quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, et recedendo a Jove, Saturno et Sole, decrescant eadem ratione ac lege, quâ vis gravitatis decrescit in recessu a Terrâ.

Corol. 1. (*) Gravitatio igitur datur in planetas universos. Nam Venerem, Mercurium, cæterosque esse corpora ejusdem generis cum Jove et Saturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis per motus legem tertiam mutua sit, Jupiter in satellites suos omnes, Saturnus in suos, Terraque in Lunam, et Sol in planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. (P) Gravitatem, quæ planetam unumquemque respicit, esse reciprocè ut quadratum distantiae locorum ab ipsius centro.

Corol. 3. Graves sunt planetæ omnes in se mutuò per Corol. 1. et 2. (*) Et hinc Jupiter et Saturnus prope conjunctionem se invicem attrahendo, sensibilibus perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus lunares, Sol et Luna perturbant mare nostrum, ut in sequentibus explicabitur.

(*) 66. * Gravitatio igitur datur in planetas universos; * Datur gravitas in Terram et eâ gravitate Luna circa eam revolvitur per Prop. IV.; datur gravitas in Jovem et Saturnum, nam revolutiones planetarum circumjovialium circa Jovem, et circumsaturniorum circa Saturnum sunt ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram, pendent ergo (per Reg. 2.) ex gravitate eorum satellitum in eos planetas; quamvis autem non sint aut non observati sint satellites circa Martem, Venerem et Mercurium, attamen Jovi, Saturno, Terræ in cæteris ita sunt similes ut dubitandi locus non relinquatur quod si satellites juxta ipsos collocarentur, idem

eveniret illis ac Lunæ et circumsaturniis aut circumjovialibus, unde sequitur gravitatem etiam dari in illos planetas. Postea propter mutuam attractionem, Terram esse gravem in Lunam, &c. constabit.

(P) * Corol. 2. Patet (ex Reg. 1. et Prop. I.).

(*) * Et hinc Jupiter. Hæc mutua planetarum perturbatio, ut potè cum sequentibus Propositionibus conjuncta, deinceps convenientius explicabitur, * sufficiant in præsentiarum quæ de eâ superius dictum est, occasione quietis apheliorum, vide notam * ad Prop. II.

Scholium.

Hactenus vim illam quâ corpora cœlestia in orbibus suis retinentur, centripetam appellavimus. Eandem jam gravitatem esse constat, et propterea gravitatem in posterum vocabimus. Nam causa vis illius centripetæ, quâ Luna retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per Reg. 1. 2. et 4.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in planetas singulos gravitare, et pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus distantis a centro planetæ, proportionalia esse quantitati materiæ in singulis.

(^r) Descensus gravium omnium in Terram (demptâ saltem inæquali retardatione quæ ex aëris perexiguâ resistantiâ oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum observarunt alii; et accuratissimè quidem notare licet æqualitatem temporum in pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arenâ, sale communi, ligno, aquâ, tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas et æquales. Unam implebam ligno, et idem auri pondus suspendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oscillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, constituebant pendula; quoad pondus, figuram, et aëris resistantiam omnino paria: et paribus oscillationibus, juxta positæ, ibant unâ et redibant diutissimè. (^s) Proinde copia materiæ in auro (per Corol. 1. et 6. Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejusdem actionem in totum lignum; hoc est, ut pondus ad pondus. Et sic in cæteris. In corporibus ejusdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor esset quàm pars millesima materiæ totius, his experimentis manifestò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in planetas eandem esse atque in Terram, non est dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terrestria ad usque orbem Lunæ, et unâ cum

(^r) • *Descensus gravium omnium* (3. Lib. I.). rectè. Sed pondus comparativum est actio vis motricis (per Cor. 6. Prop. XX. Lib. II.).
 (^s) • *Proinde copia materiæ*. Quantitas materiæ in medio non resistente est ut pondus comparativum et quadratum temporis directè et longitudo penduli inversè (per Cor. 6. Prop. XXIV. Lib. II.) ideòque datis tempore et longitudo penduli, ut pondus comparativum di-

rectè. Sed pondus comparativum est actio vis motricis (per Cor. 6. Prop. XX. Lib. II.). Ergò copia materiæ in auro erat ad copiam materiæ in ligno ut vis motricis actio in totum aurum ad ejusdem actionem in lignum, hoc est, (per Cor. 1. Prop. XXIV. Lib. II.) ut pondus ad pondus.

Lunâ motu omni privata demitti, ut in Terram simul cadant; et (*) per jam ante ostensa certum est quod temporibus æqualibus describerent æqualia spatia cum Lunâ; ideóque quod sunt ad quantitatem materiæ in Lunâ, ut pondera sua ad ipsius pondus. Porro quoniam satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquuplicatâ distantiarum a centro Jovis, (†) erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciproce ut quadrata distantiarum a centro Jovis; et propterea in æqualibus a Jove distantibus, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, describerent æqualia spatia; perinde ut fit in gravibus in hac Terrâ nostrâ. (‡) Et eodem argumento planetæ circumsolares, ab æqualibus a Sole distantibus demissi, descensu suo in Solem æqualibus temporibus æqualia spatia describerent. (¶) Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, sunt ut corpora; hoc est, pondera ut quantitates materiæ in planetis. Porro Jovis et ejus satellitum pondera in Solem, proportionalia esse quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu satellitum quam maximè regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam si horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ suæ, quàm cæteri: motus satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus a Sole distantibus, satelles aliquis gravior esset in Solem pro quantitate materiæ suæ, quàm Jupiter pro quantitate materiæ suæ, in ratione quâcunque datâ, puta d ad e: distantia inter centrum Solis et centrum orbis satellitis, major semper foret quàm distantia inter centrum Solis et centrum Jovis in ratione subduplicatâ quàm proximè; (§) uti calculo quodam inito inveni. Et si satelles minus gravis esset in Solem in ratione illâ d ad e, distantia centri orbis

(*) * Per jam ante ostensa (Prop. IV. Lib. hujus).

(†) * Erunt eorum gravitates acceleratrices. (Per Corol. 2. Prop. V.).

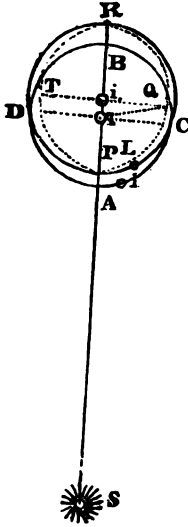
(‡) * Et eodem argumento. Gravitates acceleratrices planetarum in Solem sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro Solis (Corol. 2. Prop. V.) et propterea in æqualibus a Sole distantibus eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales, proindeque temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo describerent spatia æqualia. Quanto autem tempore planeta quilibet circumsolaris omni motu revolutionis privatus solâ vi centripetâ descenderet et ad Solem usque perveniret ex datâ ejus a Sole distantia innotescit per not. 401. Lib. I. dimidio scilicet temporis periodici quo planeta ad distantiam duplò minorem revolvitur, sive tempore quod est ad

tempus periodicum planetæ ut 1 ad $4\sqrt{2}$, idem planeta cadendo Solem attingeret.

(¶) * Vires autem quibus corpora inæqualia. (Def. VIII. et not. 15. Lib. I.)

(§) * Uti calculo quodam inito inveni. * Sit S Sol, I Jupiter, L satelles gravior in Solem quàm Jupiter paribus in distantibus in ratione d ad e, fiat S I ad S I sicut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ et quoniam gravitas est inversè ut quadrata distantiarum, gravitas in Solem ad distantiam S I erit ad gravitatem in Solem ad distantiam S I ut d ad e; unde si gravitas Jovis in I positi sit ut e, et gravitas satellitis gravioris in L etiam positi sit ut d. ejusdem satellitis gravitas in I positi erit ut e, quare erit æqualis gravitati Jovis in I positi: fingatur satelles I qui Jove nec gravior nec levior sit, qui circa Jovem I circulum describat A C P D. et

figatur in *i* corpus centrale Jovi simile, circa quod, semotâ Solis actione, satelles gravior *L* describere poterit orbitam *PQR* *T* priori *ACBD* æqualem; restitatur Solis actio, actio ejus in utrumque satellitem erit æqualis in similibus orbitalium punctis; nam propter ingentem puncti *S* distantiam erit *SA* ad *SP*, et *SB* ad *SR* ut *SI* ad *Si*, ideóque ut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ gravitates in eis punctis forent ut *d* ad *e*, ideóque si



satellites forent æque graves, paribus in distantiiis gravitates in eis punctis forent ut *d* ad *e*, sed quia gravitas satellitis *I* est ad gravitatem satellitis *L* ut *e* ad *d*, compensatur discrimen gravitatis ex distantia ortum per discrimen gravitatis ex hypothesi constitutum: mutatio autem quæ ex actione Solis oritur in orbitam satellitis relatâ ad ejus primarium pendet ex discrimine actionis Solis in satellitem et in primarium, hoc est in oppositione pendet ex residuo actionis Solis in primarium demptâ actione Solis in satellitem; et in conjunctione ea mutatio pendet ex residuo actionis Solis in satellitem demptâ Solis actione in primarium: cum ergo actio Solis in satellites *L* et *I*, sit eadem; sed actio Solis in primarium *I* fit minor quàm in primarium *L*, in oppositione minus est residuum quod mutationem pariet in orbita satellitis *L*, quàm residuum quod mutationem satellitis *I* parit in orbitâ, et majus e contra est residuum in conjunctione respectu orbitæ satellitis *L* quàm respectu orbitæ satellitis *I*; sed illa residua tam in oppositione quàm in conjunctione vim centripetam minuunt; ergo vis centripeta major manet in *R* quàm in *B*, et minor e contra in *P* quàm in *A*, unde patet quod ut restitatur similitudo inter orbitam satellitis *L*, et orbitam satellitis *I* corpus

centrale debeat removeri a puncto *R* et accedere versus *P*, hoc est transferri ex *i* versus *I*; ita ut centrum orbitæ satellitis *L* remotius esse debeat a Sole quàm ipsius corpus centrale.

Jam verò dico illud corpus centrale ad *I* transferri debere, nam sit corpus centrale in *I*, semotâ Solis actione, satelles *L* eodem tempore periodico ac prius describet ellipsim cujus centrum *i*, focus verò *I* et axis major *RP*, (per Cor. Prop. XV. Lib. I.) et in mediocri suâ distantia *IQ* (Cor. 4. Prop. XVI. Lib. I.) velocitatem eandem habebit quam habet satelles *I* in suo circulo, qualem *v. gr.* habet in *C* ubi velocitatum illarum directiones sunt parallelæ tam inter se quàm diametro *RP*, et ob distantiarum *IQ* et *IC* æqualitatem vires centrales sunt æquales directionis obliquitate paulum differentes: addatur jam actio Solis, et cum sit *SQ* ad *SC* ut *SI* ad *SI* actiones illæ Solis (ex Hyp. et demonstratis) in satellites diversæ gravitatis, sed positos in *Q* et *C* erunt etiam æquales; movebitur ergo satelles *L* in mediocribus distantiiis *Q* et *T* ut satelles *I* movetur in *C* et *D* quam proximè, tam ratione corporis centralis *I* quàm etiam ex adjuncta actione Solis, mutationes verò ex Solis pendentes in *A* et *P*, et in *R* et *B* æquales sunt, quia sunt differentia ejusdem vis Solis in *I* et virium Solis in *A* et *P*, ut et virium Solis in *R* et *P*, vires autem in *A* et *P* sunt æquales ex Hyp. et dem. ut et in *R* et *B*. Unde cum vis primarii magna censenda sit respectu vis *S*; rationes virium centripetarum residuarum in *P* et *A*, *B* et *R* manent inter se in eadem ratione ac si nulla foret actio Solis, et ut semotâ actione Solis curvas suas iisdem temporibus describere faciebant, celeritate quidem majori in *P*, minori in *R*, media verò in *A* et *B*, itaque eadem proximè iis in punctis manebit ratio descriptionis curvarum; cum ergo demonstratum sit quod in punctis *PQR* *T*, *ACBD* actio Solis non turbet relationem quæ intercedit inter modum quo curvæ illæ *PQR* *T*, *ACBD* describuntur, cum virium rationes eandem maneant ac prius quamproximè, idem etiam de punctis intermediis erit intelligendum. Unde sequitur quod satelles *L* in orbitâ *PQR* *T* revolvi poterit eodem tempore iisdemque proximè legibus ac satelles *L* in orbitâ suâ *ACBD*, si gravior sit Jove paribus in distantiiis in ratione duplicatâ distantie Solis a centro suæ orbitæ ad distantiam Solis ab ipso Jove. *Q. e. d.*

Eandem demonstrationem applicari posse ad casum ubi satelles supponeretur levior Jove paribus in distantiiis, illumque tunc descripturum ellipsim cujus centrum Sole vicinius erit quàm Jupiter, ita ut sit gravitas satellitis ad gravitatem Jovis in duplicatâ ratione distantie Solis a centro orbitæ ad distantiam Solis a Jove. *Q. alterum e. d.*

Hæc ratione satis constare assertum Newtoni credimus, idem tamen aliter *instituto calculo* magis ad mentem Newtoni demonstrari posse non negamus; sed ratio eum calculum ineundi, ex iis quæ postea de motibus lunaribus dicentur, erit deducenda.

satellitit a Sole minor foret quàm distantia centri Jovis a Sole in ratione illâ subduplicatâ. Ideoque si in æqualibus a Sole distantiis, gravitas acceleratrix satellitit cujusvis in Solem major esset vel minor quàm gravitas acceleratrix Jovis in Solem; parte tantum millesimâ gravitatis totius, foret distantia centri orbis satellitit a Sole major vel minor quàm distantia Jovis a Sole (*) parte $\frac{1}{2000}$ distantie totius, id est, parte quintâ distantie satellitit extimi a centro Jovis: quæ quidem orbis eccentricitas foret valde sensibilis. Sed orbis satellitum sunt Jovi concentrici, et propterea gravitates acceleratrices Jovis et satellitum in Solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondera Saturni et comitum ejus in Solem, in æqualibus a Sole distantiis, sunt ut quantitates materie in ipsis: et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla sunt, vel earum massis accuratè proportionalia. Aliqua autem sunt per Corol. 1. et 3. Prop. V.

Quinetiam pondera partium singularum planetæ cujusque in alium quemcunque sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quàm pro quantitate materie, planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minus quàm pro quantitate materie totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si, verbi gratiâ, corpora terrestria, quæ apud nos sunt, in orbem Lunæ elevari fingantur, et conferantur cum corpore Lunæ: si horum pondera essent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materie in iisdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad

(*) * Parte $\frac{1}{2000}$ distantie totius. Gravitas acceleratrix Jovis sit 1, erit (per Hyp.) gravitas acceleratrix satellitit $1 + \frac{1}{1000}$ sed (ex dem.)

distantia inter centrum Solis et centrum orbis satellitit major est quàm distantia inter centrum Solis et centrum Jovis in ratione illâ subduplicatâ quam proximè, hoc est, ut 1,

ad $\sqrt{1 + \frac{1}{1000}}$. Quare utriusque distantie

differentia est $\sqrt{1 + \frac{1}{1000}} - 1$ seu $\sqrt{\frac{1001}{1000}}$

$- 1 = \sqrt{1.001} - 1 = 1.0004998$, &c. $- 1$

$= .0004998$, &c. sive $= \frac{5}{10000} = \frac{1}{2000}$ ideò-

que distantia centri orbis satellitit a Sole major erit quàm distantia Jovis a Sole parte $\frac{1}{2000}$ distantie totius, id est parte quintâ distantie satellitit extimi a centro Jovis.

* Nam est diameter Jovis circiter decima pars

diametri Solis, ut supra indicavimus, sive ut 997 ad 10.000, distantia extimi satellitit est 26.63 semi-diametrorum Jovis, ergo ea distantia semi-diametros Solis continebit 2.663 aut accuratius 2.655.

Solis semi-diameter mediocris e Terrâ visus, secundum Cassini Tabulas, est 16' 3" vel 16' 4". Jam verò in triangulo rectangulo cujus angulus verticis est 16' 4" altitudo continet basim 213.96 vicibus; ergo inter Solem et Terram intervallum est quod Solis semi-diametros 213.96 contineret, sive proximè, Solis diametros 107.

Jovis autem distantia mediocris a Sole est ad distantiam medietatem Terræ a Sole, ut 52 ad 10, ergo ea continebit semi-diametros Solis 1112.592, ejus numeri bis millesima pars est .556296 quæ est excentricitas Jovis si satelles sit Jove 1000^A. parte gravior vel levior paribus in distantiis, ille verò numerus .556296 est quinta pars numeri 2.78148 paulò majoris quàm 2.655 sed distantia extimi satellitit a Jove continebat Solis semi-diametros 2.655; ergo excentricitas Jovis si satelles sit Jove 1000^A. parte gravior vel levior paribus in distantiis, est ad minimum quinta pars distantie satellitit extimi a Jove. Q. e. d.

pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam supra ostensum est.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis et texturis. Nam si cum formis variari possent, forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materiâ: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora universa, quæ circa Terram sunt, gravia sunt in Terram; et pondera omnium, quæ æqualiter a centro Terræ distant, sunt ut quantitates materiæ in iisdem. Hæc est qualitas omnium in quibus experimenta instituere licet, et propterea per Reg. 3. de universis affirmanda est. Si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino destitueretur, vel pro quantitate materiæ suæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente Aristotelis, Cartesii et aliorum) non differt ab aliis corporibus nisi in formâ materiæ, posset idem per mutationem formæ gradatim transmutari in corpus ejusdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, et vicissim corpora maximè gravia, formam illius gradatim induendo, possent gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent a formis corporum, possetque cum formis variari, contra quam probatum est in Corollario superiore.

Corol. 3. Spatia omnia non sunt æqualiter plena. Nam si spatia omnia æqualiter plena essent, gravitas specifica fluidi quo regio aëris impleretur, ob summam densitatem materiæ, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi; et propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aëre descendere posset. Nam corpora in fluidis, nisi specificè graviora sint, minimè descendunt. Quod si quantitas materiæ in spatio dato per rarefactionem quamcunque diminui possit, quidni diminui possit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ solidæ sint ejusdem densitatis, neque sine poris rarefieri possint, (*) vacuum datur. Ejusdem densitatis esse dico, (*) quarum vires inertię sunt ut magnitudines.

Corol. 5. (b) Vis gravitatis diversi est generis a vi magneticâ. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis

(*) * *Vacuum datur.* Quibus responsionibus hoc Newtoni ratiocinium effugiant Cartesiani, jam diximus (Lib. II. num. 187).

(*) * *Quarum vires inertię.* Cùm enim vis inertię sit quantitati materiæ proportionalis, si vires inertię sunt ut magnitudines, magnitudines sunt ut quantitates materiæ, hoc est, sunt ejusdem densitatis.

(b) * *Vis gravitatis diversi est generis.* Clariss.

Vql. II.

Muschenbroek in Dissertatione de Magnete plurima atque accuratissima de hujusce lapidis actione refert experimenta. Ex descriptâ a diligentissimo viro experimentorum serie palam quidem fit æqualem non esse magnetis in varia corpora actionem, eamque tempestatum vicissitudinibus obnoxiam, et modò remitti modò intendi. At vim magneticam in ratione multò minori quàm triplicatâ distantiarum decrescere, eadem

trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno et eodem corpore intendi potest et remitti, estque nonnunquam longè major pro quantitate materiæ quàm vis gravitatis, et in recessu a magnetete decrescit in ratione distantiae non duplicatâ, sed ferè triplicatâ, quantum ex crassis quibusdam observationibus animadvertere potui.

aequalitatem linearum CN , CS , ideòque partium CP ac Cp , tota vis magnetica tam attractiva quàm repulsiva acum convertens puncto P applicata censi potest.

Si magnes M ab acu infinitè distaret, pari ratiocinio ostenderetur vim totam quâ convertit acum in puncto P esse collectam, et per resolutionem virium, vim quâ convertit acum, esse ad vim totam ejus magnetis M ut sinus anguli NCM (deviationis nempe acûs a magnetete) ad radium.

Hinc in casu, in quo acus quiescit, vis magnetica Terræ convertens acum est aequalis vi magnetis convertenti acum, aiquidem manet acus in æquilibrio in situ NCs , cùm ergo sit vis magnetica Terræ tota, ad vim magneticam Terræ convertentem acum ut radius ad sinum declinationis acûs a meridiano magnetico; et sit vis magnetis convertens acum (aqualis illi vi magnetica Terræ convertenti acum) ad vim totam magnetis ut sinus deviationis acûs a magnetete ad radium; ex æquo et per compositionem rationum habebitur vis tota magnetica Terræ ad vim totam magnetis M ut sinus deviationis acûs a magnetete, ad sinum declinationis acûs a meridiano magnetico, quod etiam per compositionem virium demonstrari potuisset.

Itaque si idem magnes ad aliam distantiam ponatur, ut in X , ita ut in alio situ acum constituit, habebitur etiam vis magnetis in X , ad vim totam magneticam Terræ, ut sinus declinationis acûs a meridiano magnetico ad sinum deviationis acûs a magnetete. Quare per compositionem rationum erit vis magnetis in X , ad vim magnetis in M , ut sinus declinationis acûs a meridiano magnetico cùm magnes est in X divisus per sinum deviationis ab eo magnetete in X posito, ad sinum declinationis acûs a meridiano magnetico cùm magnes est in M divisum per sinum deviationis a magnetete, in M posito, hoc est, vis magnetis in diversis distantis, (infinitis, respectu magnitudinis acûs) est ut sinus declinationis acûs a magnetico meridiano divisus per sinum deviationis ejus a magnetete.

Equidem quando magnes satis est vicinus ab acu ut diversa censi possit ejus distantia a diversis punctis acûs, et fortior sit ejus vis in puncta viciniora quàm in remotiora, simulque actio magnetis ad diversa puncta acûs diversâ cum obliquitate applicetur, centrum actionis vis magnetis fiet vicinus extremitati N , attamen ob figuram vulgarem acûs magneticæ quæ spiculi instar formata circa punctum P latior est, centrum rotationis acûs in puncto P manere censi potest nisi nimis sit magnetis vicina.

Ideòque distantia magnetis ab acu et angulus deviationis acûs a magnetete determinabuntur ducendo lineam a centro magnetis ad id punctum P atque his Principiis per experimenta mox recensenda vires magnetum in diversis distantis positurum fuerunt æstimatæ.

In his experimentis adhibita fuit acus magnetica trium pollicum, quæ ut solet, attingebat utrâque extremitate circulum divisum in suos gradus, ductâque lineâ perpendiculari in centrum acûs cùm sponte in meridiano magnetico jacebat, applicabatur magnes parallelepipedon super eam lineam, ita ut ejus facies polares perpendiculares essent ei lineæ, polusque ejus meridionalis acum spectaret, Borealemque ejus extremum ad se traheret, mensurabantur distantia a centro acûs ad centrum magnetis in pollicibus lineisque Parisiensibus, et observabatur quantum in singulis magnetis distantis discederet acus a meridiano magnetico, tum, primò graphice, postea calculo trigonometrico, distantia centri magnetis, a centro rotationis acûs, ut et angulus ejus lineæ cum acu, determinabantur: diviso itaque sinu declinationis acûs per sinum istius anguli quotiens exprimit rationem vis magneticæ in distantia singula inventa, sive logarithmis utendo, differentia logarithmorum sinuum angulorum deviationis a meridiano magnetico et a magnetete erit logarithmus vis magneticæ, in distantia in quâ anguli illi habentur, et tertia pars ejus differentia erit logarithmus radicia cubicæ vis magneticæ, et assumptis iis radicibus cubicis in numeris, si per eas dividatur numerus aliquis constans (qui hic est $57\frac{1}{2}$) quotientes erunt ipsæ distantia; unde liquet quod radices cubicæ virium magnetis sunt inversæ ut distantia, sive quod vis magnetica sit inversæ in ratione triplicatâ distantiarum: sequenti verò Tabellâ exhibentur hæc experimenta magnâ curâ instituta, cum calculo inde deducto; prima columna designat distantias a centro acûs ad centrum magnetis; secunda columna designat distantiam a centro rotationis acûs ad centrum magnetis; tertia declinationem acûs a meridiano magnetico cum suo logarithmo et tertiâ ejus parte; quarta, declinationem acûs a lineâ ductâ a centro rotationis acûs ad centrum magnetis cum suo logarithmo et tertiâ parte; quinta, differentias earum tertiarum partium, cum suis numeris qui rationem exprimunt radicum cubicarum virium magnetis in diversis distantis; sexta denique quotientes numeri $57\frac{1}{2}$ per istos numeros divisi, qui quotientes ipsas distantias quamproximè sequant.

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

*Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati
materie in singulis.*

Planetas omnes in se mutuò graves esse jam ante probavimus, ut et
gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciprocè ut qua-

Distantia a centr. magn. ad centrum acûs.	Distantia a centr. magn. ad cent. rotat. acus.	Declin. a merid. mag- netico cum logar. et ejus tertiâ parte observata.	Declin. a magnete cum logarith. et ejus tert. par- te.	Differentia tertiar. part. logar. cum suis numeris.	Quotientes numeri 57½ per numer. qui radices cubicas viri- um magne- ticarum exhib- ent, divisi.
51.46 - - - 40 - -		75°. 19° 27	19°. 27	0.1541734	
		9.9849438	9.5224235	n. 1.496 - -	40.4
		3.3283146	3.1741412		
60.16 - - - 50 - -		61	35.41	0.2586412	
		9.9418193	9.7658957	n. 1.144 - -	50.4
		3.3139398	3.2552986		
67.49 - - - 60 - -		44°. 30'. 53°. 42'	53°. 42'	—1.9797885	
		9.8456618	9.9062964	n. 0.9545 - -	60.5
		3.2818873	3.3020988		
83 - - - 80 - -		21	77°. 6'	—1.8541437	
		9.5543292	9.9888982	n. 0.7147 - -	80.8
		3.1837764	3.3296327		
101 - - - 100 - -		11°. 85°. 46'	85°. 46'	—1.7605951	
		9.2805988	9.9988135	n. 0.5762 - -	100.2
		3.0935329	3.3329378		
120.7 - - - 120 - -		6. 20' 89' 22.	89' 22.	—1.6809838	
		9.0426249	9.9999735	n. 0.4797 - -	120.3
		3.0143083	3.333245		
150.2 - - - 150 - -		3. 20	91. 15	—1.5887049	
		8.7645111	9.9998966	n. 0.3874 - -	149.
		2.9215037	3.3332988		
160.1 - - - 160 - -		2°. 40' 91°. 38'	91°. 38'	—1.5559553	
		8.6676893	9.9998235	n. 0.3597 - -	160.5
		2.8892298	3.3332745		

Eodem modo experimenta instituta sunt, lineâ a centro magnetis ad centrum acûs angulum 45 graduum cum meridiano magnetico constituente.

Repetita fuere ea experimenta cum duobus diversis magnetibus, et viros quidem diversos sunt reperta, sed decrescere secundum eandem distantiarum rationem deprehensum sunt.

Repetita fuere cum magnetibus iisdem et armatis et armaturâ spoliatis, et quod omnino observabile est, idem magnes eandem declinationem acûs magneticum produxit, sive armatus foret, sive non armatus, in eodem nempe centri

magnetis a centro acûs distantia ac directione; quod quidem paradoxon videbitur, cum vis quâ magnes armatus ferrum sustinet, multum differat a vi quâ idem magnes non armatus ferrum trahit. Idem tamen phenomenon in utroque magnete deprehendi in quâlibet distantia ac directione, ita ut cum tutius mensurarentur distantia centri acûs et centri magnetis, magnete non armato sum usus in experimentis præcedentibus, ex quibus satis probari credo; In recessu a magnete vim magneticam decrescere in ratione fere triplicatâ quantum saltem crassius illis observationibus animadverti potest.

dratum distantiae locorum a centro planetæ. Et inde consequens est (per Prop. LXIX. Lib. I. et ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cùm planetæ cujusvis A partes omnes graves sint in planetam quemvis B, et gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius; et actioni omni reactio (per motûs legem tertiam) æqualis sit; planeta B in partes omnes planetæ A vicissim gravitabit, et erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. Q. e. d.

Corol. 1. Oritur igitur et componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus ^(c) in attractionibus magneticis et electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. ^(d) Res intelligitur in gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire et planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debet. ^(e) Si quis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt,

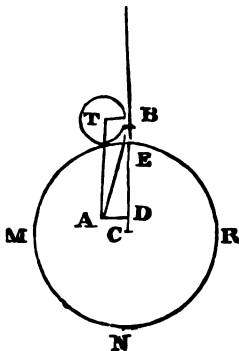
^(c) * In attractionibus magneticis et electricis, ubi ut plurimum quod majus est attrahens, eò, cæteris paribus, major est attractio.

^(d) * Res intelligitur in gravitate. Vires quæ sunt ut materia in omnium formarum corporibus atque ideò non mutantur cum formis, reperiri debent in corporibus universis singulisque corporum partibus, et esse proportionales quantitati materiæ, hinc vis corporis totius ex viribus partium componentium oriri debet. Si itaque concipiamus Jovem et satellites ejus ad se invicem accedere ut globum unicum componant, pergent singuli sese mutuò trahere, et viceversa si corpus Jovis resolveretur in globos plures, hi quoque globi, satellitum instar, sese mutuò traherent.

67. Globi cujusque vis absoluta est ut quantitas materiæ in eodem globo; vis autem motrix quæ globus unusquisque trahitur in alterum, et quæ ponderis nomine vulgò designatur, est ut contentum sub quantitativis materiæ in globis duobus applicatum ad quadratum distantie inter centra (per Cor. 4. Prop. LXXVI. Lib. I.) et huic vi proportionalis est quantitas motûs quæ globus uterque dato tempore movebitur in alterum (Def. VIII. Lib. I.) vis autem acceleratrix quæ globus unusquisque pro ratione materiæ quæ attrahitur in alterum est ut quantitas materiæ in globo altero applicata ad quadratum distantie inter centra (per Cor. 2. Prop. LXXVI. Lib. I.) et huic vi proportionalis est velocitas quæ globus attractus dato tempore movebitur in alterum (Def. VII. Lib. I.). Hinc corporum coelestium motus inter se possunt facile determinari. Quia verò respectu Terræ totius exigua admodum sunt corpora terrestria,

patet minimam quoque esse mutuam horum corporum attractionem respectu attractionis in Terram totam. Sic sphaera Terræ homogenea diametroque pedis unius descripta minus trahet corpusculum juxta superficiem suam quàm Terra juxta suam in ratione diametri sphaeræ ad diametrum Terræ (Prop. LXXII. Lib. I.) hoc est in ratione 1 ad 39231566 sive 1 ad 40000000 circiter, quæ tantilla vis sentiri non potest.

^(e) * Si quis objiciat, &c. Majora etiam quæ in Terrâ concipi possunt corpora haud magnos



effectus producent. Sit enim E M N R Tellus, cujus centrum C, et quæ ponatur sphaerica et homogenea. Sit corpus ubicumque putà in loco B, sublato omni impedimento, ad Telluris

hâc lege gravitare deberent in se mutuò, cùm tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: respondeo quod gravitas in hæc corpora, cùm sit ad gravitatem in Terram totam ut sunt hæc corpora ad Terram totam, longè minor est quàm quæ sentiri possit.

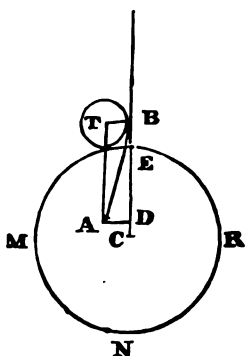
Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciprochè ut quadratum distantiae locorum a particulis. Patet per *Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.*

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si globorum duorum in se mutuò gravitantium materia undique in regionibus, quæ a centris æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciprochè ut quadratum distantiae inter centra.

Postquam invenissem gravitatem in planetam totum oriri et componi ex gravitatibus in partes; et esse in partes singulas reciprochè proportionalem quadratis distantiarum a partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi totâ ex viribus pluribus compositâ, an verò quam proximè. Nam fieri posset ut proportio, quæ in

superficiem perpendiculariter dirigeretur per rectam $BE C$; in ipsâ Telluris superficie adatur sphaera T , Telluri homogenea triumque



milliarium sive leucæ unius marinarum diametro descripta quam tangat recta $BE C$; designet EC vim gravitatis in ipsa superficie Terræ, et designabit TB gravitatem in ipsa superficie sphaeræ T (*Prop. LXXII. Lib. I.*) gravitas in E , in Tellurem erit ad gravitatem in B in ean-

dem, ut BC^2 ad EC^2 (*Prop. LXXIV. Lib. I.*). Quare ponendo BC^2 ad EC^2 ut EC ad BD , recta BD exhibebit gravitatem in Terram in loco B , ac proinde completo rectangulo $TBD A$, gravitatis directio erit per diagonalem BA (41. *Lib. I.*). Jam in triangulo rectangulo BAD , est BD ad AD ut radius ad tangentem anguli DBA . Quia verò Telluris semidiameter mediocris est ferè 1145 leucarum marinarum (quarum nempe viginti gradus minuto respondent) poni etiam potest recta BD æqualis EC , ideòque erit ad TB , sive BD ad AD ut 2290 ad 1, unde prodit angulus ABD , minuti primi cum dimidio. Si itaque loco sphaeræ T , intelligatur mons aliquis cujuscunque figuræ cujus attractio æquipollens attractioni ipsiusmet sphaeræ, pendulum ad radicem hujusce montis constitutum vj montis attractum deviat a perpendiculari magis quàm minuti unius primi intervallo. Hæc autem aberratio minor fiet, si pendulum in partes contrarias ab aliis montibus circumpositis trahitur, si densitas partium internarum Terræ, major sit quàm densitas partium montis, denique ex pyramidali montium figurâ, aliisque forte causis, hinc admodum difficile ut perturbationes illæ sensibiles fiant nisi in maximis montibus; ut etiam D^{mss} . Bouguer attractionem montis Chimboraco in Peruvio sensibilem deprehendit.

majoribus distantis accuratè obtineret, prope superficiem planetæ ob inæquales particularum distantias et situs dissimiles, notabiliter erraret. Tandem verò, (*) per Prop. LXXV. et LXXVI. Libri primi et ipsarum Corollaria, intellexi veritatem Propositionis de quâ hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri et inter se comparari possunt pondera corporum in diversos planetas. Nam pondera corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium sunt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directè et quadrata temporum periodicorum inversè; et pondera ad superficies planetarum, aliasve quasvis a centro distantias, majora sunt vel minora (per hanc Propositionem) in duplicatâ ratione distantiarum inversâ. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum 224 et horarum $16\frac{2}{3}$, satellitis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 et horarum $16\frac{8}{13}$, satellitis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 et horarum $22\frac{2}{3}$, et Lunæ circum Terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum distantia mediocri Veneris a Sole et cum elongationibus maximis heliocentricis satellitis extimi circumjovialis a centro Jovis 8'. 16". satellitis Hugeniani a centro Saturni 3'. 4". et Lunæ a centro Terræ 10'. 33". (†) computum ineundo inveni quod corporum

(*) * Per Prop. LXXV. et LXXVI. Lib. I. Ex singularum particularum viribus componitur vis planetæ totius (Cor. 1. Prop. VII.) et gravitatio in singulas corporis particulas æquales, est reciproca ut quadratum distantie locorum a particulis (per Cor. 2. Prop. ejusdem). Hinc vis planetæ totius decrecit in duplicatâ ratione distantiarum a centro, modò tamen planetæ ex uniformi materiâ constare ponantur (Prop. LXXV. Lib. I.) et hujusmodi planetæ duo se mutuo trahent vi decrecente in duplicatâ ratione distantie inter centra (per Corollaria ejusdem Prop.). Quamvis autem planetæ in progressu a centro ad circumferentiam non sint uniformes, obtinebit idem decrementum in ratione duplicatâ distantie (Prop. LXXVI. Lib. I.) si secundum quancumque legem crescat vel decrecat densitas in progressu a centro ad circumferentiam, et similiter hujusmodi planetæ duo sese invicem trahent viribus in ratione duplicatâ distantiarum inter centra decrecentibus.

(†) 68. * *Computum ineundo.* * Ut hæc omnia ad algebraica signa revocentur; sit S centrum Solis, V centrum Veneris, P centrum altærius planetæ primarii, L satelles in maximâ suâ elongatione heliocentricâ quam metitur angulus L S P, unde angulus S L P est rectus. Dicitur tempus periodicum Veneris t ; tempus periodicum satellitis L circa primum P dicatur t' .

Distantia S P qualiscumque sit, dicatur z ; ratio S P ad S V quæ datur per Phænomen.

IV. exprimatur per rationem a ad b, inde erit $S V = \frac{bz}{a}$;

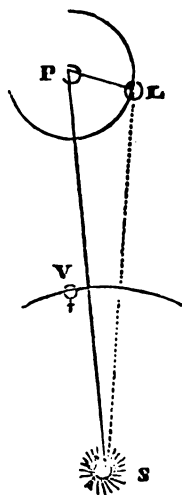
et radio existente l sinus elongationis maximæ heliocentricæ satellitis L, sive sinus anguli L S P dicatur e;

Hinc in triangulo S L P rectangulo, erit sinus totus anguli S L P (1) ad sinum anguli L S P (e) ut latus S P (z) ad latus P L quod erit ergo e z;

Quoniam vis Solis in Venerem et vis primarii in satellitem, sunt per Cor. 2. Prop. IV. Lib. I. ut distantie Veneris et satellitis a centro Solis et primarii divise per quadrata temporum periodicorum, sive ut $\frac{bz}{a^2 t^2}$ ad $\frac{ez}{t'^2}$ sive, si vis

Solis dicatur 1, erit vis primarii $\frac{ae t t'}{b t'^2}$;

Sed vis primarii in satellitem in distantia



æqualium et a centro Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter distantium pondera sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{9017}$, $\frac{1}{189188}$ ^(h) respectivè, et auctis vel diminutis distantiiis, pondera diminu-

P L, est ad vim quâ in ipsum ageret si tantumdem distaret quantum distat. Venus a Sole, inversè ut quadrata distantiarum, fiat ergo $\frac{1}{e^2 x^2}$ ad $\frac{a^2}{b^2 x^2}$ ut $\frac{a e t t}{b f f}$ ad $\frac{a^3 e^3}{b^3} \times \frac{t t}{f f}$ et habebitur tandem quod vis Solis in Venerem est ad vim primarii P in satellitem, si tantumdem distaret ab ipso quantum distat Venus a Sole ut

$$1 \text{ ad } \frac{a^3 e^3}{b^3} \times \frac{t t}{f f}$$

Jam verò transferantur Venus et satelles in aliâ quâcumque distantia, sed ita ut ambo iterum æqualiter distent a corpore suo centrali; vires quidem centralium corporum in ipsos mutantur, sed eodem modo utrinque mutantur; unde manebunt in eadem ratione ac prius, nam erit ut quadratum novæ distantie ad quadratum prioris distantie, ut vis prior Solis in Venerem ad vim novam; et in eadem ratione erit vis prior primarii in satellitem ad ejusdem vim novam, unde alternando, vis prior Solis in Venerem est ad vim priorem primarii in satellitem, ut vis nova Solis in Venerem ad vim novam primarii in satellitem, ergo in quâcumque distantia, si modò æqualiter distent Venus et satelles a suo corpore centrali, vis Solis erit ad vim primarii ut 1 ad $\frac{a^3 e^3}{b^3} \times \frac{t t}{f f}$

Denique, cum pondera corporum sint ut vires centrales et quantitates materiæ quæ per eas vires urgentur conjunctim, et in hoc Corollario Newtonus supponat corpora æqualia et æqualiter a corporibus centralibus distantia: pondera talium corporum erunt ut vires centrales, ideòque pondus in Solem erit ad pondus in primarium qualemcumque ut 1 ad $\frac{a^3 e^3}{b^3} \times \frac{t t}{f f}$

Computus per logarithmos commodè initur, exempli gratiâ sit P centrum Jovis, et L hujus extimus satelles, est b ad a ut 72333 ad 520096 quorum logarithmi sunt 4.8593365 et 5.7160855; est e sinus anguli 8' 16" cujus logarithmus est -3.3810609 (radio existente 1) hinc logarith-

mus $\frac{a e}{b} = -2.2378099$, et logarithmus $\frac{a^3 e^3}{b^3}$ hujus triplus est - 6.7134297.

Præterea logarithmus t (sive 224^h horar. 16 $\frac{1}{2}$, hoc est, horarum 5392 $\frac{1}{2}$) est 3.7318103. logarithmus f (sive 16^h. 16 $\frac{1}{3}$ horar. hoc est, horarum 400 $\frac{1}{3}$) est 2.6026384 ideòque log. $\frac{t t}{f f}$ est

1.1291719 et log. $\frac{t t}{f f}$ hujus duplus est 2.2583438.

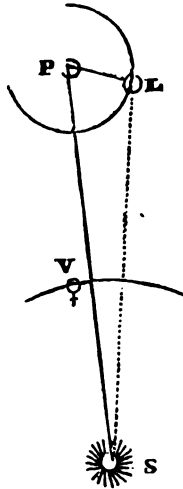
Unde tandem logarithmus $\frac{a^3 e^3}{b^3} \times \frac{t t}{f f}$ est - 4.9717735, quæ fractio in decimalibus potuisset exprimi, sed eam Newtonus exprimit unitate divisâ per denominatorem quemdam, cujus logarithmus obtinebitur hunc logarithmum - 4.9717735 ex logarithmo unitatis nempe 0. tollendo, erit ideo 3.0282265 cujus logarithmi numerus est 1067 ut eum Newtonus invenit.

^(h) • Respectivè, &c. • In præcedentibus editionibus (ante Londinensem) indicabat Newtonus hic loci elementa ex quibus rationes verarum diametrorum Jovis, Saturni et Terræ determinaverit, quæ quidem elementa, ex novis observationibus, quibusdam minutis immutavit, illa hæc esse nobis videntur.

Primò, diametrum Solis ex mediocri Terræ distantia visam, 32' 8" assumit, qualem etiam Cassinus in novissimis Astronomicis Tabulis eam constituit, cum prius 32' 12" statueretur; tum diametrum Jovis in mediocri ejus a Tellure distantia 37" facit qualem eam produisse sub finem primi phenomeni dicit, cum prius fieret 40". Ex his, cum distantia mediocri Solis (sive Telluris n. 53.) a Jove sit ad mediocrem distantiam Solis a Terrâ ut 520096 ad 100000 (per Phenom. IV.) et diametri veras sphaerarum sub parvis angulis visarum sint directè ut anguli sub quibus videntur, et ut distantie ex quibus spectantur, erit diameter vera Solis ad veram diametrum Jovis ut 1928" × 100000 ad 37" × 520096 sive 10.000 ad 997. ut calculo invenitur.

Secundò, diametrum Saturni in mediocri ejus a Sole sive Tellure distantia assumit 16", quem 22" in prioribus edit. faciebat: inde cum distantia ejus mediocri a Sole sive Tellure, sit ad mediocrem distantiam Solis a Terrâ ut 954006 (Phæn. IV.) ad 100000 erit diameter vera Solis ad veram diametrum Saturni ut 1928" × 100000 ad 16" × 954006, sive 10000 ad 791.

Denique parallaxim Solis, in distantia ejus mediocri 10". 30" constituit, parallaxis verò Solis est ipsa semi-diameter Terræ e Sole visa, ergo diametri veræ Solis et Terræ sunt ut diameter Solis apparens ad duplum parallaxeos So-



untur vel augentur in duplicatâ ratione: pondera æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in distantiiis 10000, 997, 791, et 109 ab eorum centrīs, atque ideò in eorum superficiebus, ⁽¹⁾ erunt ut 10000, 943, 529, et 435 respectivè. Quanta sint pondera corporum in superficie Lunæ, dicetur in sequentibus.

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in planetis singulis. Nam quantitates materiæ in planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiiis ab eorum centrīs, id est, in Sole, Jove, Saturno ac Terrâ sunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{5081}$, et $\frac{1}{169883}$ respectivè. Si parallaxis Solis statuatur major vel minor quàm 10". 30", ⁽²⁾ debet quantitas materiæ in Terrâ augeri vel diminui in triplicatâ ratione.

lis, hoc est, 1928, ad 21, sive ut 10000 ad 109 proximè.

⁽¹⁾ * Erunt ut; * Ut insistere pergamus ei analysi quâ Newtonus usus esse videtur, assumptis omnibus ut in nota 68.

Tangens semi-diametri apparentis Solis dicatur s, radio existente 1.

Sinus parallaxeos Solis (quæ est semi-diameter primarii P e Sole visi) dicatur p.

Vera semi-diameter primarii dicatur d.

Erit ex naturâ parallaxeon p ad 1 sicut d ad P S quæ dicebatur s, quæque ideo dicenda erit $\frac{d}{p}$.

Pariter sicut 1 ad s, distantia s sive $\frac{d}{p}$ ad semi-diametrum verum Solis quæ erit $\frac{s}{p}$.

Rursus parallaxis satellitis L dicatur q.

Ex naturâ parallaxeon erit q ad 1 ut d ad P L, quæ ideo erit $\frac{d}{q}$ et numerus semi-diametrorum primarii P in ea linea P L contentus erit $\frac{1}{q}$, et cùm singula semi-diameter e Sole spec-

tata, videatur sub angulo cujus sinus est p, proportionem sinuum parvitatem, anguli erunt ut sinus, et sinus elongationis heliocentricæ qui dicebatur e continebit sinum p numero viciū qui dici poterit $\frac{1}{q}$ ideòque erit $e = \frac{p}{q}$.

Si autem fingatur corpus in Solis superficie positum, quod itaque ab ejus centro distet quantitate æquali ejus veræ semi-diametro $\frac{s}{p}$, vis

Solis in id corpus, erit ad vim P in corpus æquale ad eandem distantiam a centro ejus primarii positi ut 1 ad $\frac{s^3 e^3}{b^3} \times \frac{t t}{f f}$ per not. 68. sive

substitutione factâ $\frac{p^3}{q^3}$ loco e^3 , ut $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{t t}{f f}$

Sed hæc vis primarii in id corpus, erit ad vim

ejusdem corporis in superficie primarii positi inversè ut quadrata distantiarum, sive inversè ut quadrata diametrorum verarum Solis et primarii, sive erit $\frac{p^2}{s^2 d^2}$ ad $\frac{1}{d^2}$ sicut $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{t t}{f f}$ ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^3}$

$\times \frac{t t}{f f}$ quæ quantitas exprimet vim primarii in corpus in suâ superficie positum, dum vis Solis in corpus æquale in suâ superficie etiam positum

erit 1: quæ quantitas $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^3} \times \frac{t t}{f f}$ est æqualis quantitati $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{t t}{f f}$ (quæ vim in

æqualibus distantiiis exprimit) divisæ per $\frac{p^2}{s^2}$.

Sed ob æqualitatem corporum vires in corpora sunt ut pondera corporum; hinc ergo habetur ratio ponderis corporum æqualium in superficiebus Solis, Jovis, Saturni ac Terræ.

Quare si logarithmis utamur; ex logarithmo p tollatur logarithmus s, et residui duplum tollatur ex logarithmo numeri qui exprimebat vim primarii in æqualibus distantiiis, residuum erit logarithmus vis primarii in corpora in ejus superficie posita.

Calculus iste respectu Terræ commodè fieri potest, quia datur ex observatione parallaxis Solis p, et apparens Solis semi-diameter: in Jove et Saturno parallaxis ipsorum est æqualis eorum semi-diametro apparenti in mediocri ipsorum distantia, et semi-diameter apparens Solis in ipsis est ad semi-diametrum Solis apparentem in Terrâ, inversè ut distantie eorum et Terræ a Sole.

⁽²⁾ Debet quantitas materiæ in Terrâ augeri vel diminui in triplicatâ parallaxeon ratione.

* Nam cùm quantitates materiæ in planetis singulis, sint ut eorum vires in æqualibus distantiiis; quantitas materiæ in Sole est ad quantitatem materiæ in Terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{t t}{f f}$, manente

ergo ratione a ad b distantiarum nempe Terræ et Veneris a Sole, manentibus temporibus periodicis Veneris et Lunæ t et t, et sinu parallaxeos

Corol. 3. Immutantur etiam densitates planetarum. Nam pondera corporum aequalium et homogeneorum in sphaeras homogeneas sunt in superficiebus sphaerarum ut sphaerarum diametri, per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque sphaerarum heterogenearum densitates ⁽¹⁾ sunt ut pondera illa applicata ad sphaerarum diametros. Erant autem verae Solis, Jovis, Saturni ac Terrae diametri ad invicem ut 10000, 997, 791 et 109, et pondera in eodem ut 10000, 945, 529 et 435 respective, et propterea densitates sunt ut 100, 94½, 67 et 400. ⁽²⁾ Densitas Terrae quae prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunae, et propterea hic rectè definitur. Est igitur Sol paulò densior quàm Jupiter, et Jupiter quàm Saturnus, et Terra quadruplò densior quàm Sol. Nam per ingentem summ calorem Sol rarescit. Luna verò densior est quàm Terra, ut in sequentibus patebit.

Corol. 4. Densiores igitur sunt planetae qui sunt minores, cæteris paribus. ⁽³⁾ Sic enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad aequalitatem magis accedit. Sed et densiores sunt planetae, cæteris paribus, qui sunt Soli propiores; ut Jupiter Saturno, et Terra Jove. In diversis utique

Luna q, liquet quod si varietur sinus parallaxeos Solis p et ex novis observationibus, patè ex observatione transitus Veneris super discum Solis, alia parallaxis cujus sinus sit φ dependendatur, eo casu invenietur quantitas materiae in Sole ad quantitatem materiae in Terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2} \times \frac{t t}{p}$, itaque quantitas materiae Terrae in praecedenti hypothese parallaxeos p reposita, erit ad eam quae tunc invenietur ut p^3 ad φ^3 sive (ob exiguitatem angulorum parallacticorum) ut cubi parallaxeos.

⁽¹⁾ * *Sunt ut pondera illa.* Nam pondera corporum aequalium et homogeneorum in sphaeras homogeneas et inaequales sunt in superficiebus sphaerarum ut sphaerarum diametri (loco cit.), et pondera corporum aequalium et homogeneorum in sphaeras heterogeneas et aequales in superficiebus sphaerarum sunt ut quantitates materiae in sphaeris, hoc est, ut densitates sphaerarum (2. Lib. I.). Undè pondera corporum aequalium et homogeneorum in sphaeras heterogeneas et inaequales in superficiebus sphaerarum sunt in ratione compositâ ex ratione densitatum et diametrorum sphaerarum, consequenter densitates sphaerarum sunt pondera illa directè et sphaerarum diametri inversè.

⁽²⁾ * *Densitas Terrae quae prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi Solis, &c.* * Ratio ponderum in ipsis superficiebus Solis et Terrae

expressabatur numeris 1 ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2} \times \frac{t t}{p}$ (demonstrationibus iisdem adhibitis quae in notis ⁽⁵⁾ et ⁽¹⁾ assignantur. Densitates verò sunt ut illa pondera applicata ad sphaerarum diametros vel semi-diametros; semi-diameter vera Solis erat $\frac{s d}{p}$, et semi-diameter vera Terrae erat d; quare

densitates Solis et Terrae erant ut $\frac{1}{s d}$ ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2 d}$

$\times \frac{t t}{p}$ sive ut 1 ad $\frac{a^3 s^3}{b^3 q^2} \times \frac{t t}{p}$ in qua quanti-

tate parallaxis Solis, quae dubia est, non amplius adhibetur, sed tantum quantitates de quibus constat apud astronomos, parallaxis nempe Lunae, semi-diameter apparens mediocri Solis, ratio distantiarum Terrae et Veneris a Sole, et ratio temporum periodicorum Veneris et Lunae, quare ea densitas Terrae hic rectè definitur.

⁽³⁾ * *Sic enim vis gravitatis.* Quoniam sphaerarum heterogenearum densitates sunt ut pondera in earum superficiebus ad sphaerarum diametros applicata, ideoque pondera ut densitates et sphaerarum diametri conjunctim, si densiores sint planetae qui sunt minores, minor diameter in variis planetis per majorem densitatem quâdam ex parte compensabitur, ac proinde vis gravitatis in variorum planetarum superficiebus ad aequalitatem magis accedit quàm si planetae omnes vel densitate aequales forent, vel planetae majores forent minoribus densiores.

distantiis a Sole collocandi erant planetæ, ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, rigesceret; si in orbe Mercurii, in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, (°) septuplo densior est in orbe Mercurii quàm apud nos: et thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium verò non est quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, et propterea densior sit hæc nostrâ; cùm materia omnis densior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

(*) * *Septuplo densior est.* Nam (14. Lib. I.) densitas lucis decrescit in ratione duplicatâ distantiarum a Sole, sed (Phæn. IV.) distantia Terræ est ad distantiam Mercurii ut 1000 ad 387. proximè. Est igitur densitas lucis in Mercurii ad densitatem lucis in Terrâ ut 1000000 ad 149769 seu ut 6,68 ad 1, hoc est ferè ut 7 ad 1.

* Addit Newtonus: *thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit:* hæc videntur referri ad n. 270. Transactionum Philosophicarum, qui continet scalam de caloribus gradibus, ingeniosè sane constructam, cujus author non indicatur: "Constructa fuit hæc Tabula ope thermometri et ferri candentis. Per thermometrum ex oleo lini constructum inveni (inquit author) quod si oleum ubi thermometer in nive liquescente locabatur (computus enim in hac Tabula inchoatur a calore quo aqua incipit rigescere tanquam ab infimo caloris gradu seu communi termino caloris et frigoris) occupabat spatium partium 10000 idem oleum calore corporis humani rarefactum occupabat spatium 10256 et calore aquæ jamjam ebullire incipientis spatium 10705 et calore aquæ vehementer ebullientis 10725, et calore stanni liquefacti ubi incipit rigescere 11516, &c.; rarefactio aëris aequali calore fuit decuplo major quàm rarefactio olei quasi quindecim vicibus major quàm rarefactio spiritus vini. Et ex his inventis ponendo calores olei ipsius rarefactioni proportionales et pro calore corporis humani scribendo partes 12 prodit calor aquæ ubi vehementer ebullit partium 34." In eadem autem Tabulâ ponendo calorem corporis humani 12, ponit calorem aëris æstivi 4, 5, vel 6. Quare medium assumendo, est ut quinque ad 34 sive proximè ut 1 ad 7, ita calor aëris æstivi ad calorem aquæ ebullientis: qui ergo septuplus est caloris aëris æstivi secundum assertum Newtonianum.

Disputari autem posset, quod calor rarefactioni olei proportionalis supponatur absque sufficienti ratione, et quod terminus a quo rarefac-

tio ea numerari incipit (is nempe gradus frigoris quo aqua incipit rigescere) sit ad arbitrium assumptus; cùm ea rarefactio numerari debuisset ab absoluto frigore, eo nempe frigoris et gradu quo partes olei nullam ulteriorem compressionem per vim frigoris pati possent, qui gradus est ignotus; at hujus Tabellæ constructio, ingeniosè demonstratur ab eodem Autore per ferri candentis refrigerationem; locavit enim ferrum candens in vento uniformiter spirante, ut aër a ferro calefactus semper abriperetur a vento, et aër frigidus in locum ejus uniformi cum motu succederet, sic enim aëris partes æquales æqualibus temporis calefactæ sunt et concipiebant calorem calori ferri proportionatam; hinc si dividatur tempus refrigerii ferri in instantia æqualia, erit, ut totus calor ferri initio primi instantis, ad calorem durante eo instanti amissum: sic calor ferri initio secundi instantis ad calorem durante eo secundo instanti amissum, &c. ideòque fingatur lineam rectam duci cujus abscissæ designent tempora; ordinatæ in extremis abscissis erigantur, quæ calores ferri singulis momentis designent; differentiæ earum ordinarum erunt iis ipsis ordinatis proportionales geometricæ, ideòque curva per earum ordinarum vertices translata erit logarithmica, crescentibus ergo temporibus arithmetice, calor ferri geometricè decrescit et propterea calor eorum geometrica ratio per logarithmorum Tabulam haberi poterit.

Quo supposito, imponebat Autor candenti ferro particulas diversorum metallorum, et aliorum corporum liquabilium, et notavit tempora refrigerii donec particulae omnes amissæ fluiditate rigescerent, et tandem calor ferri æquaretur calori corporis humani; hinc calores omnes quibus cera, bismuthum, stannum, plumbum, regulus stibii, eorumque variæ miscelæ liquescunt, innotuere, sive eorum geometricæ rationes, cùmque calores ita inventi eandem habuerint inter se rationem cum caloribus per thermometrum inventis, propterea rectè assumptum fuit, rarefactiones olei ipsas caloribus esse proportionales.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo a superficiebus planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum a centro quam proximè.

Si materia planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc Propositio accuratè: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

PROPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus planetarum in cælis diutissimè conservari posse.

In scholio Propositionis XL. Lib. II. ostensum est quod globus aquæ congelatæ, in aëre nostro liberè movendo et longitudinem semi-diametri suæ describendo, ex resistantiâ aëris amitteret motûs sui partem $\frac{1}{338}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè in globis utcunque magnis et velocibus. Jam vero globum Terræ nostræ densiorem esse, quàm si totus ex aquâ constaret, sic colligo. Si globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quàm aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent et supernatarent. Eaque de causâ globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quàm aqua, emergeret alicubi, et aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppositâ. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magnâ ex parte circumdatæ. Hæc si densior non esset, emergeret ex maribus, et parte sui pro gradu levitatis extaret ex aquâ, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus.

Eodem argumento (*) maculæ solares leviores sunt quàm materia lucida solaris cui supernatant. Et in formatione qualicunque planetarum

(*) 69. *Macule solares.* Si radii solares telescopio duobus vitris instructo excipiantur, lucusque circumpositus obscuretur, inversa Solis imago supra chartam ad axem telescopii normalem pingitur, et maculæ conspiciuntur, quæ nunc emergere, nunc evanescere observantur. Maculæ illæ in materiâ solari supernatare vel saltem soli quidam proximas esse certum est.

Sic enim sol in S, ex Tellure T visus sub angulo $11^{\circ} 32'$. Si macula orbitam aliquam kl in Q H exis discum describeret, non videretur solis discum ingredi antequam ad k perveniret ubi recta T E D ex Terrâ ducta

discumque Solis tangens, maculæ orbitam secat, et ductâ T G C Solem quoque tangente, per Solis superficiem tantummodo progredi videretur, quandiû describeret arcum E G qui semi-peripheriâ minor est, ideoque arcus ille tempore quod semi-periodo minus est, percurreretur. Sed ex observationibus notum est quamplures maculas duas aut tres integras periodos absolvisse 27 dierum spatio atque $13\frac{1}{2}$ dies impendisse ut a limbo occidentali Solis ad limbum orientalem pervenirent; illarum ergo macularum orbitæ vel in ipsâ superficiei solari extiterunt, vel Soli fuerunt proximæ.

) Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea idem centrum illud gravitatis perpetuò quiescit, Sol pro vario planetarum situ in omnes partes movebitur, sed a centro illo nunquam longè recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis et planetarum omnium pro centro mundi habendum est. Nam cum Terra, Sol et planetæ omnes gravitent in se mutuò, et propterea, pro vi gravitatis suæ, eandem leges motûs perpetuò agitentur: perspicuum est quod horum intra mobilia pro mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus tunc in centro locandum esset, in quod corpora omnia maximè gravitant, si valgi est opinio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cum item Sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, a quo centrum Solis quam minimè discedit, et a quo idem adhuc minus discederet, si idem Sol densior esset et major, ut minus moveretur.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in ellipsis umbilicum habentibus in centro Solis, et radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes a priori. Quoniam ponamus planetarum in Solem sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro; si Sol quiesceret et planetæ reliqui non agerent in se mutuò, tunc orbes eorum elliptici, Solem in umbilico communi habentes, et describerentur temporibus proportionales (per Prop. I. et XI. et Prop. XIII. Lib. I.) actiones autem planetarum in se mutuo æquæ sunt (ut possint contemni) et motus planetarum in ellipsis Solem mobilem minùs perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quam si isti circa Solem quiescentem peragerentur.

Idcirco quidem Jovis in Saturnum non est omnino contemnenda. Nam si Jovis in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus distantii) (*) ut 1

Aliis in casibus. Si nempe ad diversas partes planetæ constant, centrum gravitatis versus unam partem, modò versus alteram, hinc centrum gravitatis quasi medio loco poni debet, minor itaque fit constantia.

Quoniam Sol pro diverso planetarum situ id agitur, motu quodam libratorio ac errante, nunquam tamen integrè

sui diametro a centro quiescente systematis totius recedet. Quia verò Solis et planetarum ponderibus (per Cor. 1. Prop. VIII.) inventis, datoque situ omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum (61. Lib. I.) patet quoque dato communi gravitatis centro haberi locum Solis ad tempus propositum.

(*) * Ut 1 ad 1067 (Cor. 2. Prop. VIII.).

ex aquâ, materia omnis gravior, quo tempore massa fluida erat, centrum petebat. Unde cùm Terra communis suprema quasi duplo gravior sit quàm aqua, et paulò inferiùs in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quòd copia materiæ totius in Terrâ quasi quintuplo vel sextuplo major sit quàm si tota ex aquâ constaret; præsertim cùm Terram quasi quadruplo densiorem esse quàm Jovem jam ante ostensum sit. Quare si Jupiter paulo densior sit quàm aqua, hic (*) spatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 semi-diametrorum suarum describit, (†) amitteret in medio ejusdem densitatis cum aëre nostro motûs sui partem ferè decimam. Verùm cùm resistentia mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut aqua, quæ partibus 13½ levior est quàm argentum vivum, minus resistat in eadem ratione; et aër, qui partibus 860 levior est quàm aqua, minus resistat in eadem ratione: si ascendatur in cœlos ubi pondus medii, in quo planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistentia prope cessabit. Ostendimus utique in scholio ad Prop. XXII. Lib. II. quod si ascenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum supra Terram, (‡) aër ibi rarior foret quàm ad superficiem Terræ in ratione 30 ad

Ex quibus sequitur, æqualitatem temporum occultationis et apparentiæ macularum, observationibus non constare; quinimò rectius inæqualitatem eorum temporum exinde deduci. Ut quidam quantitate a Solis disco distare maculas deducatur, et quidem cùm differentia temporum eorum sit circiter dierum trium, in singulo quadrante erit horarum decem et octo, quo tempore decem gradus circa Solis centrum maculæ percurrunt; sed sinus versus decem graduum sunt 15. centesimæ radii; hinc tandem deducetur quod semi-diameter Solis sit ad semi-diameterum circuli quem describunt maculæ ut 85 ad 100 sive ut 17 ad 20, et maculæ quindecim circiter semi-diametris Terræ supra Solis superficiem emineant: Hinc idem Wolfius eas esse nubes in Solis atmosphærâ elatas, conjectatur; quæ quidem fuerat Kepleri sententia.

(*) * *Spatio dierum triginta.* Si arcus quem Jupiter motu diurno medio circa Solem describit, multiplicetur per 30 et factum dividatur per semi-diameterum apparentem Jovis in mediocri ejus distantia a Terrâ, quotus erit numerus semi-diametrorum Jovis quas intervallo 30 dierum describit. Potest etiam idem inveniri dicendo: ut tempus periodicum Jovis ad 360 gradus, ita 30 dies ad arcum hoc tempore descriptum, hic arcus dividatur per semi-diameterum apparentem Jovis, et quotus erit numerus semi-diametrorum quas Jupiter 30 diebus describit.

(†) * *Amitteret in medio ejusdem densitatis.* (per schol. Prop. XL. Lib. II. circa sinem.)

Si diameter Jovis dicatur D, V velocitas ejus sub initio motûs, et T tempus quo velocitate V in vacuo describet spatium S quod sit ad spatium $\frac{8}{9}$ D ut densitas Jovis ad densitatem aëris nostri, hoc est, ut 860 ad 1 circiter Jupiter in aëre nostro projectus cum velocitate V tempore quovis

alio t amittet velocitatis suæ partem $\frac{t}{T+t}$

Quoniam igitur Jupiter intervallo 30 dier. longitudine $459 \frac{D}{2}$ describit, et densitas Jovis est

ad densitatem aëris nostri ut 860 ad 1 circiter, erit $1:860 = \frac{8}{9} D:S = \frac{6880}{9} D$, et $459 \frac{D}{2}:$

$30 \text{ dies} = \frac{6880}{3} D:T = \frac{137600}{459}$. Unde si

ponatur $t = 30 \text{ dieb. erit } T+t = \frac{151370}{459}$,

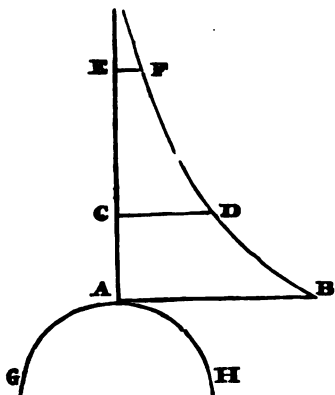
et $\frac{t}{T+t} = \frac{1377}{15137} = 0,09096 = \frac{1}{10}$ fere.

Cùm autem Jupiter supponatur paulò densior quàm aqua, minorem adhuc velocitatis suæ partem amitteret in aëre nostro.

(‡) 70. * *Aër ibi rarior foret.* Si gravitas particularum aëris in omnibus a Terrâ distantia eadem sit, sintque distantie in progressionem arithmetica, demonstratum est (in schol. Prop. XXII. Lib. II.) densitates fore in progressionem geometricâ. Hinc patet in variis a Terrâ distantis per logarithmicam exhiberi posse varias

0,00000000000003998, seu 75000000000000 ad 1 circiter. Et (") hinc stella Jovis in medio ejusdem densitatis cum aëre illo superiore revolven- do, tempore annorum 1000000, ex resistantiâ medii non amitteret motûs sui partem decimam centesimam millesimam. In spatiis utique Terræ proximis, nihil invenitur quod resistantiam creet præter aërem, exhalationes et vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentissimè exhaustis gravia intra vitrum liberrimè et sine omni resistantiâ sensibili cadunt; ipsum aurum et pluma tenuissima simul demissa æquali cum velocitate cadunt, et casu suo describendo altitudinem pedum quatuor, sex vel octo, simul incident in fundum, ut experiëntiâ compertum est. Et propterea si in cœlos ascendatur aëre et exhalationibus vacuos, planetæ et cometæ sine omni resistantiâ sensibili per spatia illa diutissimè movebuntur.

aëris densitates. Sūt enim F D B logarithmica, sumptis abecimis A C, A E, in progressionē arithmetica, ordinatæ A B, C D, E F densitates



alris in locis A, C, E, representabunt (33. Lib. II.). Quare datis altitudinibus A C, A E, et ratione $\frac{A B}{C D}$, innotescet ratio $\frac{A B}{E F}$. Nam (ex naturâ logarithmicâ, per Cor. 2. Theor. II.

de logarithmicā) $A C : A E = L. \frac{A B}{C D} :$
 $L. \frac{A B}{E F}$, ideoque $\frac{A E}{A C} L. \frac{A B}{C D} = L. \frac{A B}{E F}$.

Jam quia altitudines Mercurii in barometro sunt ut pressiones atmosphaerae in diversis ab horizonte distantis (Prop. XX. Lib. II.). Si aeris densitas compressioni ponatur proportionalis, datis altitudinibus Mercurii in barometro in locis A, C, dataque altitude A E, dabitur altitudo Mercurii in barometro in loco E, ideoque nota erit densitas aeris in E. Ut autem hac omnia ad praesentem casum transferamus, sit G A H pars superficiae terrestria, altitudo Mercurii in barometro in A = 30 poll. distantiâ A C = 2280 ped. Anglicis et altitudo Mercurii in barometro in C = 28 poll. quemadmodum Newtonus experimento cognitum supponit. Sit altitudo A E = 900 miliaribus hoc est = 1056000 ped. Anglica, si milliari sit mensura

$$\frac{A \text{ E}}{A \text{ C}} = \frac{L}{C D} = \frac{B}{D}$$
$$\frac{900}{2280} = \frac{L}{28}$$

= 13.8750613 circiter cui logarithmo in tabulis respondet numerus 75000000000000 erit ergo densitas aeris in A, hoc est, in superficie Terrae ad ejusdem densitatem in distantiâ 900 milliarium seu ped. 1056000 ut 75000000000000 ad 1, circiter.

(*) *Hinc stella Jovis.* Densitas Jovis est ad densitatem aëris illius superioris ut $860 \times 750000000000000$ ad 1. Hinc $1 : 860 \times 750000000000000 = \frac{1}{2} D : S = 1720000000000000 : D$, et $459 \frac{D}{2}$ est ad 1720000000000000 , ut anni pars duodecima seu $\frac{1}{12}$ ad $T = \frac{8600000000000000}{1367}$, annis = 6300000000000 ferè. Ponatur $t = 100000$ annis, et erit pars motûs amissa tempore $t = \frac{t}{100000} = \frac{1}{6300000 + 100000} = \frac{1}{6300000 + 1} = \frac{1}{6300000}$ ferè.

ex literis meis plenius exposuit. Simili motu ⁽¹⁾ extimus Saturni satelles circa axem suum revolvi videtur, eâdem sui facie Saturnum perpetuò respiciens. Nam circum Saturnum revolvendo, quoties ad orbis sui partem orientalem accedit, ægerrimè videtur, et plerumque videri cessat: id quod evenire potest per maculas quasdam in eâ corporis parte quæ Terræ tunc obvertitur, ut Cassinus notavit. Simili etiam motu satelles extimus Jovialis circa axem suum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis Jovi aversâ maculam habeat quæ tanquam in corpore Jovis cernitur ubicumque satelles inter Jovem et oculos nostros transit.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.

(1) Planetæ sublato omni motu circulari diurno figuram sphaericam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. (*) Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia si fluida sit, ascensu suo ad æquatorem

“ post conjunctionem indè procedere ad nodum
“ ascendentem, tum maculæ superiores apud
“ polum boreum sitæ, paulatim cum suo polo a
“ luce in tenebras concedunt, dum inferiores
“ maculæ cum polo australi ex tenebris in lucem prorepunt. Contrarium evenit semestri
“ post, cùm Sol accessit ad limitem Lunæ boreum.” Hactenus N. Mercator: sed plenior librationum lunarium expositio habetur in Elementis Astronomicis clariss. Cassini, ubi vir doctiss. varias harumque librationum apparentias respectu fixarum et Solis determinat, docetque methodum quâ ad quodlibet tempus datum possit definiri apparens macularum lunarium situs.

(2) * *Extimus Saturni satelles*, tertio satellite sæpè major apparet, posteaque decrescit ac tandem juxta periodum nondum probe notam evanescit; id tamen ut plurimum contingit dum satelles in orbitæ suæ orientali parte respectu Saturni versatur, rursum deinde in conspectum redit. Causa hæc esse videtur, quod scilicet hemisphærii satellitis pars quæ ad nos conversa est, maculis obscurata præ luminis tenuitate cerni non possit, revolvente autem circa axem satellite, ad hemisphærium oppositum transeunt maculæ, iterumque satelles fit conspicuus. Cùmque in eâ orbis sui parte quæ orientem spectat, obscuratus satelles semper observetur, in alterâ verò parte nunquam, valdè probabile est eandem hujus satellitis faciem planctus primario semper ob-

verti. Idem quoque simili argumento patet in extimo Jovis satellite, nisi dicatur illas satellitum maculas fuliginum instar modò nasci, modò dissipari; sed ubi apparentiæ aliquæ ex duplici causâ ortum habere possunt, anteponendæ sunt explanationes quæ a motu locali repetuntur. Alio Saturni Jovisque satellites, Lunæ instar, planetis primariis invariata manifestare faciem ex analogiæ lege colligunt multi. Rem aliter se habere censet clariss. Daniel Bernoullius in Disquisitionibus Physico-Astronomicis an. 1754. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio decoratis. Has consulat lector.

(1) * *Planetæ sublato omni motu circulari*. Patet (per not. 172. Lib. II.). Si planetarum materia ponatur fluida, visque gravitatis ad unum centrum dirigatur.

(2) * *Per motum illum circularem*. Quoniam planetæ circa axem suum revolvuntur, planetarum partes a centrâ circulorum in quibus moventur, recedere conantur, eoque major est vis illa centrifuga quò majores sunt circulorum quas describunt peripheriæ (Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.). Sed æquator est circulus maximus, circuli autem versùs polos continuò decrescant, quare planetarum partes magis a centro æquatoris quàm a centrâ parallelorum recedere conantur, ideoque si fluida sit planetarum materia, ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet.

(*) Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuò quiescit, Sol pro vario planetarum situ in omnes partes movebitur, sed a centro illo nunquam longè recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis et planetarum omnium pro centro mundi habendum est. Nam cum Terra, Sol et planetæ omnes gravitent in se mutuò, et propterea, pro vi gravitatis suæ, secundum leges motûs perpetuò agitentur: perspicuum est quod horum centra mobilia pro mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum esset, in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, a quo centrum Solis quam minimè discedit, et a quo idem adhuc minus discederet, si modò Sol densior esset et major, ut minus moveretur.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in ellipsis umbilicum habentibus in centro Solis, et radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes a priori. Quoniam pondera planetarum in Solem sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro Solis; si Sol quiesceret et planetæ reliqui non agerent in se mutuò, forent orbes eorum elliptici, Solem in umbilico communi habentes, et areæ describerentur temporibus proportionales (per Prop. I. et XI. et Corol. 1. Prop. XIII. Lib. I.) actiones autem planetarum in se mutuo perexiguæ sunt (ut possint contemni) et motus planetarum in ellipsis circa Solem mobilem minùs perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quàm si motus isti circa Solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus distantiis) (*) ut 1

(*) * *Aliis in casibus.* Si nempe ad diversas Solis partes planetæ constant, centrum gravitatis modò versùs unam partem, modò versùs alteram incidit, hinc centrum gravitatis quasi medio loco iis casibus poni debet, minor itaque fit centrorum distantia.

71. Quoniam Sol pro diverso planetarum situ diversimodè agitur, motu quodam libratorio lentè semper errabit, nunquam tamen integrè

sui diametro a centro quiescente systematis totius recedet. Quia verò Solis et planetarum ponderibus (per Cor. 1. Prop. VIII.) inventis, datoque situ omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum (61. Lib. I.) patet quoque dato communi gravitatis centro haberi locum Solis ad tempus propositum.

(*) * *Ut 1 ad 1067* (Cor. 2. Prop. VIII.).

ad 1067; ideóque in conjunctione Jovis et Saturni, quoniam distantia Saturni a Jove est ad distantiam Saturni a Solè ferè ut 4 ad 9, ^(b) erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16×1067 seu 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis Saturni in singulis planetæ hujus cum Jove conjunctionibus adeo sensibilis ut ad eandem astronomi hæreant. ^(c) Pro vario situ planetæ in his conjunctionibus, eccentricitas ejus nunc augetur, nunc diminuitur, aphelium nunc promovetur, nunc fortè retrahitur, et medius motus per vices acceleratur et retardatur. ^(d) Error tamen omnis in motu ejus circum Solem a tantâ vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari ferè potest constituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis et Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) et propterea ubi maximus est, vix superat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix superat minuta duo prima annuatim. ^(e) In conjunctione autem Jovis et Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum et Jovis in Solem sunt fere ut 16, 81 et $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ seu

156609, ideóque differentia gravitatum Solis in Saturnum et Jovis in Saturnum est ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 156609 seu 1 ad 2409. Huic autem differentię proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, et propterea perturbatio orbis Jovialis longè minor est quàm ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longè minores ^(f) præterquam quod orbis Terræ sensibiliter perturbatur a Lunâ. ^(g) Commune centrum gravitatis Terræ et Lunæ, ellipsin circum Solem in umbilico positum percurrit, et radio ad Solem ducto areas in eâdem temporibus proportionales describit, Terra verò circum hoc centrum commune motu menstruo revolvitur.

^(b) * *Erit gravitas Saturni in Jovem* (Prop. VIII.).

^(c) * *Pro vario situ planetæ.* Saturnum his perturbationibus obnoxium esse patet (per Cor. 6. 7. 8. 9. Prop. LXVI. Lib. I.).

^(d) * *Error tamen omnis.* Si ad evitandum omnem ferè errorem, orbis Saturni umbilicus (per Prop. LXVII. Lib. I.) locetur in communi centro gravitatis Jovis et Solis, theoria Saturni juxta hanc hypothesin constituta satis accuratè congruit cum phænomenis, ita ut error qui ex hac hypothesi oritur, ubi maximus est, vix superet minuta duo prima, et error maximus in motu medio vix minutis duobus primis annuatim major observetur. Hinc non parum confirmantur ea quæ de mutua planetarum perturbatione hæctenus dicta sunt.

^(e) * *In conjunctione autem Jovis.* Quoniam in conjunctione Jovis et Saturni, distantia Saturni a Sole, Saturni a Jove, et Jovis a Sole sunt inter se ut 9, 4 et 5, circiter, gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum et Jovis in Solem erunt ut $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{16}$ et $\frac{3021}{25}$ (per Cor.

1. Prop. VIII.) hoc est, ut 16, 81 et $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$.

^(f) * *Præterquam quod orbis Terræ.* Orbem Terræ sensibiliter perturbari a Lunâ ostenditur deinceps ubi vis Lunæ definitur.

^(g) * *Commune centrum gravitatis Terræ et Lunæ.* (Prop. LXXV. Lib. I.)

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium aphelia et nodi quiescunt.

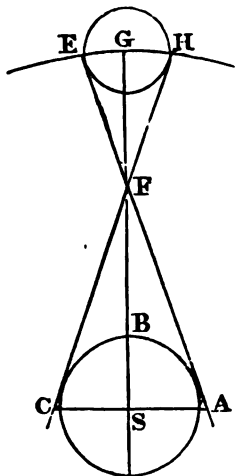
Aphelia quiescunt, per Prop. XI. Lib. I. ut et orbium plana, per ejusdem Libri Prop. I. et quiescentibus planis quiescunt nodi. Attamen a planetarum revolventium ^(b) et cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem hic contemni possunt.

Corol. 1. Quiescunt etiam stellæ fixæ, propterea quod datas ad aphelia modosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque ⁽¹⁾ cùm nulla sit earum parallaxis sensibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam

^(b) * *Et cometarum actionibus.* Eodem prorsus modo quo planetæ in se invicem agunt; patet quoque cometas in alios planetas agere similesque effectus producere, sed cùm observationes astronomicæ ostendant apheliorum nodorumque motum esse tardissimum, ob parvitatem contemni possunt inæqualitates quæ ex planetarum et cometarum actionibus in se invicem oriuntur.

⁽¹⁾ * 72. Cùm nulla sit earum parallaxis. In hypothesi Terræ motæ, quiescentibus Sole et stellis, Tellus integram revolutionem absolvit



spatio 23. hor. 56'. 4". circiter, et circa Solem revolvitur unius anni intervallo; circulumque describit qui ecliptica vel orbis annuus appellatur. Referat S Solem, sit F stella fixa in eclip-

ticæ plano ad distantiam quamlibet constituta; sit A B C D orbis annuus, ponaturque Tellus primum in loco A, deindè post sex menses perveniat ad locum C in quo distet a loco A tota diametro orbis annui; hoc est, 20000 Terræ diametris circiter, ita ut anguli F S A, F S C sint recti, stella F ex Tellure A visa respondebit puncto E, quod ad distantiam infinitam a Terrâ removeri supponitur. Deindè eadem stella ob motum Terræ ab A versùs B, progredi videbitur ab E versùs G, donec Tellure perveniente ad C stella videatur in H, distans scilicet e loco in quo ante sex menses versabatur, toto arcu E H, cujus mensura est angulus E F H vel A F C. Hujus anguli semissis A F S, est parallaxis orbis annui ex Terræ motu annuo oriunda. Dato autem angulo A F S, faciliè invenitur distantia stellæ fixæ a Terrâ A F, si fiat, ut sinus anguli A F S, ad sinum totum, ita A S semi-diameter orbis annui, quæ est 10000 diametrorum Terræ circiter ad A F. Jam verò patet ex Telluris annuo motu oriri debere translationem fixarum inter se parallaxi duplicatæ circiter æqualem. At stellæ majores et propiores respectu remotiorum quæ telescopiorum ope duntaxat conspici possunt, moveri non observantur. Nulla est itaque fixarum parallaxis sensibilis ex Terræ motu annuo oriunda, ideoque immensa est fixarum a Tellure distantia. Sive autem Terra moveatur, sive quiescat, stellæ fixas immensis intervallis a Terrâ distare certissimum est, nam parallaxim annuam minuto primo longe minorem esse consentiunt omnes astronomi. Fingamus verò annuam fixæ alicujus proximioris parallaxim esse unius minuti primi, a Tellure distabit stella illa 3437 semi-diametris orbis quam describit Terra, siquidem sinus unius minuti est ad radium ut 1 ad 3437, et si semi-diameter orbis sit 20000 semi-diametrorum Terræ, ad minimum 68740000 Terræ ipsius semi-diametris distabit fixa a Tellure.

73. Christianus Hugenius in Cosmotheoris Lib.

nullos edent sensibiles effectus in regione systematis nostri. Quinimo fixæ in omnes cœli partes æqualiter dispersæ contrariis attractionibus vires mutuas destruunt, per Prop. LXX. Lib. I.

Scholium.

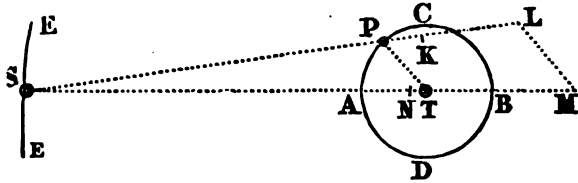
Cùm planetæ Soli propiores (nempe Mercurius, Venus, Terra, et Mars) ob corporum parvitatem parum agant in se invicem; horum aphelia et nodi quiescent, nisi quâtenus a viribus Jovis, Saturni et corporum superiorum turbentur. (*) Et inde colligi potest per theoriam gravitatis, quod

II. aliam excogitavit methodum quâ rationem distantie fixarum ad distantiam Solis conjectando investigaret. Supponit itaque Sirium, quæ stella est inter alias fulgentissima, Soli circiter æqualem esse. Deinde tentavit quâ ratione Solis diametrum ita imminuere posset ut non major aut splendidior Sirio appareret. Quod ut assequeretur, tubi vacui duodecim circiter pedes longi aperturam alteram occultavit lamellâ tenuissimâ in cujus medio tam exiguum erat foramen ut lineæ partem duodecimam non excederet; oculoque alteri aperturæ admoto, ea videretur Solis particula cujus diameter erat ad diametrum totius ut 1 ad 182. Cùm verò particula illa Sirio splendidior adhuc appareret, foramine globulum vitreum ejusdem cum foramine diametri objecit, talisque foci globulum selegit ut lux Solis ad oculum transmissa non major aut splendidior videretur eâ quam a Sirio emissam nudis oculis intuemur. Quo facto, hujus particule

Solis diametrum invenit partem $\frac{1}{27664}$ diametri totius. Quare Sol instar Sirii appareret, si conspicua foret pars diametri totius solaris tantum $\frac{1}{27664}$, distantia autem Solis a Terrâ, in quâ tantillum videretur, foret ad distantiam in quâ ejus diametrum apparentem intuemur ut 27664 ad 1, divisâque apparente Solis diametro medio-cri per 27664, foret diameter Solis 4'' circiter. Hinc Sirii quoque distantia a Terrâ est ad distantiam Solis ab eadem ut 27664 ad 1 et diameter apparet Sirii 4''. Jam distantia Solis a Terrâ, si parallaxis Solis ponatur 10' 30'' est fere 20000 semid. terrestrium, erit ergo distantia Sirii 553280000 semid. terrestr. Si verò distantiam mediam Saturni a Terrâ constituamus 190800 semid. terrestr. prodit distantia inter Saturnum et Sirium 553089200 semid. terrestr.

(*) 74. • Et inde colligi potest. Designat 8

planetam aliquam superiorem, puta Jovem, cujus orbita E S E; sit T Sol, P planeta aliquis inferior; ponaturque corporum S, P, aliorumve plurium systema revolvi circa corpus T manentibus orbium E S E et P A B formâ, proportionibus et inclinatione ad invicem, mutantur verò utcumque magnitudines, et per Theoriam gravitatis colligitur (Cor. 15. et 16. Prop. LXVI. et not. in eadem Corollaria) errores as-



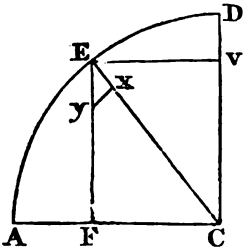
gulares corporis P in quâvis revolutione genitos, ideòque et motus aphelii in quâlibet revolutione corporis P esse ut quadratum temporis periodici quàm proximè. Si itaque numerentur illi errores, in variis planetis P durante eodem determinato tempore, per centum v. gr. annos, ut hic assumit Newtonus, errores integri eo tempore descripti erunt ut errores singulâ revolutione commisi et ut numerus revolutionum asculo integro peractarum, ille numerus revolutionum est inversè ut tempus periodicum, et errores (qui sunt, ut dictum est, directè ut quadratum temporis periodici) ergo errores apheliorum durantibus centum annis erunt in simplici temporum periodicorum ratione. Sed tempora periodica planetarum P sunt in ratione sesquuplicatâ distantiarum a centro T (per Phæn. 4.). Sunt ergo errores planetarum inferiorum in hac ratione sesquuplicatâ distantiarum a centro Solis. Quare si ponatur eum esse aphelii Martis progressum ut in annis centum conficiat 33' 20'' in consequentia respectu fixarum, invenietur motus aphelii aliorum planetarum qualis a Newtono definitur, dicendo: ut radix quadrata cubi distantie Martis ad radicem quadratam cubi distantie Terræ a Sole, ita 33' 20'' ad motum aphelii Terræ annis centum.

descendunt in latitudine Lutetiæ, est ad vim centrifugam corporum in æquatore a Terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in æquatore Terræ est ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt a Terrâ in latitudine Lutetiæ graduum 48. 50'. 10", (°) in duplicatâ ratione radii ad sinum complementi latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim quâ gravia descendunt in latitudine illâ Lutetiæ, et corpus in latitudine illâ vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describet lineas 2177,267, seu pedes Parisienses 15 dig. 1. et lin. 5.267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore Terræ ut 2177,267 ad 7,54064 seu 289 ad 1.

v. gr. si 57226 hex. sumatur, erit iste sinus versus linearum 7. 56244, ideòque vis quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ, est ad vim centrifugam corporum in æquatore ut 2173. 828958 ad 7. 56244.

(*) 81. * In duplicatâ ratione radii. Quadrans circuli A E D revolvatur circâ radium A C, ducatur radius C D ad A C normalis, ip-



sique parallela agatur ordinata E F, erit vis centrifuga in D secundum directionem D C sive E F, ad vim centrifugam in E secundum directionem C E, in ratione duplicata radii C D ad ordinatam E F quæ est sinus complementi arcus seu latitudinis E D. Exprimat enim D v vim centrifugam in D secundum directionem D C, et recta E y, exprimat vim centrifugam in E secundum directionem E F, ductâ perpendiculari y x ad rectam E C, exprimet E x, vim centrifugam in E, secundum directionem E x, sed est, D v : E y = D C : E F (Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.) et ob triangula rectangula E x y, E F C similia, E y : E x = E C vel D C : E F. Quare, componendo D v : E x = D C², E F². Q. e. d.

* Verùm si meridianus Terræ sit alia curva

quàm circulus v. gr. sit ellipsis, vis centrifuga corporum in æquatore Terræ est ad vim centrifugam quâ corpora perpendiculariter a Terrâ recedunt in latitudine datâ, in ratione compositâ ex ratione radii ad sinum complementi latitudinis illius, et ex ratione radii æquatoris, ad ordinatam ejus ellipseos in eâ latitudine datâ; hinc pro ellipsi ratio vis centrifugæ in æquatore ad vim centrifugam in latitudine datâ exprimitur hoc modo: sit m axis major, n axis minor, r radius, c sinus complementi latitudinis quæsitus, erit vis in æquatore ad vim in eâ latitudine, ut $m r \sqrt{m^2 \times r^2 - c^2 + n^2 c^2} \text{ ad } n^2 c^2$ ut facile deducetur ex ellipseos naturâ; quare si fingatur m = 230 et n = 229 juxta Newtonum invenietur calculo eas vires esse inter se ut 7.56244 ad 3.09660, addatur hæc vis ad vim quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ, et vis tota gravitatis (in Hyp. assumptis) efficeret ut gravia cadendo describerent lineas 2176. 92558. Unde vis tota gravitatis in latitudine Lutetiæ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore Terræ ut 2176. 92558 ad 7.56244 sive ut 287. 86 ad 1.

Hæc autem vis gravitatis in latitudine Lutetiæ non est vis ipsa gravitatis in æquatore, de quâ agitur in reliquâ hâc Propositione, sed parum ab eâ differt, ita ut calculo quodam inito inveniatur quod hæc vis gravitatis in latitudine Lutetiæ sit ad vim gravitatis in æquatore (Terrâ uniformiter densâ suppositâ), ut 1532 ad 1531 ideòque sit vis gravitatis in æquatore ad vim ejus centrifugam ut 287.67 ad 1. Quas quidem varias correctiones, Newtonianis numeris applicamus, ut inde liqueat, quod quamvis numeris ut ita dicam mediocribus sit usus Newtonus et sæpe ex hypothesi Terræ sphericæ ductis, parùm mutationis tamen adfuturum sit, etsi assumantur alii numeri qui ex veriore Terræ figurâ deducerentur.

Ut si aphelium Martis in annis centum conficiat $33'. 20''$ in consequentia respectu fixarum, aphelia Terræ, Veneris, et Mercurii in annis centum conficient $17'. 40'', 10', 53'',$ et $4'. 16''$ respectivè. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hâc Propositione.

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire orbium principales diametros.

Capiendæ sunt hæ in ratione subesquiplicatâ temporum periodicorum, per Prop. XV. Lib. I. ^(b) Deinde sigillatim augendæ in ratione summæ massarum Solis et planetæ cujusque revolventis ad primam duarum mediæ proportionalium inter summam illam et Solem, per Prop. LX. Lib. I.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

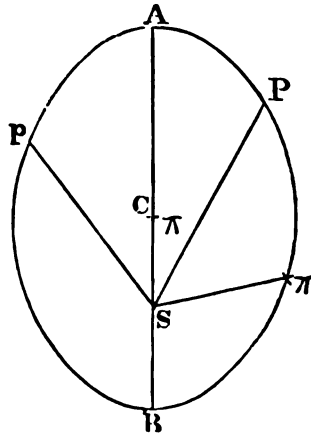
Invenire orbium eccentricitates et aphelia.

^(c) Problema confit per Prop. XVIII. Lib. I.

^(b) *Deinde sigillatim.* Jam capti sunt orbium axes majores in ratione subesquiplicatâ temporum periodicorum, nempe nullâ habita ratione massarum, planetæ spectati sunt tanquam totidem puncta in ellipsis circa immotum in umbilico Solis centrum revolventia. Quoniam verò fit ut propter Solis et planetæ actiones mutuas, planeta ellipsim describat cujus focus est commune gravitatis centrum planetæ et Solis, major axis ellipseos quàm planeta describit circa Solem qui ipse simul revolvitur circa commune centrum gravitatis, est ad axem majorem ellipseos quam idem planeta circa Solem quiescentem eodem tempore periodico describere posset, in ratione summæ massarum Solis et planetæ ad primam duarum mediæ proportionalium inter summam illam et Solem (Prop. LX. Lib. I.) ideoque ut axis major orbitæ corrigatur, augendus est in dictâ ratione. Datur autem ratio inter massas Solis et planetarum, ac proinde datur ratio in quâ orbitalium axes majores sunt augendi. Vide de his not. 64. hujus Libri.

^(c) 75. * *Problema confit.* Sit S Sol, sintque planetæ loca tria P, p, π e Sole visa, et data sit recta B A axis major ellipseos, describatur (per Prop. XVIII. Lib. I.) ellipsis cujus umbilicus est S et axis major A B, quod fit, si ex axe B A demantur longitudines S P, S p, S π et cùm residuis arcus ex punctis P, p, π describantur, in-

tersectio horum trium arcuum erit alter focus ellipseos, quo invento orbita planetæ determinabitur, simulque dabitur distantia Solis a centro



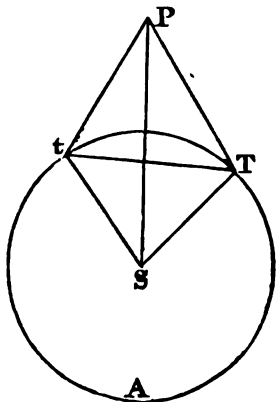
ellipseos, hoc est, excentricitas, notumque erit ellipseos punctum a Sole remotissimum, id est, aphelium.

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, et librationem Lunæ ex ipsius motu diurno oriri.

Patet per motûs legem 1. et Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Jupiter utique respectu fixarum revolvitur horis 9. 56', Mars horis 24. 39'. Venus horis 23. circiter, Terra horis 23. 56', Sol diebus 25½ et Luna diebus 27. 7. hor. 43'. Hæc ita se habere, ex phænomenis manifestum est. (4) Maculæ in corpore Solis ad eundem situm in disco Solis redeunt

Quia vero problema illud supponit data esse tria planetæ loca centrica, hoc est, ex Sole visa, datasque eorum a Sole distantias, hic adjungemus methodum quæ claris, Halleius ex dato tempore periodico, planetæ locum centricum ejusque a Sole distantias invenire docuit. Refert T t A orbitem Telluris, S Solem, sitque P



planeta seu potius locus planetæ ad eclipticam reductus, sive punctum ubi perpendicularis ex planetâ in planam eclipticæ demissâ incidit. Ponatur Tellus in T, observeturque planetæ longitudo geocentrica, ex datâ theoriâ Telluris, dabitur longitudo apparens Solis, idæque dabitur angulus P T S. Post integram planetæ revolutionem, in planeta rursum erit in P, quo tempore Tellus sit in t, ex eo puncto iterum observetur planeta, inveniaturque angulus P t S elongatio planetæ a Sole. Ex datis observationum momentis, dantur loci Telluris in eclipticâ e Sole visa ejusque a Sole distantia, ac proxima in triangulo t S T, dantur latera t S, S T et angulus t S T, quare inveniuntur anguli S t T,

$S T t$ et $latus t T$. Si itaque ab angulis datis $P T S$ et $P t S$, auferatur anguli notī $t T S$, $T t S$, dabuntur anguli $P T t$ et $P t T$; unde in triangulo $P t T$ ex datis angulis unā cum latere $T t$, innoscet $P T$. Deinde in triangulo $P T S$, dantur latera $P T$, $T S$ cum angulo intercepto $P T S$, ideōque dabitur $S P$, quæ distantia planetæ a Sole curtata appellatur, et notus fiet angulus $T S P$, ex quo dabitur locus planetæ heliocentricus. Est autem (ex trigon.) tangens latitudinis geocentricæ planetæ ad tangentem latitudinis heliocentricæ ut distantia planetæ a Sole curtata ad distantiam ejusdem a Tellure curtatam, sed per observationem, nota est latitudo geocentrica planetæ, quare innoscet planetæ latitudo heliocentrica ex quā simul et distantia a Sole curtatā elicietur planetæ a Sole vera distantia, et simili modo vera distantia planetæ a Terrā, unde tandem in triangulo cujus tria puncta sunt Sol, Terra et planeta, omnia latera sunt cognita. Hæc ratione obtineri possunt varia loca centrica planetæ, varique a Sole distantie.

Ceterum hæc fusè variisque adhibitis metho-
dis, explicata reperiuntur in Introductione ad
Veram Physicam Joannis Keill, in Astronomiâ
Physicâ Davidis Gregorii, et potissimum in
Elementis Astronomicis a clariss. Cassino nu-
per editis.

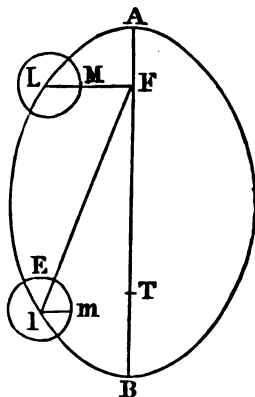
(4) * *Macula in corpore Solis*. Cùm revolutio macularum circa Solem sit admodum regularis, et maculae ipsae vel Soli supermatent vel a Sole parum distent (69) non maculae circa Solem, sed Sol ipse 25½ dierum spatio circiter, circa proprium axem motu vertiginis movetur. Jovem, Venerem et Martem circa axem suum gyrare ex maculis quoque in horumque planetarum corporibus per vices in conspectum redeuntibus colligitur. In Mercurio autem qui Soli proximus est, ob nimum luminis splendorem, et in Saturno ob maximam ejus a Terrâ distantiam maculae nullae hactenus deprehendi poterunt quibus determinaretur eorum vertigo. Attsmen nil obstat quominus ex analogie lege colligamus Mercurium quoque et Saturnum circa axem

diebus $27\frac{1}{2}$ circiter, respectu Terræ; ideòque respectu fixarum Sol revolvitur diebus $25\frac{1}{2}$ circiter. Quoniam verò Lunæ circa axem suum uniformiter revolventis dies menstruus est, hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ejus (*) semper respiciet quamproximè, et propterea pro

suum gyrare. Macularum solarium theoriâ elegantissimè exposuerunt clariss. D. De Lisle in Libro cui titulus, Monumenta quæ ad Astronomiæ Physicæ et Geographiæ progressum conducunt, sæpeque laudatus D. Cassinus in Elementis Astronomicis. De maculis Veneris, ejusque circa axem revolutione, quædam inter astronomos est lis; a Cassino parte 23 horis et 20' absolvi, ex macula sive potius splendore quodam in disco Veneris notabili annis 1666, 1667 compertum fuerat, non ita tamen tutò, ipse enim scribebat de motu Veneris, referente ipsius filio; debiles aded et confusus esse Veneris maculas ut earum terminos accuratè notare non liceat, unde utrum aliquis sit Veneris motus, per eas determinare frustra queritur. Anno verò 1726. D^{mo}. Bianchinus maculas Veneris lunaribus similes diu est persecutus, earumque revolutionem 24 diebus 8. horis absolvi deduxit, circa axem admodum obliquum eclipticæ; in suam autem sententiam D^{mo}. Cassinus filium non adduxit, quia apparentiæ a D^{mo}. Bianchino observatæ per motum 23 horarum explicari poterant, dum parentis observationes, cum hypothesi revolutionis 24 dierum et 8. horarum consentire non possent; hinc quæstio in medio remansit non facilè solvenda, maculæ enim Veneris nonnisi cælo purissimo observari possunt, et Lutetiæ nequidem cum maximis telescopiis videri potuisse narrat idem ill. Cassinus filius.

(*) 76. *Semper respiciet quamproximè.* Sit orbita Lunæ ellipsis A L B A, in cujus umbilico T locatur Terra, ductus ex umbilico radius vector areas ellipticas temporibus proportionales describit (Prop. I. Lib. I.); demissis autem a duobus quibusvis in ellipsos peripheriâ punctis ad alterum umbilicum F rectis L F, l F, angulus L F l erit quamproximè ad quatuor rectos sicut tempus quo arcus L l a Lunâ describitur ad integrum tempus periodicum Lunæ, si ellipsis sit parum excentrica. Jam referat L M meridiani lunaria, hoc est, circuli per axem revolutionis Lunæ planum, quod productum transeat per F, idem planum in quocumque orbitæ ellipticæ puncto locetur Luna, productum quoque per F transibit. Quoniam enim Luna circa axem suum uniformiter revolvit eodem tempore quo circa Tellurem periodum suam absolvit, patet meridiani planum quod Lunâ existente in l. situm L M obtinebat, dum Lunæ centrum aliud quodvis punctum l attingit, ad talem situm l E pervenisse, ut positâ l m parallelâ ad L M, angulus m l E sit ad quatuor rectos sicut tempus quo Luna arcum L l percurrit ad integrum tempus periodicum Lunæ, ideòque (Prop. XI. lib. V. Elem.) angulus m l E est ad quatuor

rectos sicut L F l ad quatuor rectos, ac proinde angulus m l E æqualis est angulo L F l, et ob rectas L F, l m parallelas jacebit l E in directum ipsi l F, hoc est, ubi Luna in l versatur,



ejusdem meridiani planum quod in priori situ L productum etiamnum transit per F. Quare in quocumque lunaris orbitæ puncto centrum Lunæ occurrat, productum ejusdem meridiani planum transit per F.

His præmissis patet eandem ferè Lunæ faciem semper ad Terram converti easdemque ferè lunares maculas observatori terrestri apparere. Cùm enim productum ejusdem meridiani planum per alterum orbitæ lunaris focum F transeat, sitque lunaris orbita parum excentrica, hoc est, non multum distent umbilici F et T, eadem quamproximè Lunæ facies Terræ obvertitur. Si verò accuratè observatis lunariis maculis, Lunæ facies ad Terram conversa diligentius consideretur, non eadem præcisè facies a nobis videbitur. Quoniam enim ejusdem meridiani planum L M non ad Terram T, sed ad alterum focum F dirigitur, patet Lunæ in L existentis hemisphærium e Tellure T visum, aliquantulum esse diversum ab illo quod videtur, dum Luna reperitur in l; nam pars hemisphærii lunaris versus plagam B quæ antea occultabatur fit conspicua, et contrâ pars hemisphærii alterius versus R quæ antea apparebat, oculis evanescit; motus hic Lunæ e Terrâ apparens, quo fit ut quædam maculæ in partem a Terrâ aversam se recipiant, dum aliæ ex parte aversâ in conspectum prodeunt, libratio Lunæ in longitudinem appellatur. Librationem hanc bis in quolibet

situ umbilici illius deviat hinc inde a Terrâ. Hæc est libratio Lunæ in longitudinem: Nam ^(f) libratio in latitudinem orta est ex latitudine Lunæ et inclinatione axis ejus ad planum eclipticæ. Hanc librationis lunaris theoriam ^(g) D. N. Mercator in Astronomiâ Suâ, initio anni 1676 editâ,

mensæ periodico restitui manifestum est, quando nempe Luna in apogæo A aut perigæo B versatur; in utroque enim situ ejusdem meridiani planum quod protensum in F incidit, transit citius per T. Cæterum hæc libratio omnibus inæqualitatibus obnoxia est quibus afficitur motus in longitudinem. (Vid. Corollaria Prop. LXXVI. Lib. I.)

^(f) 77. * *Libratio in latitudinem.* Quoniam axis circâ quem Luna revolvitur, non est ad lunarem orbitam normalis, sed ad illam inclinatus, manifestum est Lunæ polos per vices ad Terram vergere; idèque Lunæ maculas nunc huic nunc illi polo vicinas e Terrâ spectari. Quia verò axis Lunæ est ferè ad planum eclipticæ normalis, patet hanc librationem pendere a situ Lunæ respectu nodorum orbitæ lunaris cum eclipticâ, seu ab ipsâ latitudine Lunæ. Ex illâ libratione oritur, ut dum Luna versùs austrum ab eclipticâ maximè recedit, hoc est, dum in limite australi versatur, Lunæ polus borealis et aliquæ ultrâ polam lunaris globi partes a Sole illustrentur, intereundem polus australis et aliquæ citrà hunc polam regiones lunares in tenebris immerguntur; si ergò in hoc situ contingat Solem in eadem plagâ cum limite australi versari, Luna a conjunctione cum Sole ad nodum ascendentem, hoc est, versùs boream progrediens, has regiones maculasque polo boreali vicinas oculis subducet, dum interim ab oppositâ plagâ aliæ cum polo australi regiones e tenebris emergunt; contrariùmque accidit descendente Lunâ novâ a limite boreali; borealiores nempe Lunæ partes paulatim in lucem e tenebris proripent, dum australiores evanescent.

^(g) 78. D. N. Mercator. Hic transcribemus N. Mercatoris verba. "Harum tamen variarum atque implicitarum librationum (Lunæ scilicet) causas, hypothesi elegantissimâ explicavit nobis vir cl. Isaac. Newton cujus humilitati hoc et aliis nominibus plurimum debere me habens profiteor. Hanc igitur hypothesin lectori gratificaturus, exponam verbis, et potero, nam delineationes in plano vix sufficiunt huic negotio. Itaque reversus ad globum, cogita nunc illum representare spheram in quâ movetur Luna cujus centrum occupet Tellus, ipsum verò Lunæ globum credito poli et axe suo instructum circâ quem revolvatur motu æquabili semel mense sydereo, dum a firâ aliquâ digressa ad eandem revertitur, et æquator lunaris ad firmamentum constans intelligatur congruere plano horizontis lignei, et polus æquatoris lunaris in firmamento imminet polo Boreo globi ad zenith elevato. Orbitam verò Lunæ concipito partim

"suprà horizontem ligneum attolli, partim verò
"infra eundem deprimi, quemadmodum in hoc
"situ globi conspicitur ecliptica, licet angulus
"æquatoris lunaris et ejus orbitæ non sit fortè
"æquè magnus atque hic quem globus exhibet.
"Deindè finge tibi globulos duos æquales
"quorum uterque polis, æquatore et meridiano
"unico primario insigniatur et uterque filo sus-
"pendatur alterutri polorum alligato. Horum
"alter referat Lunam fictitiam motu æquabili
"secundum horizontis lignei circumlatam, at-
"que eodem tempore circâ axem suum revolu-
"tam respectu firmamenti, ità ut planum meri-
"diani primarii lunaris perpetuò transeat per
"centrum Terræ. Alter verò globulum veram
"Lunam imitatus in orbita sua feratur motu
"inæquali, nunc suprà horizontem ligneum
"emergens, nunc infra eundem descendens, ità
"ut planum æquatoris hujus Lunæ veræ sem-
"per parallelum maneat plano horizontis lignei,
"et planum meridiani primarii ejusdem Lunæ
"veræ semper parallelum plano meridiani pri-
"marii Lunæ fictæ. Ità fit ut Luna ficta ean-
"dem nobis faciem obvertens semper nulli pro-
"prie librationi sit obnoxia. At Luna veræ,
"dum a perigæo pergit ad apogæon præcedens
"Lunam fictam, meridianum suum primarium
"ostendit in medietate sinistrâ sui disci tot gra-
"dibus abeuntem a medio quot sunt inter lon-
"gitudinem Lunæ veræ et fictæ. Ab apogæo
"verò ad perigæon descendens Luna veræ sequi-
"tur fictam, atque tum meridianus primus veræ
"Lunæ recedit ab ejus medio ad dextram, hoc
"est, maculæ omnes vergunt in occasum, et
"cùm differentia inter mediam et veram Lunæ
"longitudinem in quadraturis evadat major,
"propter evectionem systematis lunaris a centro
"Telluris, hinc est quod in quadraturis libra-
"tiones in longum cernuntur majores. Simili-
"ter intelligitur causa librationis in latum,
"quando Luna superato nodo ascendente, sive
"sectione horisonti lignei et orbitæ suæ, tendit
"ad limitem boreum, tum enim nobis in centro
"sphaeræ positus, polus Lunæ boreus et quæ
"sunt circâ eum maculæ absconduntur, et polus
"australis cum suis maculis in conspectum ve-
"nit, undè maculæ omnes conspicuæ in boream
"tendere videntur; contrarium accidit, Lunâ
"ad limitem australem accedente. Ab eisdem
"causis procedit macularum ex parte lucidâ in
"obscuram transitus et vicissim. Nam in li-
"mite australi polus Lunæ boreus a Sole illus-
"tratur, et quicquid est sonæ frigide arctico
"lunari inclusum, dum frigida australis in tene-
"bris versatur. Quod si igitur Solem concipias
"in eadem plagâ cum limite australi et Lunam

ex literis meis plenius exposuit. Simili motu ^(*) extimus Saturni satelles circa axem suum revolvi videtur, eâdem sui facie Saturnum perpetuò respiciens. Nam circum Saturnum revolvendo, quoties ad orbis sui partem orientalem accedit, ægerrimè videtur, et plerumque videri cessat: id quod evenire potest per maculas quasdam in eâ corporis parte quæ Terræ tunc obvertitur, ut Cassinus notavit. Simili etiam motu satelles extimus Jovialis circa axem suum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis Jovi aversâ maculam habeat quæ tanquam in corpore Jovis cernitur ubicumque satelles inter Jovem et oculos nostros transit.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.

(¹) Planetæ sublato omni motu circulari diurno figuram sphaericam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. (²) Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia si fluida sit, ascensu suo ad æquatorem

“ post conjunctionem indè procedere ad nodum
“ ascendentem, tum maculæ superiores apud
“ polum boreum sitæ, paulatim cum suo polo a
“ luce in tenebras concedunt, dum inferiores
“ maculæ cum polo australi ex tenebris in lucem
“ prorepunt. Contrarium evenit semestri
“ post, cùm Sol accessit ad limitem Lunæ boreum.”
Hactenus N. Mercator: sed plenior librationum lunarium expositio habetur in Elementis Astronomicis clariæ. Cassini, ubi vir doctiss. varias harumce librationum apparentias respectu fixarum et Solis determinat, docetque methodum quâ ad quodlibet tempus datum possit definiri apparens macularum lunarium situs.

(²) * *Extimus Saturni satelles*, tertio satellite sæpè major apparet, posteaque decrescit ac tandem juxta periodum nondum probe notam evanescit; id tamen ut plurimum contingit dum satelles in orbitæ suæ orientali parte respectu Saturni versatur, rursum deinde in conspectum redit. Causa hæc esse videtur, quod scilicet hemisphaerii satellitis pars quæ ad nos conversa est, maculis obscurata præ luminis tenuitate cerni non possit, revolvente autem circa axem satellite, ad hemisphaerium oppositum transeunt maculæ, iterumque satelles fit conspicuus. Cùmque in eâ orbis sui parte quæ orientem spectat, obscuratus satelles semper observetur, in alterâ verò parte nunquam, valdè probabile est eandem hujus satellitis faciem planities primario semper ob-

verti. Idem quoque simili argumento patet in extimo Jovis satellite, nisi dicatur illas satellitum maculas fuliginum instar modò nasci, modò dissipari; sed ubi apparentiæ aliquæ ex duplici causâ ortum habere possunt, anteponendæ sunt explanationes quæ a motu locali repetuntur. Alios Saturni Jovisque satelletes, Lunæ instar, planetis primariis invariata manifestare faciem ex analogiæ lege colligunt multi. Rem aliter se habere censet clariæ. Daniel Bernoullius in Disquisitionibus Physico-Astronomicis an. 1734. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio decoratis. Has consulat lector.

(¹) * *Planetæ sublato omni motu circulari*. Patet (per not. 172. Lib. II.). Si planetarum materia ponatur fluida, visque gravitatis ad unum centrum dirigatur.

(²) * *Per motum illum circularem*. Quoniam planetæ circa axem suum revolvuntur, planetarum partes a centrâ circulorum in quibus moventur, recedere conantur, eoque major est vis illa centrifuga quò majores sunt circulorum quos describunt peripheriæ (Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.). Sed æquator est circulus maximus, circuli autem versùs polos continuò decrescunt, quare planetarum partes magis a centro æquatoris quàm a centrâ parallelorum recedere conantur, ideoque si fluida sit planetarum materia, ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet.

diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus astronomorum observationibus) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argumento, nisi Terra nostra paulo altior esset sub æquatore quàm ad polos, maria ad polos subsiderent, et juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noster circa annum 1635 mensurando distantiam pedum Londinensium 905751 inter Londinum et Eboracum, ac observando differentiam latitudinum 2 gr. 28'. collegit mensuram gradûs unius esse pedum Londinensium 367196, id est hexapedarum Parisiensium 57300.

(†) Picartus mensurando arcum gradûs unius et 22'. 55". in meridiano inter Ambianum et Malvoisinam, invenit arcum gradûs unius esse hexa-

(†) * *Picartus mensurando arcum invenit arcum gradûs unius esse hexap. 57060.* * Circa hæc Picarti mensuram observandum, ill. Cassinus juniorem distantiam terrestrem inter parallelos Malvoisinæ et Ambiani 42 hex. imminuendam statuisset, ipsum verò arcum coelestem propter refractiones $1\frac{1}{2}''$ esse augendum; unde arcus gradûs unius evadit hexap. 57010. Novissimè verò D. de Maupertuis arcum coelestem inter Lutetias et Ambianum metitus, multo minorem eum deprehendit quàm esse debuisset secundum observationes Picarti, quare servatis mensuris terrestribus Picarti, arcum unius gradûs 57183 hex. determinavit. Hæc paulo fusiùs sunt diducenda.

I. Cùm mensura Picarti a Malvoisina ad Sourdorem procedat, et hinc ad Ambianum; Picartus distantiam a Malvoisina ad Sourdorem per duas triangulorum series determinat; unam præcipuam vocat quoniam ea ipsa erat quâ uti primùm constituerat, sed cùm aliquid dubii in eâ observasset, alteram instituit, quam priori anteposuit quia observationum in eâ factarum certior sibi videbatur et accuratè consentiebat cum basi proximâ actu mensuratâ: Ill. verò Cassinus distantiam inter parallelos Malvoisinæ et Sourdoris ex priori serie determinat 68325 $\frac{1}{2}$ hex. dum eandem distantiam Picartus, cui ill. de Maupertius suffragatur, facit hex. 68347.

Differunt iterum Picartus et illustrissimus Cassinus in distantia inter Sourdorem et Ambianum, eam enim distantiam Picartus ex suis

mensuris hex. 11161 $\frac{3}{4}$ invenit, Cassinus verò hex. 11135 $\frac{1}{4}$: discriminis autem hujus ratio duplex est, nam cùm uterque triangulos formare incipiat in lineâ quæ interceptur inter Sourdorem et Montem Desiderium, ill. Cassinus eam lineam assumit hex. 7116 $\frac{1}{2}$ juxta priorem seriem triangulorum Picarti, et Picartus alteram seriem verificatam per basin proximam actu mensuratam anteponens, eam lineam 7122 $\frac{1}{2}$ hex. facit: cùm verò diversis triangulis inde ad Ambianum usi sint, in iis triangulis occurrit sensibilis differentia quas sese prodit in angulo Sourdori facto inter lineas inde ad Ambianum et Montem Desiderium protensas, nam is Picarto est 137°. 56'. 10". angulus autem idem a Cassino determinatur 137°. 53'. 30", ex quâ differentia 2'. 40". et ex baseos inter Sourdorem et Montem Desiderium diversitate, oriri potuit discrimen illud in distantia inter Sourdorem et Ambianum.

In arcu autem coelesti a Picarto mensurato, refractionis correctionem adhibet Cassinus quam neglexerat Picartus; cùm ergo invenisset distantiam genu Cassiopeæ a zenith loci in quo observabat, et qui erat 18 hex. Malvoisinâ meridionalior 9°. 59'. 5". versus septentrionem, et cùm ejus stellæ distantiam a zenith loci 75 hex. meridionaliorem quàm ædes Ambiani 8°. 36'. 10". invenisset, arcum inter zenith eorum locorum juxta Malvoisinam et Ambianum interceptum facit Picartus 1°. 22'. 55". ut refert Newtonus.

Verùm propter refractionem augendas esse has distantias a zenith statuit Cassinus, ita ut

pedarum Parisiensium 57060. (§) Cassinus senior mensuravit distantiam in meridiano a villâ Collioure in Roussillon ad observatorium Parisiense;

prima distantia $10''$, altera $8\frac{2}{3}''$. fiat: cùm ergo prior fiat - - - - - $9'' - 59 - 15$

Altera - - - - - $8 - 36 - 18\frac{2}{3}$

Arcus interceptus inter zenith locorum observatio-
nis sit - - - - - $1 - 22 - 56\frac{2}{3}$

Ex his ergo correctionibus tam in arcu celestis quàm in mensuris terrestribus, a Picarto observatis, deducit ill. Cassinus arcum unius gradûs esse 57010 hex.

II. Ill. de Maupertuis mensuras terrestres, quas Picartus adoptavit, admittens, arcum celestem mensuravit instrumento, a solertissimo Graham accuratissimè constructo; cùm autem priores sectores circa axem immotum, ex quo filum verticale pendet, revolverentur, et divisiones subtiliores in sectoris limbo per lineas transversas signarentur, in hoc instrumento telescopium in suâ summitate duos cylindros adjunctos habet, circa quos cum sectore inferius adfixo revolvitur, et ex quorum centro pendet filum verticale quo notentur gradus in limbo sectoris; divisiones in eo limbo gradus et eorum partes octavas tenuissimis punctis indicant, nihilque præterea, et ad observationem faciendam ita constituitur instrumentum, ut filum pendulum alicui e divisionibus accuratè applicetur, idque microscopio cum lumine juxta limbum collocato agnoscitur; tum cochleâ pellitur instrumentum donec objectum in axe telescopii cernatur, et numerus gyrorum cochleæ, partesque singuli gyri numerantur in limbo circuli horologii instar cochleæ adnexi, ita ut minimi cochleæ progressus maximè sensibiles fiant. Tali itaque instrumento cujus radius est octo pedum unâ uncia demptâ, observationes instituit ill. de Maupertuis Lutetiæ in loco 1105 hex. magis septentrionali quàm ædes B. Virginis, et Ambiani in loco 984 meridionali sede ejus urbis. Inde ex stellis et Persei, et Draconis, arcum celestem inter zenith eorum locorum interceptum $1^{\circ} 1' 12''$. determinavit, correctionibus præcessionis æquinotiorum et aberrationis lucis adhibitis. Hinc cùm juxta Picartum inter parallelos Malvoisinæ et Ambiani sint 78907 hex. inter Malvoisinam et ædes B. Virginis Lutetiæ sint 198764 hex. manent inter utramque ædem 595304 hex. ex quibus detractis 12034 hex. propter observationum loca, invenitur arcum $1^{\circ} 1' 12''$. respondere mensuræ 58327. hex. ideoque arcum unius gradûs hexapedas 57183. in eâ latitudine continere.

Verùm hic non dissimulandum qualis quantusque error observationi Picarti adscribatur, ex hac novissimâ ill. de Maupertuis observatione; et ut ille error rectè æstimetur, corrigendæ sunt ejus observationes celestes non tantum per refractionem, sed etiam per æquinotiorum præcessionem et aberrationem lucis; etenim cùm

eodem tempore factæ non fuerint observationes a Picarto Malvoisinæ et Ambiano, sed inter eas mensis intervallum effluxerit, interea per præcessionem æquinotiorum augebatur stellæ genu Cassiopæ declinatio $1\frac{1}{2}''$. ut ipse Picartus observat, simulque propter aberrationem lucis $8''$. circiter augeri eam declinationem nunc constat, quare stella quæ Ambiani observabatur non erat in eodem cœli puncto quo fuerat cùm Malvoisinæ observaretur, sed erat 10 fere secundis ad septentrionem provector; dum ergo observabatur eam stellam distare a zenith Ambiani $8^{\circ} 36' 18\frac{2}{3}''$. (adhibita refractionis correctione) punctum fixum quod fuerat Malvoisinæ observatum $8^{\circ} 36' 8\frac{2}{3}''$. a zenith duntaxat distabat, et cùm id punctum Malvoisinæ $9^{\circ} 59' 15''$. a zenith distasset, arcus inter duo zenith interceptus erat $1^{\circ} 23' 6\frac{2}{3}''$. (non $1^{\circ} 23' 56\frac{2}{3}''$.) qui respondet 78850. hex. unde gradûs unius mensura fiet duntaxat 569264 hexapedarum; sive ut confirmatur hac observatio cum observat. ill. de Maupert. fiatque si 583154 hex. respondeant $1^{\circ} 1' 12''$. Quot gradibus respondebunt 78850. Invenietur $1^{\circ} 22' 45\frac{1}{4}''$, loco $1^{\circ} 23' 6\frac{2}{3}''$. ita ut error in observatione celesti Picarti sit $20''$.

Singulare quid occurrit in ipsâ Picarti narratione; postquam enim differentias inter zenith Malvoisinæ et Soudronis, Malvoisinæ et Ambiani dedit, addit: "Differentia temporis quod effluxit inter observationes, requireret ut ex "priori differentia $1''$. demeretur, ex posteriori " $1\frac{1}{2}''$. (propter æquinotiorum præcessionem;) "sed hanc correctionem, ne minutus sectari "videamur, omisimus." Si mutatio declinationis per præcessionem æquinotiorum orta ex his differentis demenda foret, mutatio declinationis propter aberrationem pariter foret demenda siquidem fit in eandem partem, itaque cùm arcus inter Malvoisinam et Ambianum adhibita correctione refractionis, sit $1^{\circ} 22' 56\frac{2}{3}''$. demptâ præcessionis et aberrationis variatione $10''$. circiter, maneret is arcus $1^{\circ} 22' 46\frac{2}{3}''$. ad unam secundam, qualis secundum dñm. de Maupertuis observationem inveniri debuisset.

Verùm ut correctio præcessionis et aberrationis demenda foret, ut vult Picartus, oporteret ut observationes primùm Ambiano, postea Malvoisinæ fuissent factæ, sed ita notantur illæ observationes, Septembri Malvoisinæ et Octobri Ambiano: si itaque rectè ratiocinatus sit, sed malè tempora notaverit, elegantissimè consentient ejus observationes cum accuratissimis postea factis; sin bene tempora notaverit, sed malè fuerit ratiocinatus, fatendum erit errorem circiter $20''$. inter duas ejus observationes esse distribuendum, stantibus observationibus ill. de Maupertuis $6''$. aut $7''$. secundis propius accederent ad has obser-

et filius ejus addidit distantiam ab observatorio ad turrem urbis Dunkirk. Distantia tota erat hexapedarum $486156\frac{1}{2}$ et differentia latitudinum villæ

vationes illæ quas instituit Picartus a Malvoisinâ ad Sourdonem, ita ut error $12''$. duntaxat, inter duas observationes distribuendus superesset.

(5) * Cassinus senior mensuravit distantiam in meridiano a villâ Collioure ad observatorium Parisiense; et filius addidit distantiam ab observatorio ad turrem urbis Dunkirk.

* Has duas mensuras in unam summam conjicit Newtonus, quia cùm Cassinus senior gradum majorem quàm Picartus inveniit, Cassinus filius minorem, conjunctis mensuris obtinetur gradus mediocri proximè equalis mensuræ gradus a Picarto assignatæ, quem ut gradum Telluris, ut sphericæ consideratæ, assumit Newtonus, verùm hic duo sunt notando, 1^o. utitur Newtonus isto gradu mediocri quasi foret æquatoris gradus, qui quidem isto major est, sed inde parum mutatur sequens calculus ut liquebit si eundem instituiamus assumpto gradu æquatoris isto majore, v. gr. 57226 hex. ut deduceretur ex theoriâ ipsius Newtoni; et gradum in 45 . gradu faciendo 57100 hex. .

2^o. Distinguendæ sunt observationes Cassini senioris et filii; hæc enim propter aberrationem lucis correctione indiget, mensuræ verò ill. Cassini Patris a villâ Collioure ad observatorium, arcum coelestem $6^{\circ} 18' 57''$. continet et respondet hexapedis 360614 . (ad maris libellam reductis mensuris) unde gradus fit 57097 hex. verificatæ sunt mensuræ in utroque extremo; nec in eis gravis error est metuendus, cùm aptè consenserint triangulorum calculi cum ultimis lineis seu basibus actu mensuratis; error verò qui in observatione coelesti occurrere potest, singuli gradus mensuram parùm immutat, quia in sex gradus et ultra distribuitur; cùm verò iisdem anni temporibus tam Lutetiæ quàm in villâ Collioure observationes institutæ fuerint, aberratio locis calculum arcus coelestis non immutavit: hinc in numeris proximis rotundis gradus in latitudine graduum 45.57100 hexapedarum assumi potest satis tutò.

3^o. Quod observationes ill. Cassini filii, cùm inter 15. Julii et 4. Sept. factæ fuerint observationes coelestes quibus determinaretur arcus inter zenith urbis Dunkirk et observatorii interceptus, aberrationis correctio illis est adhibenda quæ tunc temporis nondum erat cognita; verùm illam correctionem necessariam esse tantò minus dubium est, quod cùm is arcus per observationes stellæ γ Draconis fuerit determinatus, ejus ipsius stellæ aberratio ab ill. Bradleio fuerit observata (vid. Trans. Phil. Vol. XXXV. pag. 637.) et nuperime a D. le Monnier; immediatis ergo experimentis constat ejus stellæ declinationem augeri a mense Julio ad Septembrem, ita ut cùm Lutetiæ seriùs observata sit, $11\frac{1}{2}$ secundis polo tunc vicinior esse potuit quàm cùm in urbe Dunkirk observata fuerat, idèque totidem secundis zenith remotior apparebat quàm punctum

fixum quod in urbe Dunkirk fuerat observatum, unde cùm ex distantia a zenith Lutetiæ detraheretur distantia ejusdem stellæ a zenith urbis Dunkirk, arcus residuus illis $11\frac{1}{2}$ sec. est mutandus, et cùm residuum inveniit ill. Cassinus $2^{\circ} 12' 9\frac{1}{2}''$. est reducendus ad $2^{\circ} 11' 58''$, et cùm is arcus 125454 hexapedis respondere ab ill. Autore statuatur, arcus unius gradus fiet hex. 57038.5 ped.

Verùm minor dissensus inter observationes ill. Cassini filii et dⁿⁱ. de Maupertuis apparebit si attendatur, partem illius dissensus oriri ex eo quòd, dum mensuris Picarti uterentur, diversas ejus triangulorum series adoptaverint; quare ut conferantur eorum inventa, reducendæ sunt eorum supputationes quasi eadem serie triangulorum Picarti uterentur ambo: v. gr. supponatur utrumque assumpsisse eam seriem triangulorum quam ipse Picartus admisit, sed ad Sourdonem usque, et inde (quia ill. Cassinus propriis suis triangulis distantiam a Sourdone ad Ambianum determinavit) assumatur ea distantia qualis ex triangulis ill. Cassini deduceretur si modo priori serie usus fuisset, et reliqua ejus triangula usque ad urbem Dunkirk in eadem proportionem augeantur; hinc iste emerget calculus.

Primò tota distantia inter parallelos observatorii et Sourdonis erit ex Picarto - 49926 hex. 3 ped.

Secundò; distantia inter parallelos Sourdonis et Ambiani est ex Cassino $10539\frac{1}{2}$ hex. assumptâ basi $7116\frac{1}{2}$; sed in alterâ serie triangulorum eadem basis erat $7122\frac{1}{2}$ hinc assumptâ hac mensurâ, distantia parall. inter Sourdonem et Ambianum ex triangulis ill. Cassini erit - - 10547 hex. 4 ped.

Tota ergo distantia inter parallelos Sourdonis et Ambiani erit - - - - - 60474 - 1

Tertiò distantia inter parallelos Ambiani et urbis Dunkirk est ex Cassino 65109 hex. 1 ped., suppositâ basi $7116\frac{1}{2}$, si ergo supponatur ea linea $7122\frac{1}{2}$ fiet distantia inter parallelos Ambiani et urbis Dunkirk ex triangulis ill. Cassini. - - 65162 hex. 3 ped.

Tota ergo distantia inter Observatorium et parallelum urbis Dunkirk fiet 125636 - 4 et detractis 98 . hex. pro locis observationum coelestium et $2\frac{1}{2}$ hex. pro libellâ supersunt 125536 hex. $\frac{1}{2}$, quæ respondent $2^{\circ} 11' 58''$. unde arcus unius gradus invenitur 57076 : 2.

Pariter in observatione dⁿⁱ. de Maupertuis cùm sint inter parallelum observatorii et sedis Ambiani 60474 : 1. et propter observationum coelestium loca 2159 hex. sint detrahendæ, arcus

Collioure et urbis Dunkirk erat graduum octo et $31'. 12\frac{1}{2}''$. Unde arcus gradûs unius prodiit hexapedarum Parisiensium 57061. Et ex his mensuris colligitur ambitus Terræ pedum Parisiensium 123249600, et semidiameter ejus pedum 19615800, et hypothesi quod Terra sit sphaerica.

In latitudine Lutetiæ Parisiorum corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describit pedes Parisienses 15. dig. 1. lin. $1\frac{1}{2}$ ut supra, (†) id est, lineas 2173 $\frac{1}{2}$. Pondus corporis diminuitur per pondus aëris ambientis. (¹) Ponamus pondus amissum esse partem undecimam millesimam ponderis totius, et corpus illud grave cadendo in vacuo describet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius secundi.

Corpus in circulo ad distantiam pedum 19615800 a centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56'. 4''. uniformiter revolvens tempore minuti unius secundi (²) describet arcum pedum 1433,46, cujus sinus versus est pedum 0,0523656, seu linearum 7,54064. (³) Ideoque vis, quâ gravia

inter observationes dⁿⁱ. de Maupertuis observatus qui est $1^{\circ}. 1'. 12''$. respondebit hex. 58315 : 1. Unde gradus erit 57171 $\frac{1}{2}$.

Ut itaque verus dissensus inter observationem ill. Cassini et dⁿⁱ. de Maupertuis habeatur, fiat sicut 57171 $\frac{1}{2}$ ad 125536 $\frac{1}{2}$ ita unus gradus ad quartum, invenietur arcus $2^{\circ}. 11'. 45''$, qui $13''$. duntaxat differt ab arcu $2^{\circ}. 11'. 58''$. quem ill. Cassinus observavit; quæ differentia inter quatuor observationes cœlestes et mensuras terrestres distributa, efficeret conclusiones uniformes: ergo illæ observationes nedum inter se pugnent, iis differentiolis tantum discrepent, quæ inevitabilibus accidentibus debentur.

Interea satis liquet quod si in unam summam conjicerentur mensuræ ill. Cassini patris et filii, diminuendus esset arcus totalis $12''$. propter correctionem aberrationis lucis, cui obnoxia est observatio ill. Cassini filii, et mensuræ terrestres forent augendæ, quia ex observatione dⁿⁱ. de Maupertuis additur pondus rationibus quibus inter duas series triangulorum dⁿⁱ. Picarti ea præponenda censcatur quam Picartus præstulerat, et quam ill. Cassinus neglexerat, imo et probabile fit errores minimos inevitabiles, eam in partem conspirasse ut arcus cœlestis major vero videretur ill. Cassino et mensuræ terrestres vero minores; quibus omnibus perpensis, magnitudinem unius gradus in 45° . lat. gradu, circa medium mensuræ a Cassino patre institutæ rotundis numeris satis tutò 27100. hex. assumi posse liquet.

(†) Id est, lineas 2173 $\frac{1}{2}$. Ex accuratissimis observationibus dⁿⁱ. de Mairan (Cap. VI. Lib. III. fig. Terræ determ. a D. de Maupertuis) longitudo penduli ad singulas secundas vibrans est linearum 440. 57. hinc, cum juxta Prop. XXVI. Horol. Oscill. Hugh. sit circuli circumferentia ad diametrum ut $1''$. ad tem-

pus descensûs per dimidiam altitudinem penduli, sive per lineas 220. 28 $\frac{1}{2}$, sint verò quædam tempora ut spatia descensu verticali his temporibus descripta, erit 9.8696 ad 1 (Quadratum circumferentiæ ad quadratum diametri 1.) sicut spatium uno secundo descriptum ad 220.28 $\frac{1}{2}$ lin. Ergo corpus grave in latitudine Lutetiæ tempore minuti unius secundi describit lineas 2173. 631356. paulò minus quam Newtonus assignat, ejus undecima millesima pars foret .197602. Quare id grave in vacuo cadendo describeret altitudinem 2173. 828958.

(¹) * Ponamus pondus amissum. Quoniam corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris, et plumbum est ad aquæ gravitatem specificam ut 11,345 ad 1000; aqua verò ad aërem paulò minus quam 1000 ad 1, hinc gravitas plumbi est ad gravitatem aëris ferè ut 11000 ad 1, hinc ergo plumbum amittit in aëre ponderis sui partem undecimam millesimam, itaque in vacuo augetur pondus plumbi parte undecimâ millesimâ ponderis totius, hoc est spatia eodem tempore descripta undecimâ millesimâ totius spatii descripti parte augeri debent: fiat ergo 11000 ad 11001 ut 2173 $\frac{1}{2}$ ad quartum, illud quantum erit 2173.966 ergo poni potest quàm proximè spatium tempore minuti unius secundi descriptum in vacuo a plumbo, ideoque a quovis alio corpore gravi (nam omnia gravia equali celeritate in vacuo cadunt) linearum 2174.

(²) * Describet arcum ped. Computum fitur eodem planè modo ac not. 63.

(³) * Ideoque vis. Vires uniformes sunt ut spatia dato tempore descripta, sed est spatium vi gravitatis tempore unius minuti secundi descriptum 2174. lin. spatium autem vi centrifugæ descriptum ut sinus versus, hoc est, lin. 7. 54064.

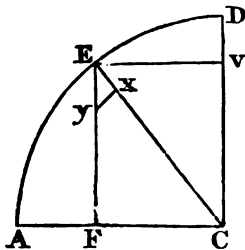
* Si gradus æquatoris sit major 57061 hex.,

descendunt in latitudine Lutetiæ, est ad vim centrifugam corporum in æquatore a Terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in æquatore Terræ est ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt a Terrâ in latitudine Lutetiæ graduum 48. 50'. 10", (°) in duplicatâ ratione radii ad sinum complementi latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim quâ gravia descendunt in latitudine illâ Lutetiæ, et corpus in latitudine illâ vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describet lineas 2177,267, seu pedes Parisienses 15 dig. 1. et lin. 5.267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore Terræ ut 2177,267 ad 7,54064 seu 289 ad 1.

v. gr. si 57226 hex. sumatur, erit iste sinus versus linearum 7. 56244, ideòque vis quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ, est ad vim centrifugam corporum in æquatore ut 2173. 828958 ad 7, 56244.

(*) 81. • *In duplicatâ ratione radii.* Quadrans circuli A E D revolvatur circa radium A C, ducatur radius C D ad A C normalis, ip-



siq̃ue parallela agatur ordinata E F, erit vis centrifuga in D secundum directionem D C sive E F, ad vim centrifugam in E secundum directionem C E, in ratione duplicata radii C D ad ordinatam E F quæ est sinus complementi arcus seu latitudinis E D. Exprimat enim D v vim centrifugam in D secundum directionem D C, et recta E y, exprimat vim centrifugam in E secundum directionem E F, ductâ perpendiculari y x ad rectam E C, exprimet E x, vim centrifugam in E, secundum directionem E x, sed est, D v : E y = D C : E F (Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.) et ob triangula rectangula E x y, E F C similia, E y : E x = E C vel D C : E F. Quare, componendo D v : E x = D C², E F². Q. e. d.

• Verum si meridianus Terræ sit alia curva

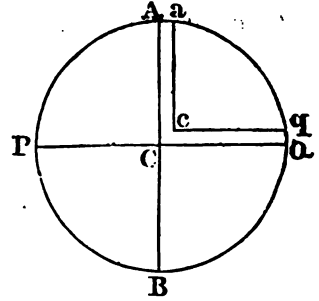
quàm circulus v. gr. sit ellipsis, vis centrifuga corporum in aequatore Terræ est ad vim centrifugam quâ corpora perpendiculariter a Terrâ recedunt in latitudine datâ, in ratione compositâ ex ratione radii ad sinum complementi latitudinis illius, et ex ratione radii æquatoris, ad ordinatam ejus ellipseos in eâ latitudine datâ; hinc pro ellipsi ratio vis centrifugæ in aequatore ad vim centrifugam in latitudine datâ exprimitur hoc modo: sit m axis major, n axis minor, r radius, c sinus complementi latitudinis quæsita, erit vis in aequatore ad vim in eâ latitudine, ut

$$m : r \sqrt{m^2 \times r^2 - c^2} + n^2 c^2 \text{ ad } n^2 c^2 \text{ ut}$$

facile deducetur ex ellipseos naturâ; quare si fingatur $m = 230$ et $n = 229$ juxta Newtonum invenietur calculo eas vires esse inter se ut 7.56244 ad 3.09660, addatur hæc vis ad vim quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ, et vis tota gravitatis (in Hyp. assumptis) efficeret ut gravia cadendo describerent lines 2176. 92558. Unde vis tota gravitatis in latitudine Lutetiæ erit ad vim centrifugam corporum in aequatore Terræ ut 2176. 92558 ad 7.56244 sive ut 287. 86 ad 1.

Hæc autem vis gravitatis in latitudine Lutetiæ non est vis ipsa gravitatis in æquatore, de quâ agitur in reliquâ hac Propositione, sed parum ab eâ differt, ita ut calculo quodam initio inveniatur quod hæc vis gravitatis in latitudine Lutetiæ sit ad vim gravitatis in æquatore (Terrâ uniformiter densâ suppositâ), ut 1532 ad 1531 idæque sit vis gravitatis in æquatore ad vim ejus centrifugam ut 287.67 ad 1. Quas quidem varias correctiones, Newtonianis numeris applicamus, ut inde liqueat, quod quamvis numeris ut ita dicam mediocribus sit usus Newtono et sæpe ex hypothesi Terræ sphericæ ductus, parùm mutationis tamen adfuturum sit, etsi assumantur alii numeri qui ex veriore Terræ figurâ deducerentur.

Unde si $A P B Q$ figuram Terræ designet ^(P) jam non amplius sphaericam, sed revolutione ellipseos circum axem minorem $P Q$ genitam; sitque $A C Q q c a$ canalis aquæ plena, a polo $Q q$ ad centrum $C c$, et inde ad æquatorem $A a$ pergens: ^(q) debet pondus aquæ in canalis crure $A C c a$, esse ad pondus aquæ in crure altero $Q C c q$ ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, et pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex Propositionis XCI. Corol. 2. Lib. I.) computationem inundo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materiâ, motuque omni privaretur, ^(r) et esset ejus axis $P Q$ ad diametrum $A B$ ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in Terram foret ad



^(P) * Jam non amplius sphaericam, sed revolutione ellipseos circum axem minorem $P Q$ genitam. * Terram non multum a figurâ sphaericâ discedere ex eclipsibus Lunæ patet; magis adhuc ad formam ejus ellipseos accedere cujus axes forent æquales diametro æquatoris, et distantie polorum Terræ respectivè, satis liquet; utrum verò curva illa quæ singulum meridianum Terræ constituit et quæ convolutione arcûs $P A Q$ circa axem minorem $P Q$ generatur sit ellipsis Apolloniana, utrum tantum curva ad eam accedens, non determinat Newtonus; paulo fusius de hujus curvæ naturâ inferius disseremus;

hic enim ad calculum Newtonianum intelligendum, sufficit assumere eam curvam ad ellipsim satis accedere, ut ellipsis pro eâ assumi possit.

^(q) * Debet pondus aquæ. Si fluidum in canale contentum quiescere supponatur, fluidi partes in canalis crure $A C$ debent esse in æquilibrio cum partibus fluidi in ejusdem canalis crure $Q C$. Cùm itaque vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam ponderis detrahat e ponderis partibus 289, oportet ut pondus in altero crure sit 288 (sive ex inventis ut 288.67. ad 287.67), sic enim pondera in utroque canalis crure erunt æqualia.

^(r) * Et esset ejus axis $P Q$ ad diametrum $A B$ ut 100 ad 101, gravitas in loco Q in Terram foret ad gravitatem in sphaera centro C radio $Q C$ descriptam, ut 126 ad 125 et eodem argumento gravitas in loco A in sphaeroidem circa axem $A B$ descriptam est ad gravitatem in sphaera centro C radio $A C$ descriptam, ut 125 ad 126.

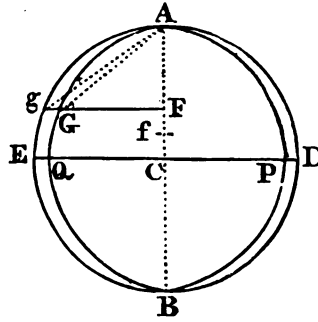
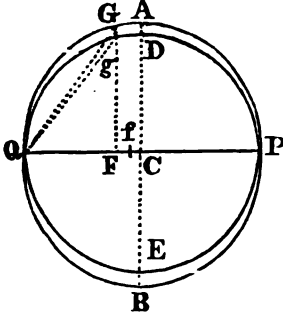
* Utrumque simul probari potest: sit $P A Q B$, in utrâque figurâ, Terræ meridianus; in primâ figurâ sit $Q D P Q$ sphaera centro C radio $Q C$ descripta et in secundâ figurâ $P A Q B$ representat sphaeroidem quam revolutione meridiani Terræ circa æquatorem describi fingit Newtonus et $A E D$ sphaeram radio $A C$ descriptam. Constat Corollario 2. Prop. XC. Lib. I. quod si ducantur circuli ad axes revolutionum perpendiculares quorum radii sunt $F G$, $f g$ (in utrâque figurâ) attractio punctorum Q et A ab illis circulis erit $1 - \frac{Q F}{Q G}$, $1 - \frac{Q F}{Q g}$, $1 - \frac{A F}{A G}$, $1 - \frac{A F}{A g}$ respectivè. Quare si dicatur $C Q$ sive $C D$, b , et $A C$ sive $C E$, r , dicaturque abscissa $Q F$, $A F$, in utrâque figurâ, x ; erit in primâ figurâ $\overline{F G}^2 = \frac{r^2}{b^2} \times 2 b x - x x$; $\overline{F g}^2 = 2 b x - x x$, et in secundâ figurâ est $\overline{F G}^2 = \frac{b^2}{r^2} \times 2 r x - x x$ et $\overline{F g}^2 = 2 r x - x x$, quibus quadratis si addatur quadratum $\overline{Q F}^2$ vel $\overline{A F}^2$ sive $x x$, habebuntur quadrata linearum $\overline{Q G}^2$, $\overline{Q g}^2$, $\overline{A G}^2$, respectivè, quæ erunt $\frac{r^2}{b^2} \times 2 b x - \frac{r^2 - b^2}{b^2} x^2$; $2 b x$; $\frac{b^2}{r^2} \times 2 r x + \frac{r^2 - b^2}{r^2} x^2$; et $2 r x$; unde (si compendii gratiâ loco $r^2 - b^2$ scribatur m) attractiones istorum circulorum evadent

gravitatem in eodem loco Q in sphaeram centro C radio PC vel QC descriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in sphaeroidem, convolutione ellipseos APBQ circa axem AB descrip-

$$1 - \frac{bx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}; 1 - \frac{x}{\sqrt{2bx}}; 1 - \frac{rx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}}; 1 - \frac{x}{\sqrt{2rx}};$$

Sit verò $Ff = dx$ et multiplicetur attractio singuli circuli per dx habebuntur elementa attractionis sphaeroidem et sphaerarum, quae elementa erunt

$$dx - \frac{bx dx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}; dx - \frac{x dx}{\sqrt{2bx}}; dx - \frac{rx dx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}}; dx - \frac{x dx}{\sqrt{2rx}}.$$



Facile revocabuntur ad fluentes suas ea elementa attractionis sphaerarum, quippe fluentes quantitatuum $dx - \frac{x dx}{\sqrt{2bx}}$ et $dx - \frac{x dx}{\sqrt{2rx}}$ sunt $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ et $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{2r}}$ et ubi QF vel AF diametros QP vel AB aequant, ideòque x fit aequalis $2b$ vel $2r$, evadunt illae fluentes $2b - \frac{2b\sqrt{2b}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ et $2r - \frac{2r\sqrt{2r}}{\frac{3}{2}\sqrt{2r}}$ sive $\frac{2}{3}b$ et $\frac{2}{3}r$.

Ut obtineatur fluens quantitatis $dx - \frac{bx dx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$, quantitas $\frac{bx dx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$ resolvatur in seriem (eam considerando ut $bx dx \times \frac{1}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}} = \frac{1}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$) sumatur juxta formulam Newtonianam quotiens secundi termini $-mx^2$ per primum $2r^2bx$ divisi, qui quotiens erit $-\frac{mx}{2b \times r^2}$; primi termini $2r^2bx$ sumatur dignitas $-\frac{1}{2}$, quae est $\frac{1}{rx^{\frac{1}{2}} \times 2b|^{\frac{1}{2}}}$, tum ad-

hibitis coefficientibus secundum formulam; tota quantitas evadet

$$dx - \frac{bx^{\frac{1}{2}} dx}{rx \times 2b|^{\frac{1}{2}}} - \frac{1 \times b m x^{\frac{3}{2}} dx}{2 \times r^3 \times 2b|^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 \times 3bm^2 x^{\frac{5}{2}} dx}{2 \times 4r^5 \times 2b|^{\frac{5}{2}}} - \frac{1 \times 3 \times 5bm^3 x^{\frac{7}{2}} dx}{2 \times 4 \times 6r^7 \times 2b|^{\frac{7}{2}}}, \&c.$$

$$\text{et integrando dabitur } x - \frac{2bx^{\frac{3}{2}}}{3r \times 2b|^{\frac{1}{2}}} - \frac{2bm x^{\frac{5}{2}}}{10r^3 \times 2b|^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 \times 3 \times 2bm^2 x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 4 \times 7r^5 \times 2b|^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.2bm^3 x^{\frac{9}{2}}}{2.4.6.9r^7 \times 2b|^{\frac{7}{2}}}, \&c.$$

$$\text{Quando verò } x = 2b, \text{ series fit } 2b - \frac{2b^2}{3r} - \frac{2b^2 m}{10r^3} - \frac{1 \times 3 \times 2b^2 m^2}{2 \times 4 \times 7r^5} - \frac{1 \times 3 \times 5 \times 2b^2 m^3}{2 \times 4 \times 6 \times 9r^7},$$

Sive dividendo per $2b$ et ad terminos praecedentes revocando; attractio Terrae, in corpusculum Q in extremitate minoris axis positi circa quem revolvi censetur, exprimitur per hanc seriem

$$2b \times \left(1 - \frac{b}{3r} - \frac{1 \times 3m}{2.5r^3} B - \frac{3 \times 5m}{4 \times 7r^5} C - \frac{5 \times 7m}{6 \times 9r^7} D - \frac{7 \times 9m}{8 \times 11r^9} E, \&c.\right)$$

Simili modo obtinebitur fluens quantitatis $dx - \frac{rx dx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}}$, nempe secundam partem

considerando ut $rx dx \times \frac{1}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}} = \frac{1}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}}$, quae in serie resolvatur, quotiens secundi termini

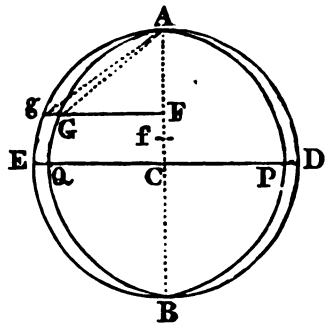
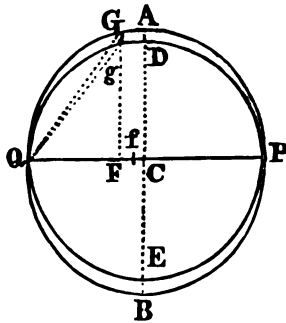
per primum divisi erit $+\frac{m x}{2 r b^2}$; primi termini dignitas $-\frac{1}{2}$ erit $\frac{1}{b x^{\frac{1}{2}} \times 2 r^{\frac{1}{2}}}$ et calculando secundum formulam tota quantitas

$$\text{evadet } dx = \frac{r x^{\frac{1}{2}} dx}{b \times 2 r^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 \times r m x^{\frac{3}{2}} dx}{2 \times b^2 \times 2 r^{\frac{1}{2}}} - \frac{1 \times 3 r m^2 x^{\frac{5}{2}} dx}{2 \times 4 b^3 \times 2 r^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 \times 3 \times 5 r m^3 x^{\frac{7}{2}} dx}{2 \times 4 \times 6 b^4 \times 2 r^{\frac{1}{2}}}, \text{ \&c.}$$

$$\text{Integrando habetur } x = \frac{2 r x^{\frac{3}{2}}}{3 b \times 2 r^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 \times 2 r m x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 5 b^2 \times 2 r^{\frac{1}{2}}} - \frac{2 \times 3 \times 2 r m^2 x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 4 \times 7 b^3 \times 2 r^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 \times 3 \times 5 \times 2 r m^3 x^{\frac{9}{2}}}{2 \times 4 \times 6 \times 9 b^4 \times 2 r^{\frac{1}{2}}}, \text{ \&c.}$$

$$\text{Quando } x = 2 r \text{ series fit, } 2 r = \frac{2 r^2}{3 b} + \frac{2 r^2 \times m}{2 \times 5 b^2} - \frac{1 \times 3 \times 2 r^2 \times m^2}{2 \times 4 \times 7 b^3} + \frac{1 \times 3 \times 5 \times 2 r^2 \times m^3}{2 \times 4 \times 6 \times 9 b^4}, \text{ \&c.}$$

$$\text{Sive } 2 r \times (1 - \frac{2 r}{3 b} + \frac{3 m}{2 \times 5 b^2} B - \frac{3 \times 5 m}{4 \times 7 b^3} C + \frac{5 \times 7 m}{6 \times 9 b^4} D - \frac{7 \times 9 m}{8 \times 11 b^5} E, \text{ \&c.})$$



Cùm ergo sit $r = 101$, et $b = 100$ est $r^2 - b^2 = \sqrt{r+b} \times \sqrt{r-b} = 201 = m$, est $r^2 = 10201$.
Hinc substitutionibus factis prima series evadit

$$\begin{aligned} 2 b \times 1 &= .66006600 \\ &= .00390177 \\ &= .00004118 \\ &= .00000052 \\ &= .00000001. \end{aligned}$$

hoc est, $2 b \times (1 - .66400948)$, sive $2 b \times .33599052$; sed sphaerae attractio erat $\frac{2 b}{3}$; ergo gravitas in loco Q in Terram foret ad gravitatem in sphaerae centro C radio Q C descriptam ut 1.00797156 ad 2 (multiplicando utrumque terminum per 3 et dividendo per 2 b) sive ut 1008 ferè ad 1000, qui numeri sunt accuratè ut 126 ad 125, ut liquet utrumque per 8 dividendo. Q. e. 1^o. d.

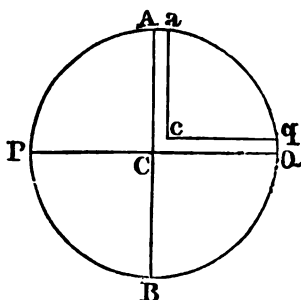
Pariter substitutionibus factis in serie secundà, evadit

$$\begin{aligned} 2 r \times 1 &= .67333333 + .00406020 \\ &= .00004372 + .00000057 \\ &= .00000001. \end{aligned}$$

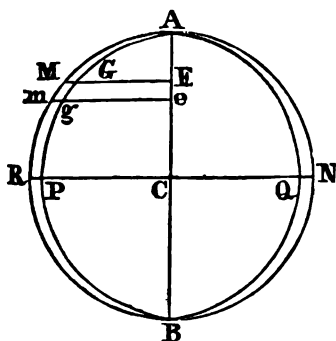
Sive $2 r \times (1 - .67337706 + .00406077)$ hoc est $2 r \times .33068371$, sed sphaerae attractio erat $\frac{2 r}{3}$, ergo utrumque terminum multiplicando per 3 et dividendo per 2 r; gravitas in loco A in ellipsoide, convolutione circa majorem axem genitum, erit ad gravitatem in sphaeram radio A C descriptam ut 99205113 ad 1; multiplicetur uterque terminus per 1008, et evadent 999.987589 et 1008; proximè 1000 et 1008 qui numeri sunt ut 125 ad 126. Q. e. 2^o. d.

79. *Lemma.* Sphaerois compressa convolutione ellipsoeas A P B Q circa axem minorem P C genita, est media proportionalis inter sphaeram circumscriptam cujus radius est A C, et sphaeroidem oblongatam convolutione ellipsoeas circa axem A C genitam. Nam ductis ordinatis M E, m e, infinite propinquis, tum sphaera circumscripta tum sphaerois oblongata dividi intelligantur in cylindros ordinatarum M E et m e, et g e convolutione descriptos, erit cylindrus E G g e in sphaeroide ad cylindrum E M m e in sphaera, ut altitudo E e ducta in circulum radio G E

tam, est ad gravitatem in eodem loco A in sphæram centro C radio A C descriptam, ut 125 ad 126. (*) Est autem gravitas in loco A in Terram media proportionalis inter gravitates in dictam sphæroidem et sphæram: propterea quod sphæra, diminuendo diametrum P Q in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; et hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus A B, P Q perpendicularis est, vertitur in dictam sphæroidem; et gravitas in A, in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proximè. (*) Est igitur gravitas in A in sphæram centro C radio A C descriptam, ad gravitatem in A in Terram ut 126 ad 125½, et gravitas in loco Q in sphæram



rotando descriptum, ad altitudinem E e, ductam in circulum cujus est radius M E, sive quia circuli sunt ut quadrata radiorum et utriusque cylindruli communis est altitudo, erit cylindrus



E G g e, ad cylindrum E M m e, ut $G E^2$ ad $M E^2$. Sed $G E^2$ ad $M E^2$ semper est ut $P C^2$ ad $R C^2$ vel $A C^2$, ideoque in datâ ratione, erit itaque summa tota cylindrulorum in sphæroide ad summam totam cylindrulorum in sphæra, hoc est, sphærois ipsa ad sphæram ut $P C^2$ ad $A C^2$, jam verò sphæra radio R C descripta et sphærois compressa ellipseos A G P circa axem P C convolutione genita, simili modo dividi intelligantur in tubulos innumeros ordinarum M E et m e, G E et g e, circa axem P C convolutione genitos, ob radiorum C E et rectarum E e aequalitatem, erunt tubuli illi ut M E, G E, sive ut A C ad P C, hoc est, in datâ ratione; ideoque sphæra est ad sphæroidem compressam ut A C ad P C. Quare si

sphæra dicatur S sphærois compressa s, et sphærois oblongata e, sitque A C = b, P C = a erit $S^2 : s^2 = b^2 : a^2$, ac proinde $S : e = S^2 : s^2$ undè $s = \sqrt{S \times e}$. Q. e. d.

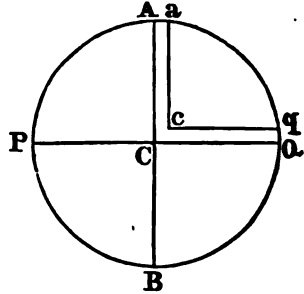
(*) 80. Est autem gravitas. Diametrum P Q, in figurâ Newtoni respondeat diametro R N, minuatur diameter illa R N in ratione 101 ad 100 ut fiat P Q = 100, tunc sphæra quæ centro C radio A C descripta erat, vertetur in figuram Terræ. Jam verò concipiatur tertia diameter quæ in revolutione sphærae duabus diametris A B, P Q, fit perpendicularis, hæcque diameter diminuatur in eadem ratione 101 ad 100, patet figuram Terræ verti in sphæroidem oblongatam. Quia verò utraque sphærois sive compressa sive oblongata ad sphæram quam proximè accedit, sphæroides illæ pro sphæris quæ eandem respectivè contineant materiæ quantitatem, quam proximè haberi possunt. Sunt autem attractiones sphærarum in distantiiis æqualibus ut quantitates materiæ (Cor. 1. Prop. LXXIV. Lib. I.) ideoque gravitas in utroque casu prædicto diminuitur in eadem ratione materiæ detractæ quam proximè, ac proinde attractiones sphærae sphæroidis compressæ et sphæroidis oblongatæ sunt respectivè ut quantitates materiæ in illis corporibus contentæ quàm proximè. Sed sphærois compressa convolutione ellipseos A P B Q, circa axem P C Q genita est media proportionalis inter sphæram circumscriptam cujus radius est A C, et sphæroidem oblongatam convolutione ellipseos circa axem A C B genitam (82.). Quare gravitas in loco A, in Terram est media proportionalis inter gravitates in dictam sphæroidem, oblongatam scilicet, et sphæram.

(*) * Est igitur gravitas. Gravitas in loco A in Terram dicatur G, gravitas in loco Q, in Terram sit g, gravitas in loco Q, in sphæram radio P C, descriptam dicatur γ, gravitas in loco

centro C radio Q C descriptam, est ad gravitatem in loco A in sphaeram centro C radio A C descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est, ut 100 ad 101.

(^u) Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, et 100 ad 101: et fiet gravitas in loco Q in Terram ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.

Jam cum (per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I.) gravitas in canali crure utrovis A C c a vel Q C c q sit ut distantia locorum a centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis et æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure A C c a ad pondera partium totidem in crure altero, (^x) ut magnitudines et gravitates acceleratrices conjunctim; id est, ut 101 ad 100 et 500 ad 501, hoc est, ut 505 ad 501. (^y) Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure A C c a ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujus-



A, in sphaeroidem convolutione ellipseo APBQ, circa axem A B genitam dicatur V, ac tandem gravitas in loco A in sphaeram radio A C descriptam sit r, erit (ex dem.).

$$g : r = 126 : 125$$

$$V : r = 125 : 126 \text{ præterea}$$

V : G = G : r, ideoque inter V et r, hoc est, inter 125 et 126 sumpto medio termino proportionali erit

$$V : G = G : r = 125 : 125\frac{1}{2} = 125\frac{1}{2} : 126.$$

(^u) • Conjungantur jam hæ tres rationes, scilicet

$$g : r = 126 : 125$$

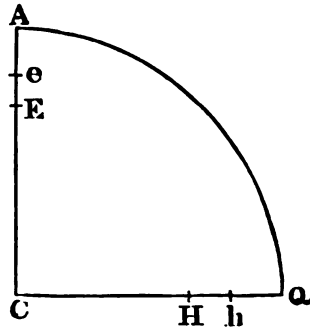
$$r : G = 126 : 125\frac{1}{2}$$

$g : r = 100 : 101$ erit per compositionem rationum et ex æquo.

$g : G = 126 \times 126 \times 100 : 125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$
vel $g : G = 1587600 : 1584437\frac{1}{2} = 501 : 500$
ideoque gravitas in loco Q, in Terram fiet ad gravitatem in loco A, in Terram ut 501 ad 500.

(^x) 81. • Ut magnitudines et gravitates. Crura A C, Q C ita distinguantur superficiebus transversis et æquidistantibus ut crura illa æqualem contineant particularum E e, H h numerum, sintque singulæ particulæ in crure A C ad singulas particulas in crure C Q ut crus A C ad crus alterum C Q, sive ut 101 ad 100; quoniam gravitas in loco A est 500 et gravitas in loco Q, est 501 propter figuram sphaeroidis et omnium particularum in cruribus A C et C Q similium

et similiter positarum, gravitates acceleratrices erunt in eadem ratione; earum itaque pondera, (sive facta gravitatis acceleratricis per quantita-



tem materiæ) erunt in ratione compositâ 101 ad 100 et 500 ad 501 sive 505 ad 501, et totorum crurum A C et C Q gravitates erunt in eâ ratione 505 ad 501.

(^y) 82. • Ac proinde si vis centrifuga. Ex motu diurno circa axem Q C, oritur vis centrifuga quâ fit ut partes quæ sunt in crure A C, versùs C, vi gravitatis attractæ, simul etiam vi centrifugâ repellantur, • illa autem vis centri-

que, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, et propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verùm vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 289, hoc est, vis centrifuga, quæ deberet esse ponderis pars $\frac{4}{303}$, est tantum pars $\frac{1}{89}$. (*) Et propterea dico, secundum regulam auream, quod si vis

fuga in singulis punctis cruris A C est in ratione distantie eorum punctorum a centro C E (per Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.) sed est etiam gravitas acceleratrix in ratione distantie a centro (per Cor. 3. Prop. XCI. Lib. I.) ergo si alicubi data sit ratio vis gravitatis ad vim centrifugam, eadem erit in omnibus punctis: sit ergo alicubi ut 505 ad 4 gravitas acceleratrix tota singulorum et omnium partium cruris A C erit ad gravitatem residuam in singulis et omnibus partibus ejusdem cruris ut 505 ad 501, sed in eadem ratione erat tota gravitas cruris A C (absque detractioe vis centrifugæ ad gravitatem cruris C Q, quod cum sit axis, vim centrifugam nullam habet) ergo residuum vis gravitatis in crure A C sublata vi centrifugâ in æquilibrio est cum gravitate cruris C Q.

(*) • Et propterea dico secundum regulam auream. • Vix crediderim Newtonum ad applicandam regulam auream hic loci, alio nixum non fuisse fundamentum quam istâ confusâ notatione, quod cum excessus ponderum in longioribus cruribus spheroidæ pendeant ex inæqualitate crurum, sive ab excessu unius cruris supra alterum, ideo rationes excessuum crurum majorum ad minora crura eadem esse debeant ac rationes excessuum ponderum ad pondera minorum crurum; quæ quidem ultimæ rationes (sive ipsis proximæ rationes excessuum ponderum ad pondera majorum crurum) æquantur rationibus virium centrifugarum ad gravitatem totam, quia illæ vires centrifugæ ex gravitate detractæ eos excessus ponderum accuratè compensant. Sed mihi videtur ipsum deduxisse hanc proportionem ex ipsâ serie ab ipso adhibita, et quam assequi sumus conati in nota (*) proximâ; quod ut concipiatur, resumantur quæ in eâ notâ dicta sunt, et ad ratiocinium Newtonianum applicentur, supponendo questionem esse de duobus spheroidibus, quorum unus sit assumptivus ille cujus axes sunt ut 101 ad 100 alterum verò ipsa Terra, ita ut semi-diameter æquatoris quæ in spheroidæ fictitio in notâ prædictâ per r designatur, Terræ respectu designetur per e , semi-axis verò P Q qui in serie assumptâ dictus fuerat b et applicatus fictitiæ spheroidi, ubi verò ipsum semi-axem Terræ designat dicatur B. Assumptis ergo duobus primis terminis serierum, sed mutatis r in e et b in B, ubi agitur de Terrâ, 1°. Gravitas in loco Q in spheroidem erit ad gravitatem in eodem loco in spheram radio b descriptam erit ut $\frac{6br - 4b^2}{3r}$ ad $\frac{2b}{3}$ et si agatur de Terrâ, gravitas in loco Q in Ter-

ram erit ad gravitatem in eodem loco in spheram quæ radio B describetur ut $\frac{6Be - 4B^2}{3e}$

ad $\frac{2B}{3}$; ideoque rationes gravitatis in loco Q in spheroidem vel Terram ad gravitatem in spheras radiis b et B descriptas erunt ut $\frac{3r - 2b}{r}$

ad $\frac{3e - 2B}{e}$. 2°. Gravitas in spheras quarum sunt radii b et B est ad gravitatem in spheras radiis A C descriptas ut radius b ad r , et B ad e , ideoque rationes gravitatis in spheras radiis P Q descriptas ad gravitates in spheras radiis A C descriptas erunt ut $\frac{b}{r}$ ad $\frac{B}{e}$.

3°. Gravitas in spheras radiis A C descriptas est ad gravitatem in ellipsoide convolutione ellipsoidium A P B Q circa A C descriptas ut $\frac{2r}{3}$

ad $\frac{6rb - 4rr}{3b}$, si agatur de fictitiæ spheroidæ,

aut ut $\frac{2e}{3}$ ad $\frac{6eB - 4ee}{3B}$ ubi agitur de Terrâ:

et quoniam attractio spheroidis fictitii aut Terræ est media proportionalis inter has attractiones, erit gravitas in spheram ad gravitatem in A in spheroidem, ut $\sqrt{\frac{2r}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{6rb - 4r^2}{3b}}$ et gravitas in spheram ad gravitatem quæ est in A Terram ipsam ut $\sqrt{\frac{2e}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{6eB - 4ee}{3B}}$, ideoque rationes gravitatis in spheras ad gravitates in spheroidem et in Terram erunt ut $\sqrt{\frac{b}{3b - 2r}}$ ad $\sqrt{\frac{B}{3B - 2e}}$ reductis fractionibus ad minimos terminos.

Hinc tandem compositis omnibus rationibus, rationes gravitatum, in punctis Q tam spheroides fictitii quam Terræ, ad gravitates in punctis A eorum erunt ut $\frac{3r - 2b}{e} \times \frac{b}{r} \times$

$\sqrt{\frac{b}{3b - 2r}}$ ad $\frac{3e - 2B}{e} \times \frac{B}{e} \times \sqrt{\frac{B}{3B - 2e}}$

Rursus in fictitiæ spheroidæ ratio magnitudinis crurum exprimitur per $\frac{b}{r}$ et in Terrâ per $\frac{B}{e}$; per quas quantitates ducantur rationes gravitatis, et habebuntur rationes ponderum quæ

centrifuga $\frac{1}{303}$ faciat ut altitudo aquæ in crure A C c a superet altitudinem aquæ in crure Q C c q parte centesimâ totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{315}$ faciet ut excessus altitudinis in crure A C c a sit altitudinis in crure altero Q C c q pars tantum $\frac{1}{315}$. Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem ad ipsius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum Terræ semi-diameter mediocris, juxtâ mensuram Picarti, sit pedum Parisiensium 19615800, seu milliarium 3923,16 (posito quod milliare sit mensura pedum 5000) Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos excessu pedum 85472, seu milliarium $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, et ad polos 19573000 pedum.

(*) Si planeta major sit vel minor quàm Terra manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centri-

ideo erunt ut $\frac{3r-2b}{r} \times \frac{b^2}{r^2} \sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\epsilon-2B}{\epsilon} \times \frac{B^2}{\epsilon^2} \sqrt{\frac{B}{3B-2\epsilon}}$; inde cum differentia quantitatum r et b, ϵ et B non sit magna, numeratores $3r-2b$ aut $3\epsilon-2B$; pro r ac ϵ sumi possunt, et denominatores $3b-2r$, $3B-2\epsilon$ pro b et B, ideoque rationes ponderum flunt ut $\frac{r}{\epsilon} \times \frac{b^2}{\epsilon^2} \times \sqrt{\frac{b}{b}}$ ad $\frac{\epsilon}{B} \times \frac{B^2}{B^2} \times \sqrt{\frac{B}{B}}$ sive ut $\frac{b^2}{r^2}$ ad $\frac{B^2}{\epsilon^2}$. Vel, invertendo, rationes ponderum in crure C A ad pondus in crure C Q sunt in sphaeroide fictio et in Terrâ ut $\frac{r^2}{b^2}$ ad $\frac{\epsilon^2}{B^2}$; quod si differentia diametri r et axis fictiui b dicatur f; differentia diametri ϵ et axis Terræ B dicatur g hoc modo exprimentur rationes ponderum crurum C A et C Q, $\frac{b^2+2bf+ff}{bb}$ et $\frac{B^2+2Bg+gG}{B^2}$ erunt ergo rationes excessus ponderis in crure A C ad pondus totum cruris C Q ut $\frac{+2bf+ff}{bb}$ ad $\frac{+2Bg+gG}{B^2}$ sive deletis ff et g g quæ evanescunt respectu 2rf et 2 ϵ g; cum differentie inter diametros et axes minimæ supponantur respectu earum diametrorum; erunt illæ rationes ut $\frac{2bf}{b^2}$ ad $\frac{2Bg}{B^2}$, sive ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, sed rationes excessus ponderum ad pondus cruris C Q sive ad pondus cruris A C (quod perinde est ob magnitudinem crurum et parvitatem excessus) æquales esse debent (ut jam dictum est) rationibus virium centrifugarum ad gravitatem ipsam: quare, rationes illæ virium centrifugarum ad gravitatem debent esse ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, sive ut rationes excessuum diametri æquatoris supra axes ad axes, quæ quidem est proportio quam New-

tonus assumit, cujus fundamentum ita deprehensum est: hinc vis centrifuga quæ est $\frac{4}{505}$ ponderis totius, est ad vim centrifugam quæ est $\frac{1}{289}$ ponderis totius ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$ sive ut $\frac{f}{b}$ ad $\frac{g}{B}$, sed dum b est 100 est f=1, ergo est $\frac{g}{B} = \frac{1}{100} \times \frac{1}{289}$ sive $\frac{505}{115600} = \frac{1}{229}$.

(*) 86. Si planeta major sit vel minor quàm Terra manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manet proportio vis centrifugæ ad gravitatem. * Manere rationem vis centrifugæ ad gravitatem liquet ex notâ 85. sive ex Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.; nam manente tempore periodico crescit vis centrifuga in ratione distantiarum, sed crescit etiam gravitas acceleratrix in ratione distantiarum (Cor. 3. Prop. XCI. Lib. I.) ergo in eadem ratione crescent vis centrifuga et gravitas, ideoque in eadem ratione manent ac prius.

Propterea manebit proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem: quippe, per notam præcedentem 2, ratio vis centrifugæ ad gravitatem est ut ratio excessus diametri æquatoris super longitudinem axes; manente ergo priori ratione per hypothesim manebit et ista.

Si acceleretur vel retardetur motus diurnus: ut tempus periodicum fit majus vel minus, vis centrifuga crescit reciprocè ut quadrata temporum periodicorum manentibus radiis (Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) inde manentibus gravitatibus et diametris majoribus vel minoribus, liquet (ex notâ illâ 2.) numeratores fractionum $\frac{f}{b}$ et $\frac{g}{B}$, nempe excessus diametrorum, crescere secundum rationem virium centrifugarum, hoc est, ut quadrata

fugæ ad gravitatem, et propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quâcunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicatâ illâ ratione, et propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eâdem duplicatâ ratione quamproximè. Et si densitas planetæ augeatur vel minuatur in ratione quâvis, gravitas etiam in ipsum tendens augebitur vel minuetur in eâdem ratione, et differentia diametrorum vicissim minuetur in ratione gravitatis auctæ, vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cùm Terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56', Jupiter autem horis 9. 56', sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, ^(b) et revolvantium densitates ut 400 ad 94½: differentia diametrorum Jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, seu 1 ad 9½ quamproximè. Est igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut 10½ ad 9½ quamproximè. Unde cùm ejus diameter major sit 37'', ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit 33''. 25'''. ^(c) Pro luce erraticâ addantur 3''. circiter, et hujus planetæ diametri apparentes evadent 40'' et 36''. 25''': quæ sunt ad invicem ut 11½ ad 10½ quamproximè. Hoc ita se habet ex hypothesi quod corpus Jovis sit uniformiter densum. ^(d) At si

temporum periodicorum inversè, aut ut quadrata celeritatum directè: hinc ait Newtonus: *differentia diametrorum* (quæ differentis exprimuntur per *f* et *g*) *augebitur vel minuetur in eâ ratione duplicatâ celeritatum quamproximè.*

Et si densitas planetæ augeatur, gravitas augebitur in eâdem ratione: hinc ratio vis centrifugæ manente radio et celeritate manentis, ad gravitatem minuetur; ideoque minuetur ratio differentie diametrorum ad ipsas diametros.

Et in genere dicatur radius Terræ *R*, ejus densitas *D*, tempus periodicum *T*, in altero planeta litteris iisdem sed minoribus eadem expri-

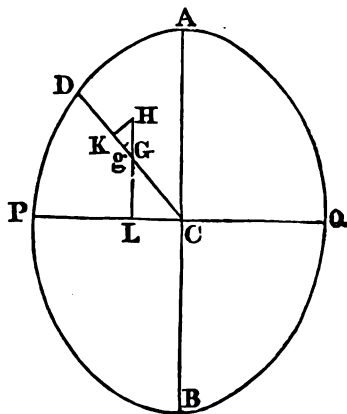
mantur, erit $\frac{R}{D} \frac{T}{T}$ ad $\frac{r}{d} \frac{t}{t}$ sicut $\frac{1}{229}$ ad differentiam inter diametros æquatoris et axis planetæ, quæ itaque erit $\frac{1}{229} \times \frac{D \times T T}{d \times t t}$.

^(b) * *Et revolvantium densitates.* (Prop. VIII. Lib. hujus.).

^(c) * *Pro luce erraticâ.* (53).

^(d) * *At si corpus ejus.* Ille enim excessus densitatis in plano æquatoris facit ut ibi major sit gravitas, ac proinde ibi minor requiratur altitudo ad compensandam vim centrifugam, unde

minuitur diametrorum differentia (ut patet ex notis præced.).



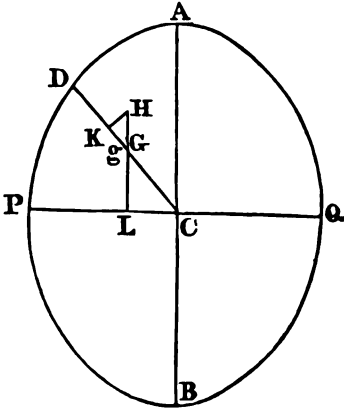
84. Lubet hic referre formulam quâ, in hypothesi gravitatis proportionalis cuilibet dignitati distantiarum a centro, simulque quod ejus actio ad id centrum dirigatur, diametrorum proportio

corpus ejus sit densius versùs planum æquatoris quàm versùs polos, diametri ejus possunt esse ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel forte 14 ad 13. Et Cassinus quidem anno 1691 observavit, quod Jovis diameter ab oriente in occidentem porrecta diametrum alteram superaret parte sui circiter decimâ quintâ: Poundus autem noster telescopio pedum 123 longitudinis et optimo micrometro, diametros Jovis anno 1719 mensuravit ut sequitur.

<i>Tempora.</i>	<i>Diam. max.</i>	<i>Diam. min.</i>	<i>Diametri ad invicem.</i>	
<i>dies hor.</i>	<i>part.</i>	<i>part.</i>		
Jan. 28 6	13,40	12,28	ut 12 ad 11	
Mar. 6 7	13,12	12,20	13 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$
Mar. 9 7	13,12	12,08	12 $\frac{3}{4}$	11 $\frac{3}{4}$
Apr. 9 0	12,32	11,48	14 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{1}{2}$

Congruit igitur theoria cum phænomenis. Nam planetæ magis incalcescunt ad lucem Solis versùs æquatores suos, et propterea paulo magis ibi decoquantur quàm versùs polos.

inveniri potest. Sit semi-diameter secundùm æquatorem $AC = a$, radius variabilis $CD = r$ sinus anguli $DCP = h$, posito sinu toto $= 1$. Sit gravitas in loco $A = p$ vis centrifuga in



eodem loco $= f$, ponaturque gravitas versùs centrum C tendens dignitati cuilibet n distantiarum a centro proportionalis, erit gravitas in A ad gravitatem in D ut a^n ad r^n , ideòque gravitas in $D = \frac{pr^n}{a^n}$. Quoniam vires centrifugæ in locis A et G , sunt in ratione distantiarum

CA, LG , erit vis centrifuga in $G = \frac{f \times LG}{CA}$; sed $LG : CG = h : 1$ ideòque $LG = CG \times h$, unde vis centrifuga in G , fit $= \frac{fh \times CG}{CA}$; sit autem vis illa $= GH$. Quoniam vis centrifuga quæ agit secundùm directionem GH , non minuit gravitatem versùs centrum C , nisi in quantum agit secundùm directionem DC , resolvatur vis centrifuga GH in vires laterales KG, GK , est autem $GH : GK$ vel $1 : h = \frac{fh \times CG}{CA}$; GK , quare $GK = \frac{f h h \times r}{a^n}$; ideòque pondus cylindruli $Gg = \frac{pr^n dr}{a^n} - \frac{f h h r dr}{a^n}$. Sumptisque fluentibus, pondus totum fluidi in crure $DC = \frac{pr^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{f h h \times r r}{2a}$. Simili argumento, quia gravitas in $A = p$, erit gravitas in alio quolibet loco cruris $CA = \frac{p x^n}{a^n}$, si nempe distantia a centro dicatur x ; vis autem centrifuga $= \frac{f x}{a}$, et pondus cylindruli manebit $\frac{p x^n dx}{a^n} - \frac{f x dx}{a}$ cujus fluens $\frac{p x^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{f x^2}{2a}$ undè pondus to-

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam Terræ nostræ minui sub æquatore, atque ideo Terram ibi altius surgere quàm ad polos (si materia ejus uniformiter densa sit) patebit per experimenta pendulorum quæ recensentur in Propositione sequente.

tum fluidi in crure C A, est $\frac{p a^{n+1}}{n+1} a^n - \frac{f a^2}{2 a}$ jam verò quia fluidum in utroque crure C A, C D consistere debet in æquilibrio, oportet ut pondera sint æqualia, ac proinde,

$\frac{f a}{2} = \frac{p r^{n+1}}{(2+1) a^n} - \frac{f h h r r}{2 a^n}$, undè eruitur $2 p r^{n+1} - (n+1) f h h a^{-n} r r = (2 p - n f - f) a^{n+1}$. Ope hujus æquationis facile invenitur diametrorum proportio; si enim fiat $h = a$, radius r abit in C P, habeturque $2 p r^{n+1} = (2 p - n f - f) a^{n+1}$, hoc est,

$$C A : C P = (2 p) \frac{1}{n+1} : (2 p - n f - f) + \frac{1}{n+1}.$$

In hypothesei gravitatis uniformis, fit $n = 0$, ideòque C A : C P = $2 p : 2 p - f$. Quoniam verò in Terrâ gravitas est ad vim centrifugam ut 289 ad 1, erit C A : C P = 578 : 577, prout Hugenius invenit. At in hypothesei gravitatis in ratione duplicatâ distantiarum a centro decreascentis, erit $n = -2$, ideòque C A : C P = $2 p + f : 2 p = 579 : 578$.

* 85. Verùm hæc hypothesei in hac formulâ inveniendâ assumptæ cum rei naturâ et Newtoniano systemate neutiquam quadrant, ideòque locum habere nequeunt: primum enim gravitatem ad centrum Terræ dirigi verum non est si Terra sit spheroidis qualiscumque, quippe ex ipso facto constat gravitatis directionem esse perpendiculararem superficiæ aquarum, sive esse perpendiculararem curvæ quam meridianus quilibet affectat; sed perpendiculares ad curvam a circulo diversam ad ejus curvæ centrum neutiquam tendunt nisi in solâ axium extremitate.

90. Gravitatis quantitas in variis punctis superficiei solidi ratione curvæ alicujus geniti non sequitur rationem ullius dignitatis distantiarum a centro, sed aliam omnino legem juxta formam solidi, hoc est, juxta naturam curvæ illius quam meridianus affectat, et locum in quo corpusculum attrahendum locatur, ut satis liquet ex eo artificio quo Newtonus usus est ad determinandum rationem gravitatis in puncto A ad gravitatem in puncto Q, unde gravitatis in variis locis proportio non per dignitatem aliquam distantiarum, sed per rationes serierum, quales eas in notâ (*) invenimus, sunt exhibendæ; quamvis ergo verum sit in systemate Newtoniano gravitatem decrescere ut quadrata distantiarum a quocunque corpore collecto in centro suæ gravitatis quasi in uno puncto, idem verum non erit si id corpus figurâ sphericâ non donetur, et corpus-

culum attrahendum juxta diversas partes ejus solidi collocetur; hinc ubi in formandâ generali formulâ assumitur quod gravitas in A sit ad gravitatem in D ut a^n ad r^n ideòque gravitatem in

D esse $\frac{p r^n}{a^n}$, id omnino adversus theoriam gravitatis Newtonianam deducitur; quod autem hæc formula non multum a vero aberret, oritur ex eo quod reverâ figurâ Terræ a spherâ perparum discrepet.

86. Vis centripeta vel centrifuga corporis circulum describentis est in ratione directâ radii et duplicatâ inversâ temporis periodici (Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.). Quare si distantia planetæ a centro Solis vel distantia satellitis a centro planetæ primarii dicatur D, tempus periodicum T, radius ipsius planetæ circâ quem motu diurno revolvitur R, gravitas versùs centrum revolutio-

nis erit $\frac{D}{T T}$; si autem hæc gravitas crescat in ratione duplicatâ inversâ distantiarum, erit gravitas planetæ in eo in quo nunc versari supponitur loco, ad illius gravitatem, si positus fingeretur in superficie corporis centralis circâ quod revolvitur, ut R R ad D D, ideòque foret gravitas planetæ in superficie hujus corporis ut $\frac{D^3}{R R T T}$. Jam

verò cùm vis centrifuga planetæ positi in æquatore corporis circâ quod revolvitur, sit in ratione directâ radii hujus planetæ et inversâ duplicatâ temporis revolutionis circâ axem, si tempus periodicum circâ axem dicatur t vis centrifuga F, erit $F = \frac{R}{t t}$ undè si vis gravitatis in superficie corporis centralis dicatur P, erit $P : F = \frac{D^3}{R R T T} : \frac{R}{t t} = D^3 \times t t : R^3 \times T T$.

90. Distantia D, quarti satellitis Jovialis a centro planetæ primarii sit 26.63 semid. Jovis, prout a Newtono in fine Phænomeni II. determinatur, et tempus periodicum T = 16 dieb. 18^h. 5'. 7". prout a Cassino in novis Elementis Astron. traduntur. Semi-diameter Jovis R = 1, tempus periodicum Jovis circâ axem t = 9^h. 55'. 52". posito in formulâ generali (87) $n = -2$, habetur C A : C P = $2 p + f : 2 p$, vel C A - C P : C P = $f : 2 p$, aut C A - C P : C P = $R^3 T T : 2 D^3 t t$, erit itaque in hac hypothesei gravitatis pro Jove C A - C P : C P = $1 : \frac{2 D^3 \times t t}{T T} = 1 : 11\frac{1}{2}$, quæ differentia

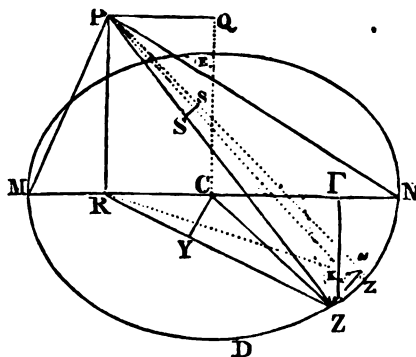
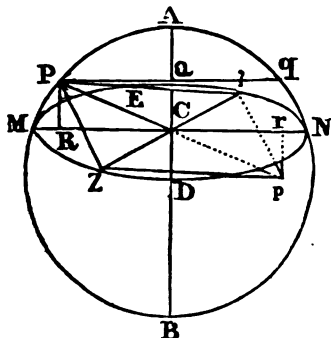
inter semi-diametrum secundùm æquatorem Jovis et semi-diametrum inter polos quamproximè æqualis est differentiæ quam Newtonus ex suâ methodo derivavit.

eodem plano (per 6. XI. Elem.) ideoque linea Pp secabit lineam MN , et cum triangula PRC , $p r C$ sint aequalia propter $r p = R P$, angulos rectos, et angulos per verticem oppositos, sique $N r = M R$ linea Pp transibit per centrum C ; erit etiam linea Pp in plano trianguli $Z P \zeta$ cum habeat puncta P et C in eo plano; inde si jungatur linea $Z p$, ζp , tota figura $P Z p \zeta$ erit in eodem plano, et propter aequales $P C$, $p C$, $Z C$, $C \zeta$ et angulos interceptos per verticem oppositos lineae $P Z$, $p \zeta$ erunt aequales, ut et lineae $P \zeta$, $p Z$, hinc figura $P Z p \zeta$ est parallelogramma cuius Pp sive $\frac{1}{2} P C$ est diagonalis; quare cum pyramides trahant secundum directiones $P Z$, $P \zeta$, viribus quae sunt ut $P Z$ ad $P \zeta$, vis inde resultans dirigetur secundum diagonalem Pp , sive $\frac{1}{2} P C$, eique erit proportionalis.

Quod cum ita sit de omnibus punctis Z in circumferentiâ M D N E sumendis, attractio puncti P ab omnibus paribus pyramidum in circumferentiâ ejus circuli terminatarum, erit ut

Ut longitudo seu rectificatio ejus curvæ obtineatur, ducatur a puncto P ad duo puncta proxima peripheriæ M D N E lineæ P Z, P s; abscissa circuli secundum diametrum a puncto N remotiori a puncto P sumatur, sique N r et r Z abscissa et ordinata circuli respondentes puncto Z, dicatur N r, x, r Z, y; Z s, d v; tota diameter M N, f, duplum ordinatæ P Q sit g, denique si centro P radio P S describatur arcus S s, ille arcus S s erit elementum curvæ quesitæ respondens elemento circuli d v. Ex P, ut prius, demittatur in circumulum M D N E perpendicularum P R, erit $R C = P Q = \frac{g}{2}$, ex

R ducantur lineæ R Z et R z, et centro C radius R Z describatur arcus Z K ut sit R K = R Z, ex centro C ducatur ad Z radius C Z, et perpendicularis C Y in lineam R Z, dico 1º. quod triangulus R C Y est similis triangulo R Z r, ob angulum in R communem, et rectos r et Y, unde est R Z ad Z r (y) sicut R C $\left(\frac{g}{2}\right)$ ad C Y



**2 P C multiplicata per numerum parium earum
pyramidum; sive erit ut P C ipsa multiplicata
per numerum omnium P Z ad circumferentiam
M D N E terminatarum.**

Denique ut obtineatur numerus earum linearum PZ ad circumferentiam quamlibet MDNE terminaturum, observandum est, eas lines egredientes ab hemisphaerio circa P descripto, in ejus superficie signare lineam curvam (duplicis quidem curvaturæ quando P non imminet perpendiculariter centro C, isto enim in casu signaret circulum) et propter æqualitatem distantiarum concurrens eorum axium cum superficie hemisphaerii (ex constructione) numerus earum linearum erit ut longitudo ejus linearum curvæ in superficie hemisphaerii signatæ; huc ergo redit tota questio, ut, dato puncto P ejusque ordinata P Q ad axem solidi rotundi, sumptaque ut libet staciā A C, ejus ordinata C M, et circulo MDNE ejus ordinatæ convoluzione descripto, inveniantur longitudo curvæ descriptæ in superficie sphaeræ (cujus radius P S ad libitum assumitur) per intersectionem conie inclinati cujus vertex est P, basis verò MDNE.

quod erit ergo $\frac{R Y}{2 R Z}$; 2^o. triangulus C Z Y
est similis triangulo Z K z; nam angulus R Z K
est rectus per constr. quoniam triangulus R Z K
est isosceles, angulus verò C Z z est etiam
rectus per naturam circuli, unde dempto communi
C Z K manent æquales anguli C Z Y et K Z z,
præterea anguli in Y et K sunt recti: erit ergo
radius C Z $\left(\frac{f}{2}\right)$ ad C Y $\left(\frac{R Y}{2 R Z}\right)$ sicut Z z
(d v) ad K Z quod erit ergo $\frac{R Y}{R Z \times f}$ d v.

3^o. Ducatur ex P linea PK, ea erit aequalis lineae PZ, nam trianguli PRZ, PRK erunt aequales ob communem PR, aequales per constr. RZ et RK, et angulos in R rectos (per 4. XI. Elem.); hinc si radio PK, centro P describatur arcus K ω , erit P ω = PZ et arcus Z ω similis erit elemento quassito S α , et triangulus Z ω rectangulus erit in ω .

Porro, triangulus $K \approx z$ erit similis triangulo $P R z$ ob angulum communem in z , et rectos in

Collatis verò terminis seriei inventæ cum terminis correspondentibus hujus seriei fictitiæ, invenietur $A =$

$$B = A \times \frac{\frac{PS\sqrt{f}}{\sqrt{g}}}{\frac{1+f-g}{6lf}}$$

$$3l^2 + 2lf + 3f^2$$

$$+ 2lg - 6fg$$

$$- g^2$$

$$C = A \times \frac{2.4.5l^2f^2}{10l^3 + 6fl^2 + 6f^2l + 10f^3}$$

$$+ 2g^2l^2 + 12fgl - 30f^2g$$

$$+ 6g^2l - 10fg^2$$

$$- 2g^3$$

$$D = A \times \frac{2.4.4.7l^3f^3}{35l^4 + 20fl^3 + 18f^2l^2 + 20f^3l + 35f^4}$$

$$+ 4g^4l^3 + 12fgl^2 + 60f^2gl - 140f^3g$$

$$- 6g^2l^2 + 60fg^2l - 70f^2g^2$$

$$+ 20g^3l - 28fg^3$$

$$- 5g^4$$

$$E = A \times \frac{2.4.4.4.9l^4f^4}{31^2 + 2lf + 3f^2}$$

Hinc series quæ exprimit longitudinem curvæ quæsitæ fit

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}} \sqrt{f} \times \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1+f-g}{2.3lf} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2lg - 6fg}{-g} x^{\frac{5}{2}} + \dots \right)$$

$$2.4.5l^2f^2$$

Si autem talis sit curva, ut PN sit ubique major quàm g, scribatur loco x longitudo f, sive diameter circuli, et habeatur valor dimidii curvæ quæsitæ, quod respondet semi-circulo MDN: es ergo ea semi-curva,

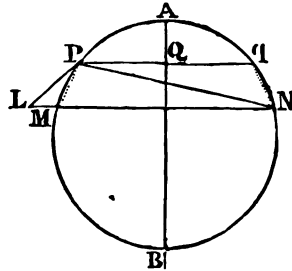
$$\frac{PS}{\sqrt{gl}} \times f \times \left(1 + \frac{1+f-g}{2.3l} \frac{3l^2 + 2lf + 3f^2}{+ 2lg - 6fg} \right)$$

$$- g$$

$$2.4.5l^2$$

In hoc autem casu quantitas l sive $\frac{PN^2}{g}$ est major quàm f, majorem esse quàm g ex Hy

pothesi hujus casus sequitur, cum PN supponatur major quàm g; majorem autem esse l quàm f hinc liquet, ductâ in trapezio PqNM diagonali PN fiat in P super PN a parte lineæ PM angulus NPL æqualis angulo q, ita ut occurrat PL lineæ NM, dico lineam NL esse longiorem quàm NM, nam anguli MPq et q sunt æquales, sed angulus NPL est æqualis angulo q; ergo angulus NPL cum angulo NPq major est angulo qPM, cadit ergo L ultra M; sive NL est major NM; est autem NL æquale l, nam trianguli PqN et PNL sunt similes ob angulos q et NPL æquales per const., angulosque NPq et PNL æquales ob parallelas Pq. MN, hinc ergo est Pq ad PN ut PN ad NL, sed est Pq sive g ad PN ut PN ad l, ergo est NL æqualis l et major quàm f.



Hinc, ut ista series convergat, debent ita disponi termini hujus seriei ut remotiores a primo ponantur in quibus crescunt in numeratore dimensiones quantitatum f aut g, et in denominatore dimensiones quantitatis l, ideoque hanc habet formam.

$$\begin{aligned}
& \frac{PSf}{PN} \times 1 \\
& + \frac{1}{2.31} \times (1 + \overline{f - g}) \\
& + \frac{1}{2.4.51^2} \times (31^2 + \overline{2fl + 2gl} + \overline{3f^2 - 6fg - g^2}) \\
& + \frac{1}{2.4.4.71^3} \times (101^2 + \overline{6fl^2 + 2gl^2} + \overline{6f^2l + 12fgl + 6g^2l} + \overline{10f^3 - 30f^2g - 10fg^2 - 2g^3}) \\
& + \frac{1}{2.4.4.4.91^4} \times (351^4 + \overline{20fl^3 + 4gl^3} + \overline{18f^2l^2 + 12fgl^2 - 6g^2l^2} + \overline{20f^3l + 60f^2gl + 60fg^2l + 20g^3l} + \&c) \\
& + \frac{1}{2.4.4.4.4.111^5} \times (1261^5 + \overline{70fl^4 + 10gl^4} + \overline{60f^2l^3 + 24fgl^3 - 4g^2l^3} + \&c) \\
& + \frac{1}{2.4.4.4.4.4.131^6} \times (4621^6 + \overline{252fl^5 + 28gl^5} + \&c) \\
& + \frac{1}{2.4.4.4.4.4.4.151^7} \times (17161^7 + \&c)
\end{aligned}$$

Ut autem hæc forma ad simpliciorē revocetur, notandum quod ubi est $g = 0$ tunc $l = \infty$, ideoque omnes termini hujus seriei præter primam columnam evanescent, quoniam continet altissimam dignitatem quantitatis l ; sed ubi $g = 0$ tunc conus $PM D N E$ fit rectus; et curva inscripta sphaeræ cujus radius est PS , est circulus cujus diameter est ad f sicut PS ad $P N$, undè is diameter est $\frac{PS \times f}{PN}$; ideoque prima columna seriei quæ eo in casu dimidium curvæ exprimit, continet rationem semi-circuli ad diametrum 1 .

Ideo summa tota ejus columnæ $1 + \frac{1}{2.9} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{10}{2.4.4.7} + \&c.$ est 1.57079 , &c. ique in quocumque valore quantitatis g , siquidem ea quantitas in eâ columnâ eliminatur.

Ad inveniendam summam secundæ columnæ, ea in duas dividatur partes, quarum prior multiplicet $\frac{f}{1}$, altera $\frac{g}{1}$ ut habeatur summæ columnæ multiplicatæ per $\frac{f}{1}$ observandum quod singuli coëfficientes primæ columnæ (primo termino 1 secluso) sunt ad coëfficientes singulos secundæ columnæ ut numeri 1 ad 1 , 3 ad 2 , 5 ad 3 , 7 ad 4 , 9 ad 5 , 11 ad 6 , 13 ad 7 , &c. quæ ratio tandem abit in rationem duplam, itaque hi coëfficientes secundæ columnæ simul sumpti dimidium efficiunt quantitatis $.57079$ additâ insuper eâ quantitate quâ primi coëfficientes secundæ columnæ excedunt dimidium coëfficientium primæ, qui excessus celerrimè convergunt, suntque

$$\frac{\frac{1}{2}}{1.3} + \frac{\frac{1}{2}}{2.4.5} + \frac{1}{2.4.4.7} + \frac{\frac{3}{2}}{2.4.4.4.9} + \frac{7}{2.4.4.4.4.11} + \frac{21}{2.4.4.4.4.4.13} + \frac{66}{2.4.4.4.4.4.4.15} + \&c.$$

qui termini sunt	.08333
	.01250
	.00446
	.00217
	.00124
	.00078
	.00053
	.10613
summa reliquorum.	.00112
dimidium .57079	.28539
	.39152

Ut termini reliqui habeantur, fingi potest sequentes terminos decrescere in ratione duorum ultimo inventorum, unde summa omnium terminorum adjiciendorum erit .00112 proximè, hinc ea pars secundæ columnæ est .39152 $\frac{f}{1}$ proximè.

Hujus autem primæ partis secundæ columnæ coëfficientes sunt ad coëfficientes alterius partis ut -1 ad 1 , $+1$ ad 1 , 3 ad 1 , 5 ad 1 , 7 ad 1 , 9 ad 1 , &c. singuli autem erant ad suos excessus supra dimidium termini columnæ primæ ut 2 ad 1 , 4 ad 1 , 6 ad 1 , 8 ad 1 , 10 ad 1 , 12 ad 1 , &c. ergo coëfficientes alterius partes istius columnæ sunt ad eos excessus ut 2 ad -1 , 4 ad 1 , 6 ad 3 , 8 ad 5 , 10 ad 7 , quæ ratio tandem ad æqualitatem desinit; ergo summa istius columnæ sumatur æqualis differentiolis supra inventis .10613, et insuper quantitibus quibus inventi termini hujus columnæ excedunt eas differentiolas, quæ sunt

$$-\frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.4.5} + \frac{1}{2.4.4.7} + \frac{\frac{3}{2}}{2.4.4.4.9} + \frac{7}{2.4.4.4.4.11} + \frac{21}{2.4.4.4.4.4.13} + \frac{18}{2.4.4.4.4.4.4.15}$$

sive	— .25	
	+ .03750	Unde summa terminorum ejus columnæ est — .09952 $\frac{g}{1}$ proximè
	+ .00446	
	+ .00130	
	+ .00053	
	+ .00026	
	+ .00014	
	— .20581	
sum reliq.	16	
sum. differ.	+ .10613	
	— .09952 $\frac{g}{1}$	

Facilior paulo evadet calculus, si loco summæ laterum $P M + P N$, adhibeatur quantitas $\frac{f g}{P N - P M}$ ipsi æquipollens. Prolixior tamen est, quàm ut illum applicare sustinuerimus ad ulteriores consequentias.

Dixi ex his viam sterni ad determinationem curvæ quam affectat meridianus Telluris; nam si ex æquatione generali $y = Ax^{2n} + Bx^{2n+1} + Cx^{2n+2}$, &c. et ex serie inventâ determinetur attractio puncti P a quovis circulo, et erigatur in puncto axis, quod ejus circuli est centrum, ordinata quæ ejus circuli attractionem representet, et intelligatur curva per earum ordinarum verices transiens, quæsurat ejus curvæ area per vulgatas methodos, habebiturque gravitas puncti P in solidum; quæritur præterea punctum axeos Y in quo si erigeretur ordinata illi curvæ quæ gravitatem puncti P exprimit, ejus curvæ area bifariam divideretur, erit Y punctum axeos ad quod attractio puncti P dirigitur.

Pariter ex aequatione generali curvæ habebitur punctum axeos Z ad quod pertinet perpendicularum in curvæ punctum P, habebuntur ergo intervalla Z Y et Y Q, ex Z ducatur Z V parallela P Q quæ concurrat cum P Y productâ in V, producatur P Q in F ut fiat $PF = ZV$, ducaturque F Z, quoniam curva circa axem revolvitur, P F erit directio vis centrifugæ agentis in puncto P, P V directio gravitatis, P Z verò curvæ perpendicularis erit directio media nata ex utriusque vis compositione (ut constat factò cùm agatur de Tellure ipsâ); sed quia habebunt Z Y, Y Q, P Q et P Y habebuntur Z V et V Y, idè quæ habebitur V P, ergo habebuntur latera et diagonalis parallelogrammi F P V Z aive habebuntur rationes vis centrifugæ puncti P, vis ejus gravitatis et vis mediæ P Z ex utrâque resultantis, fiat ergo ut P V ad P Z ita gravitas puncti P ex attractione solidi nata et per aream curvæ inventa ad residuum ejus gravitatis, demptâ vi centrifugâ.

Tandem inscripta intelligatur in curva quæ queritur, alia curva ipsi omnino similis, ita ut eorum sit idem centrum, et axes supra se mutuò jaceant, æquatoris prioris curvæ semi-diameter dicatur m , et differentia ejus a semi-diametro alterius, quæ quæminima assumi potest, dicatur d m, abscissa C Q. prioris curvæ sit z . erit ejus differentia ab abscissâ cor-

respondenti alterius curvæ $\frac{z d m}{m} = Q n = r p$; ordina-

ta PQ sit y , ejus differentia ab ordinatâ correspondenti erit $\frac{y dm}{m} = Pp$; quoniam rt potest sumi ut portio tangen-

tis curvæ, triangulum $\Gamma p t$ erit simile triangulo fluxionali
 in puncto Γ sive etiam in puncto P ob similitudinem cur-
 varum et abscissarum erit: ergo $dz : dy = \Gamma p \left(\frac{z \, dm}{m} \right)$

$p = \frac{z \, dy}{dx} + \frac{d \, m}{m}$ ergo $Pt = Pp + pt = y + \frac{z \, dy}{dx} \times \frac{d \, m}{m}$ sed si ducatur $P \, \epsilon$ perpendicu-
 laris ad curvam in P erit etiam triang. $P \, \epsilon \, t$ simile triang. $r \, p \, t$ ideoque triang. fluxionali; nam
 ob similitudinem curvarum, tangens $r \, t$ est parallela curvæ in P ; ideoque angulus ϵ est rectus, est
 ergo $d \, v$ ad $d \, s$ ut $P \, t$ sive $y + \frac{z \, dy}{dx} \times \frac{d \, m}{m}$ ad $P \, \epsilon$ quod erit ergo $\frac{y \, dz + z \, dy}{d \, v} \times \frac{d \, m}{m}$ sive

deletā ratione $\frac{d m}{m}$ quæ data est, perpendiculari portio inter duas curvas similes intercepti erit ut $\frac{y d z + z d y}{d v}$, multiplicetur id perpendicularum per $y d v$, factum erit ut annulus solidus inter cur-

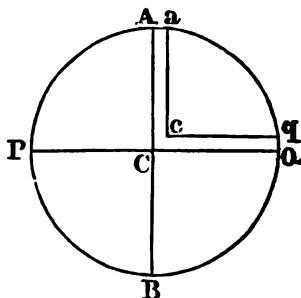
vas interceptus tandem ergo multiplicetur $y^2 dz + x y dy$ per valorem gravitatis acceleratricis secundum PZ quæ prius inventa fuit, factum erit ut pondus fluidi inter curvas similes intercepti in puncto P, sumantur ejus facti fluxiones facta d s constanti, et nihilo sequentur illæ fluxiones, sic pondera omnium partium inter duas curvas contentarum fient æqualia, et habebitur æquatio fluxionalis curvæ quam meridianus Terræ affectat.

Alia etiam est in hoc Problemate conditio quae brevius equationem suppeditare posset, nempe (fig. praeced.) cum sit PQ ad ZV ut ZY ad YQ , et ZV sit ubique ut *vis centrifuga* puncti P quae est semper proportionalis ordinatæ PQ , ratio ZY ad YQ constans esse debet. Bene ergo res se habet si utroque modo eadem obtineatur curva, sin minus, oportet ut inter has hypotheseas aliqua sit repugnantia, nempe dari solidum, uniformiter densum, rotans circa axem et in equilibrio constitutum, in quo media actio inter gravitatem et vim centrifugam sit perpendicularis ad curvam; quæ quidem dicta non poterit ut præcipiam palmam et laudem illi qui majori patientiâ ad cur-

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire et inter se comparare pondera corporum in Terræ hujus regionibus diversis.

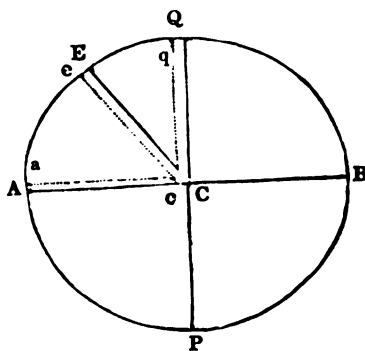
(*) Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ $A C Q q c a$ æqualia sunt; et pondera partium, cruribus totis proportionalium et similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, ideoque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium et in cruribus similiter sitarum partium reciproce ut crura, id est, reciproce ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum et æqualium quorumvis et in canalibus cruribus similiter sitarum corporum. Horum pondera sunt reciproce ut crura, id est, reciproce ut distantie corporum a centro Terræ. Proinde si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie Terræ consistent, erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut distantie eorum a centro. Et



industriâ determinabit generalissimè meridiani figuram ex genuinis Newtonianis Principiis, nullâ præsuppositâ ad circulum, ellipsem, aliamve curvam affinitate, sive his calculis ipsis feliciter tractatis sive aliis.

(*) • *Quoniam pondera.* Concipiatur (ut supra Prop. XIX.) canalis aqueæ plena a polo $Q q$ ad centrum $C c$ et inde ad æquatorem $A a$ pergens. Quia oportet fluidum quiescere (ex Hyp.) erit fluidum in canalibus crure $A C$ in æquilibrio cum fluido in ejusdem canalibus crure $Q C$, et portio quælibet fluidi in crure $C A$ consistet in æquilibrio cum simili et similiter positâ fluidi portione in crure $C Q$ (ex demonstratis, in Prop. præced.) idem quoque simili argumento colligitur de corporibus quibusvis homogeneis etiamsi fluida non sint. Quare corpora homogenea quæ sunt ut $A C$, $Q C$ in locis A et Q constituta æquè gravia sunt versùs centrum C . Sed gravitas corporis in A positi quod est ut $Q C$ est ad gravitatem alterius corporis homogenei ibidem constituti quod est ut $A C$ sicut $Q C$ ad $A C$. Sunt enim corporum homogeneorum in eodem loco consistentium pondera ut ipsamet corpora, ergo corporum homogeneorum in A et Q positorum gravitates sunt ut $Q C$ ad $A C$. Eodem modo ostenditur gravitatem corporis in loco E , in alterâ quâcumque canali $C E$, esse ad gravitatem corporis æqualis et homogenei in loco Q , ut $C Q$ ad $C E$; fluidum enim in canali $A C E$ quiescere debet sicut in priori canali

$A C Q$ (per Hyp.) undè, ex æquo, æqualium et homogeneorum corporum in Telluris superficie ubivis consistentium gravitates absolutæ sunt ut distantie a centro reciproce.



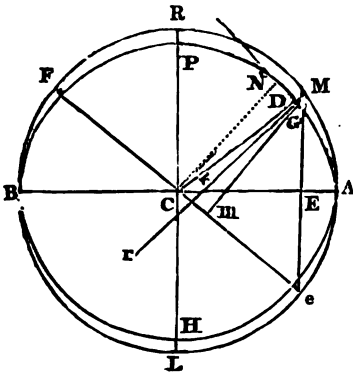
• Gravitatem corporis in E esse ad gravitatem corporis in Q ut $C Q$ ad $C E$ verum est non mathematicè, sed quam proximè; directio enim gravitatis corporis positi in E non est secundùm $E C$, ita ut ad centrum C tendat, sed est perpendicularis superficiem $Q E A$ (ut ex facto liquet) hinc gravitates in singulis punctis

eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciproce ut distantie locorum a centro: (b) et propterea, ex hypothesi quod Terra sphaeroidis sit, dantur proportionales.

Unde tale confit Theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos, sit quam proximè ut sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde est, ut quadratum sinus recti latitudinis. (c) Et in

forent reciproce ut radii osculatores curvæ, verùm ob figuram Terræ prope sphaericam id subtilius sectari videtur superfluum, tanto magis quod calculorum consequentiæ cum experimentis sint conferendæ, in quibus semper deficit mathematica æquitas.

91. (c) * Et propterea. Ex hypothesi enim quod Terra sit sphaeroidis, qualem vult Newtonus, hoc confit Theorema; quod scilicet incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos sit quamproximè ut sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde est, ut quadratum sinus recti latitudinis. Sit enim A P B A, ellipsis quæ



referat meridianum Terræ et A R B L A, circulus radio C A, descriptus ad quem ellipsis A P B A proximè accedit, sitque radius C A semi-diameter æquatoris terrestris, erit (ex natura ellipsis 247. Lib. I.) R P : M G = C R :

E N, ideòque M G = $\frac{R P \times E M}{C R}$. Sed

propter trianguia D M G, E M C, similia, ubi ellipsis ad circulum proximè accedit (tunc enim D G, sumi potest pro recta tangente ellipsis in puncto D, et ea tangens est quam proximè perpendicularis radio D C) est M G : M D = M C : M E æ: proinde M G = $\frac{M D \times M C}{M E}$,

est ergo $\frac{R P \times M E}{C R} = \frac{M D \times M C}{M E}$, undè fit

M D = $\frac{R P \times M E^2}{C R^2}$. Jam verò ex puncto

M, ducatur perpendicularis M m ad rectam F e, sit e m sinus versus arcus duplicatis A M, hoc

est, arcus M e, sive quia A M exhibet latitudinem (10) erit e m, sinus versus latitudinis duplicatæ; sed est e m \times e F = e M² (ex proprietate circuli). Quare ob datam e F, est e m ut e M², vel etiam ut M E² ideòque M D, est ut R P \times e m

$\frac{R P}{C R^2}$, vel ob datas $\frac{R P}{C R^2}$, fit M D, ut e m, sive ut M E². Quia verò pondera in locis A et D sunt ut distantie locorum a centro reciproce (ex dem.) erit incrementum ponderis in D, ut $\frac{1}{C D} - \frac{1}{C A}$, hoc est, ut C A — C D, vel ut C M — C D ideòque ut M D. Quare incrementum ponderis, &c.

(c) 92. * Et in eadem circiter ratione. Minimus arcus circuli curvam aliquam in dato puncto osculantis pro arcu infinitesimo curvæ in hoc puncto usurpari potest (121. Lib. I.). Sed integri gradus sunt ut minimi arcus similes, arcus autem illi sunt ut radii circularum curvam osculantium; quare gradus integri erunt ut iidem radii. Erit itaque gradus in loco D, ut radius circuli ellipsis ibidem osculantis, et gradus in loco A, itidem ut radius circuli ellipsis osculantis in eodem puncto A. Jam verò ducta perpendiculari C N, ad tangentem D N, sumptoque D r, pro radio osculatore in D, erit D r ut D k², sive quia est C P² = C N \times D k (ibid.) ob

datam C P² erit D k ut $\frac{1}{C N}$, ideòque radius circuli qui est ut D k³, erit ut $\frac{1}{C N^3}$, hoc est, radius circuli ellipsis osculantis est reciproce ut

cubus perpendiculari ex centro C in tangentem D N demissi. Quare incrementa graduum in D, pergendo ab æquatore ad polos erunt ut $\frac{1}{C N^3}$

— $\frac{1}{C A^3}$ hoc est, ut C A³ — C N³, sive ut

C M³ — C N³, vel etiam ut C M³ — C D³ quoniam differentia rectarum C N, C D admodum exigua est. Sed est C M³ = (C D + D M)³ = C D³ + 3 C D² \times D M + 3 C D \times D M² + D M³, ideòque C M³ — C D³ = 3 C D² \times D M + 3 C D \times D M² + D M³ = 3 C D² \times D M, ob quantitates D M², D M³, fere evanescentes respectu 3 C D² \times D M, sunt igitur incrementa graduum ut 3 C D² \times D M, sive ut D M, ob rectam C D proximè constantem. Quare incrementa graduum sunt ut ponderum incrementa.

93. Idem analyticè præstari potest quemadmodum elegantiissime, pro more suo, facit clarius.

Sit mediocris distantia Lunæ a Terrâ $D = 60$ semid. terrestr. tempus periodicum Lunæ $= 27$ dieb. 7 hor. 43'. semid. Terræ $= 1$, tempus revolutionis Terræ circa axem $= 23$ hor. 56'. 4". erit gravitas ad vin. centrifugam P ut 288 ad 1. Undè pro Terrâ foret $CA - CP : CP = 1 : 576$: Terra itaque minùs compressa foret quàm a Newtono definitum est, magis tamen quàm determinatum est ab Hugenio, verùm ob actionem Solis in Lunam, tempus ejus periodicum non respondet accuratè vi centrifugæ Terræ; alias correctiones hujus calculi invenies Trans. Philos. Num. 438. quibus ad Newtonianum proportionem magis accuratè revocatur. De hâc quæstione nobilissimâ procul dubio legantur quæ de Telluris figurâ dederunt clarissimi viri D. de Mairan in Monumentis Paris. an. 1720. D. de Maupertuis ibid. an. 1733. 1734. 1735. 1736. et in duobus opusculis quorum unum de Figuris Corporum Cœlestium, alterum de Figurâ Telluris inscribitur. Præclara quoque de eodem argumento ediderunt D. Clairaut in Monumentis Parisiensibus an. 1735. et in Transactionibus Philosophicis Num. 445. et 449. D. Bouguer ibid. an. 1736. D. Eustachius Manfredius ibid. an. 1734. et D. Stirling in Transactionibus Anglicis an. 1735.

* Viam sternet ad determinandam figuram Terræ ortam ex necessitate æquilibrii vis centrifugæ et vis gravitatis singularum ejus partium, si generalissimè solvatur Probl. XLV. (Prop. XCI. Lib. I.) Newtoni, nempe, si inveniatur attractio corpusculi non solidi sibi in axe solidi rotundi, sed sibi ubivis in ejus superficie, cujus Problematis analysim hic in compendium trademus.

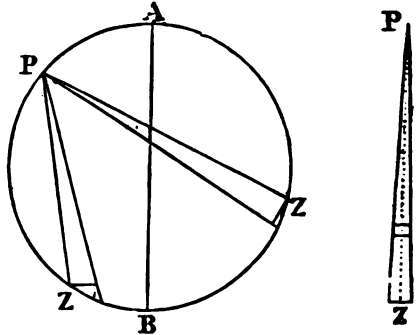
PROBLEMA.

Datâ æquatione curvæ cujuscumque quæ circa axim revolvens solidum describat, invenire attractionem corpusculi sibi in quocumque puncto superficie ejus solidi.

Constructio. Fingatur planum tangens id solidum in P , et super eo plano, e puncto P ut centro descripta intelligatur sphaera radio infinitè parvo, dividatur tota superficies hemisphaerii versus solidum conversi in portiunculas æquales; et concipiantur pyramides (quarum vertex sint in centro sphaeræ) illis portiunculis insistentes et inde ad solidi ipsius oppositam superficiem continuatæ, puta in Z , Z , terminentur illæ pyramides in eo solido per bases parallelas basibus ipsarum sphaeræ circumscriptis; corpusculi in puncto P sibi attractio ab omnibus illis pyramidibus, concipi poterit ut attractio a toto solido; exiguae enim ejus solidi portiones, quæ in extremitate unius cujusque pyramidis negliguntur, sunt ubique totius pyramidis respectu infinitè parvæ.

Attractio autem corpusculi P a singulâ pyramide erit ubique ut axis PZ ejus pyramidis;

nam ducantur ubivis in axe, duo puncta infinitè proxima, ducanturque per ea superficies duæ, parallelæ basi pyramidis, sive, quod idem est, parallelæ superficier sphaeræ circa P descriptæ, exiguum solidum inter eas superficies contentum crescat ut illæ superficies, sive ut quadratum portionis axeos abscissæ, sed cum attractio singulæ particule decrescat ut quadratum distantie a puncto P , sive decrecat ut quadratum ab-



scissæ; ideòque crescat particularum quantitas ut decrecat singulæ particule vis, evenit ut attractio ejus solidi ubivis in axe PZ sumpti eadem semper sit; æqualis erit v. gr. attractioni solidi cujus basis foret portio superficier sphaeræ intra pyramidem contentæ, et altitudo illa quæ minima axeos PZ portio assumpta. Hinc attractio totius pyramidis erit attractio ejus parvi solidi, toties repetita quot sunt axeos PZ portiunculæ; cum itaque portio superficier sphaeræ intra pyramides contenta, sit ubivis eadem, ex const., attractiones singularum pyramidum erunt ut numerus particularum æqualium in singulo axe PZ assumendarum, sive quod idem est, ut singuli axes PZ .

His positis: sit $MDNE$ unus e circulis genitis in solido proposito per revolutionem ordinatæ CM circa axim AB . Dico quod attractio puncti P ab omnibus pyramidibus quarum axes in circumferentiâ circuli $MDNE$ terminantur, (quæ est ut summa omnium axeos PZ ad eam circumferentiam terminatorum) est ut linea PC a puncto P ad centrum ejus circuli C ductæ, multiplicata per numerum axium PZ ad circumferentiam $MDNE$ pervenientium, (missis nempe singularum PZ longitudinibus).

Assumatur enim in circumferentiâ $MDNE$ punctum quodlibet Z , et ducta per centrum C lineâ $ZC\zeta$, ducatur $P\zeta$, ex demonstratis attractiones pyramidum ad Z et ζ pervenientium erunt ut PZ ad $P\zeta$; ducatur ex P in circumulum $MDNE$ perpendiculum PR et per R et centrum C ducatur diameter MRN , sumptaque $Nr = MR$ demittatur perpendiculum rp , sitque $rp = RP$, linea MN , PR et rp sunt in

R et ω , sive similis erit triangulo PRZ, ideoque fiat ut PZ ad RZ ita KZ sive $\frac{g y}{R Z \times f}$ d v ad ω s quod erit itaque $\frac{g y}{P Z \times f}$ d v.

4^o. In triangulo Zz ω , rectangulo in ω cum Zz sit d v et ω z sit $\frac{g y}{P Z \times f}$ d v erit quadratum

Z ω sive $\overline{Z\omega}^2 = d v^2 - \frac{g^2 y^2}{P Z^2 \times f^2} d v^2$ et cum sit PZ ad PS sicut Z ω ad Sz erit $P Z^2$ ad $P S^2$ sicut $\overline{Z\omega}^2$ ad \overline{Sz}^2 et $\overline{Sz}^2 = \frac{g^2 y^2}{P Z^2 \times f^2} \times d v^2$ ad Sz^2 ergo quadratum elementi curvæ quæsitæ est $\frac{P S^2}{P Z^2} \times 1 - \frac{g^2 y^2}{P Z^2 \times f^2} d v^2$: quod erat inveniendum.

Ut autem integretur, primò notandum quod ex naturâ circuli elementum d v sit æquale elemento d x $\times \frac{f}{2 y}$, ideoque quadratum ele-

menti inventum evadet $\frac{P S^2}{P Z^2} \times \frac{f^2}{4 y^2} - \frac{g^2}{4 P Z^2} \times d x^2$: præterea est $P Z^2 = P R^2 + R Z^2$, ut est $R Z^2 = R r^2 + r Z^2$ est autem, ex constructione, $R r = R N - N r =$

$\frac{g + f}{2} - x$ ideoque $R r^2 = \left(\frac{g + f}{2} \right)^2 - g x - f x + x x$ estque $r Z^2 = f x - x x$, ideo $(R Z^2 =$

$R r^2 + r Z^2) = \left(\frac{g + f}{2} \right)^2 - g x$ et $P Z^2 = P R^2 + \left(\frac{g + f}{2} \right)^2 - g x$; sed est $P R^2 + \left(\frac{g + f}{2} \right)^2$

$= P R^2 + R N^2 = P N^2$, ergo $P Z^2 = P N^2 - g x$, et si ad compendium tertia proportiona-

lis ad 2 P Q (sive g) et P N dicatur l ut sit $P N^2 = g l$ fiet $P Z^2 = g l - g x$ sicque, quadratum

elementi quæsitæ evadet $\frac{P S^2}{g l - g x} \times \left(\frac{f^2}{4 y^2} - \frac{g}{4 \times l - x} \right) \times d x^2$, sive cum y^2 fit $f x - x x$, erit

illud quadratum $\frac{P S^2}{4 g \times l - x} d x^2 \times \left(\frac{f^2}{x \times f - x} - \frac{g}{l - x} \right)$

Dividatur autem f^2 per $x \times f - x$ fit $\frac{f}{x} + 1 + \frac{x}{f} + \frac{x^2}{f^2} + \frac{x^3}{f^3}$ &c.

Dividatur g per $l - x$ fit $\frac{g}{l} - \frac{g x}{l^2} + \frac{g x^2}{l^3} + \frac{g x^3}{l^4}$, &c.

Differentia serierum fiet $\frac{f}{x} + \frac{l - g}{l} + \frac{l^2 - f g}{l^2 f} x + \frac{l^3 - f^2 g}{l^3 f^2} x^2 + \frac{l^4 - f^3 g}{l^4 f^3} x^3$, &c.

Divid. ea differ. per $l - x$ fit $\frac{f}{l x} + \frac{l + f - g}{l^2} + \frac{l^2 + l f + f^2 - 2 f g}{l^3 f} x + \frac{l^3 + l^2 f + l f^2 + f^3 - 3 f g}{l^4 f^2} x^2$, &c.

Unde quadratum elementi Sz

est $d x^2 \times \frac{P S^2 \times f}{4 g l} \times \left(\frac{1}{x} + \frac{l + f - g}{l^2} + \frac{l^2 + l f + f^2 - 2 f g}{l^3 f^2} x + \frac{l^3 + l^2 f + l f^2 + f^3 - 3 f g}{l^4 f^3} x^2 \right)$ &c.

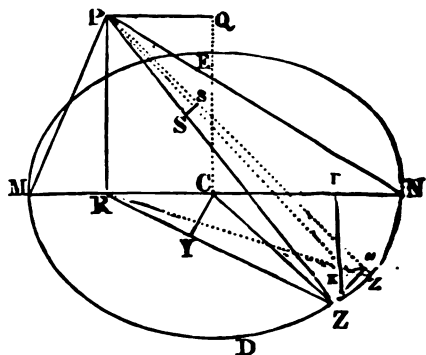
quæ series ad lubitum continuari potest.

Exprimatur autem curvæ quæsitæ longitudo per hanc seriem cujus coëfficientes sunt indeterminati

$$A x^{\frac{1}{2}} + B x^{\frac{3}{2}} + C x^{\frac{5}{2}} + D x^{\frac{7}{2}} + E x^{\frac{9}{2}} + \&c.$$

ejus fluxio erit $d x \times (\frac{1}{2} A x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} B x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} C x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2} D x^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{2} E x^{\frac{7}{2}} + \&c.)$ cujus quadratum

$$\begin{aligned} \text{erit } d x^2 \times (\frac{1}{4} A^2 x^{-1} + \frac{3}{2} A B + \frac{5}{2} A C x + \frac{7}{2} A D x^2 + \frac{9}{2} A E x^3 + \frac{1}{2} A F x^4, \\ + \frac{9}{4} B^2 x + \frac{15}{2} B C x^2 + \frac{21}{2} B D x^3 + \frac{27}{2} B E x^4, \&c. \\ + \frac{25}{4} C C x^3 + \frac{35}{2} C D x^4, \&c.) \end{aligned}$$



Collatis verò terminis seriei inventæ cum terminis correspondentibus hujus seriei fictitiæ, invenietur $A =$

$$B = A \times \frac{\frac{PS\sqrt{f}}{\sqrt{gl}}}{1 + \frac{f-g}{6lf}}$$

$$\frac{3l^2 + 2lf + 3f^2}{+ 2lg - 6fg - g^2}$$

$$C = A \times \frac{2.4.5l^2f^2}{10l^3 + 6fl^2 + 6f^2l + 10f^3 + 2gl^2 + 12fgl - 30f^2g + 6g^2l - 10fg^2 - 2g^3}$$

$$D = A \times \frac{2.4.4.7l^3f^3}{35l^4 + 20fl^3 + 18f^2l^2 + 20f^3l + 35f^4 + 4gl^3 + 12fgl^2 + 60f^2gl - 140f^3g - 6g^2l^2 + 60fg^2l - 70f^2g^2 + 20g^3l - 28fg^3 - 5g^4, \&c.}$$

$$E = A \times \frac{2.4.4.4.9l^4f^4}{2.4.5l^2f^2}$$

Hinc series quæ exprimit longitudinem curvæ quæsita fit

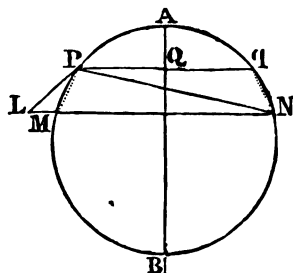
$$\frac{PS}{\sqrt{gl}} \sqrt{f} \times \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1+f-g}{2.3lf} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3l^2 + 2lf + 3f^2}{2.4.5l^2f^2} + \frac{+ 2lg - 6fg \times \frac{5}{2} + \&c.}{- g g} \right)$$

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}} \times f \times \left(1 + \frac{1+f-g}{2.3l} \frac{3l^2 + 2lf + 3f^2}{+ 2lg - 6fg, \&c.} - g g \right)$$

In hoc autem casu quantitas l sive $\frac{PN^2}{g}$ est major quàm f , majorem esse quàm g ex Hy

pothesi hujus casus sequitur, cum PN supponatur major quàm g ; majorem autem esse l quàm f hinc liquet, ductâ in trapezio $PqNM$ diagonali PN fiat in P super PN a parte lineæ PM angulus NPL æqualis angulo q , ita ut occurrat PL lineæ NM , dico lineam NL esse longiorem quàm NM , nam anguli MPq et q sunt æquales, sed angulus NPL est æqualis angulo q ; ergo angulus NPL cum angulo NPq major est angulo qPM , cadit ergo L ultrâ M ; sive NL est major NM ; est autem NL æquale l , nam trianguli PqN et PNL sunt similes ob angulos q et NPL æquales per const., angulosque NPq et PNL æquales ob parallelas $PqMN$, hinc ergo est Pq ad PN ut PN ad NL , sed est Pq sive g ad PN ut PN ad l , ergo est NL æqualis l et major quàm f .

Hinc, ut ista series convergat, debent ita disponi termini hujus seriei ut remotiores a primo ponantur in quibus crescunt in numeratore dimensiones quantitatum f aut g , et in denominatore dimensiones quantitatis l , ideòque hanc habet formam.



$$\begin{aligned}
& \frac{PSf}{PN} \times 1 \\
& + \frac{1}{2.3} \times (1 + \overline{f - g}) \\
& + \frac{1}{2.4.5} \times (3l^2 + \overline{2fl + 2gl} + \overline{3f^2 - 6fg - g^2}) \\
& + \frac{1}{2.4.4.7} \times (10l^3 + \overline{6fl^2 + 2gl^2} + \overline{6f^2l + 12fgl + 6g^2l} + \overline{10f^3 - 30f^2g - 10fg^2 - 2g^3}) \\
& + \frac{1}{2.4.4.4.9} \times (35l^4 + \overline{20fl^3 + 4gl^3} + \overline{18f^2l^2 + 12fgl^2 - 6g^2l^2} + \overline{20f^3l + 60f^2gl + 60fg^2l + 30g^3l} + \text{&c.}) \\
& + \frac{1}{2.4.4.4.11} \times (126l^5 + \overline{70fl^4 + 10gl^4} + \overline{60f^2l^3 + 24fgl^3 - 4g^2l^3} + \text{&c.}) \\
& + \frac{1}{2.4.4.4.4.13} \times (462l^6 + \overline{252fl^5 + 28gl^5} + \text{&c.}) \\
& + \frac{1}{2.4.4.4.4.15} \times (1716l^7 + \text{&c.})
\end{aligned}$$

Ut autem hæc forma ad simpliciorē revocetur, notandum quod ubi est $g = 0$ tunc $l = \infty$, ideoque omnes termini hujus seriei præter primam columnam evanescent, quoniam continet altissimam dignitatem quantitatis l ; sed ubi $g = 0$ tunc conus $PM DNE$ fit rectus; et curva inscripta sphaeræ cujus radius est PS , est circulus cujus diameter est ad f sicut PS ad $P N$, unde is diameter est $\frac{PS \times f}{PN}$; ideoque prima columna seriei quæ eo in casu dimidium curvæ exprimit, continet rationem semi-circuli ad diametrum 1 .

Ideo summa tota ejus columnæ $1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{10}{2.4.4.7} + \text{&c.}$ est 1.57079 , &c. iaque in quocumque valore quantitatis g , siquidem ea quantitas in eâ columnâ eliminatur.

Ad inveniendam summam secundæ columnæ, ea in duas dividatur partes, quarum prior multiplicet $\frac{f}{1}$, altera $\frac{g}{1}$ ut habeatur summæ columnæ multiplicatæ per $\frac{f}{1}$ observandum quod singuli coefficientes primæ columnæ (primo termino 1 secluso) sunt ad coefficientes singulos secundæ columnæ ut numeri 1 ad 1 , 3 ad 2 , 5 ad 3 , 7 ad 4 , 9 ad 5 , 11 ad 6 , 13 ad 7 , &c. quæ ratio tandem abit in rationem duplam, itaque hi coefficientes secundæ columnæ simul sumpti dimidium efficiunt quantitatis $.57079$ additâ insuper eâ quantitate quâ primi coefficientes secundæ columnæ excedunt dimidium coefficientium primæ, qui excessus celerrimè convergunt, suntque

$$\frac{\frac{1}{2}}{1.3} + \frac{\frac{1}{2}}{2.4.5} + \frac{1}{2.4.4.7} + \frac{\frac{1}{2}}{2.4.4.4.9} + \frac{7}{2.4.4.4.4.11} + \frac{21}{2.4.4.4.4.4.13} + \frac{66}{2.4.4.4.4.4.4.15} + \text{&c.}$$

qui termini sunt

.08333
.01250
.00446
.00217
.00124
.00078
.00053
.10613
summa reliquorum .00112
dimidium .57079 .28539
.39152

Ut termini reliqui habeantur, fingi potest sequentes terminos decrescere in ratione duorum ultimò inventorum, unde summa omnium terminorum adjiciendorum erit .00112 proximè, hinc ea pars secundæ columnæ est $.39152 \frac{f}{1}$ proximè.

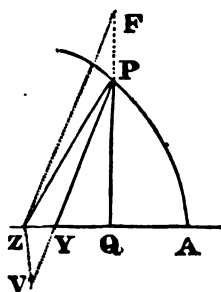
Hujus autem primæ partis secundæ columnæ coefficientes sunt ad coefficientes alterius partis ut -1 ad 1 , $+$ 1 ad 1 , 3 ad 1 , 5 ad 1 , 7 ad 1 , 9 ad 1 , &c. singuli autem erant ad suos excessus supra dimidium termini columnæ primæ ut 2 ad 1 , 4 ad 1 , 6 ad 1 , 8 ad 1 , 10 ad 1 , 12 ad 1 , &c. ergo coefficientes alterius partes istius columnæ sunt ad eos excessus ut 2 ad -1 , 4 ad 1 , 6 ad 3 , 8 ad 5 , 10 ad 7 , quæ ratio tandem ad æqualitatem desinit; ergo summa istius columnæ sumatur æqualis differentioliis supra inventis .10613, et insuper quantitatis quibus inventi termini hujus columnæ excedunt eas differentias, quæ sunt

$$-\frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.4.5} + \frac{1}{2.4.4.7} + \frac{\frac{1}{2}}{2.4.4.4.9} + \frac{3}{2.4.4.4.4.11} + \frac{7}{2.4.4.4.4.4.13} + \frac{18}{2.4.4.4.4.4.4.15}$$

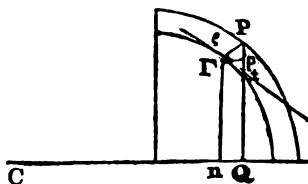
Facilior paulo evadet calculus, si loco summæ laterum $PM + PN$, adhibeatur quantitas $\frac{f g}{PN - PM}$ ipsi æquipollens. Prolixior tamen est, quàm ut illum applicare sustinuerimus ad ulteriores consequentias.

Dixi ex his viam sterni ad determinationem curvæ quæ affectat meridianus Telluris; nam si ex æquatione generali $y = Ax^2 + Bx^{2^n} + Cx^{3^n}$, &c. et ex serie inventâ determinetur attractio puncti P a quovis circulo, et erigatur in puncto axis, quod ejus circuli est centrum, ordinata quæ ejus circuli attractionem representet, et intelligatur curva per earum ordinarum vertices transiens, quæraturs ejus curvæ area per vulgatas methodos, habebiturque gravitas puncti P in solidum; quæraturs præterea punctum axeos Y in quo si erigeretur ordinata illi curvæ quæ gravitatem puncti P exprimit, ejus curvæ area bifariam divideretur, erit Y punctum axeos ad quod attractio puncti P dirigitur.

Pariter ex æquatione generali curvæ habebitur punctum axeos Z ad quod pertinet perpendicularum in curvæ punctum P , habebuntur ergo intervalla ZY et YQ , ex Z ducatur ZV parallela PQ quæ concurrat cum PY productâ in V , producaturs PQ in F ut fiat $PF = ZV$, ducaturque FZ , quoniam curva circa axem revolvitur, PF erit directio vis centrifugæ agentis in puncto P , PV directio gravitatis, PZ verò curvæ perpendicularis erit directio media nata ex utriusque vis compositione (ut constat facto cùm agatur de Tellure ipsâ); sed quia habenturs ZY , YQ , PQ et PY habebunturs ZV et VY , idèoque habebitur V , ergo habebunturs latera et diagonalis parallelogrammi $FPVZ$ sive habebunturs rationes vis centrifugæ puncti P , vis ejus gravitatis et vis mediæ PZ ex utrâque resultantis, fiat ergo ut PV ad PZ ita gravitas puncti P ex attractione solidi nata et per aream curvæ inventa ad residuum ejus gravitatis, demptâ vis centrifugâ.



Tandem inscripta intelligatur in curva quæ quæriturs, alia curva ipsi omninò similis, ita ut earum sit idem centrum, et axes supra se mutuò jaceant, æquatoris prioris curvæ semi-diametro dicatur m , et differentia ejus a semi-diametro alterius, quæ quamminima assumi potest, dicatur d , abscissa CQ prioris curvæ sit z , erit ejus differentia ab abscissâ correspondenti alterius curvæ $\frac{z dm}{m} = Qn = rp$; ordinata PQ sit y , ejus differentia ab ordinatâ correspondenti erit $\frac{y dm}{m} = Pp$; quoniam rt potest sumi ut portio tangentis curvæ, triangulum rpt erit simile triangulo fluxionali in puncto r sive etiam in puncto P ob similitudinem curvarum et abscissarum erit: ergo $dz : dy = rp \left(\frac{z dm}{m} \right)$



$pt = \frac{z dy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ ergo $Pt = Pp + pt = y + \frac{2 dy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ sed si ducatur $P\epsilon$ perpendicularis ad curvam in P erit etiam triang. $P\epsilon t$ simile triang. rpt idèoque triang. fluxionali; nam ob similitudinem curvarum, tangens rt est parallela curvæ in P ; idèoque angulus ϵ est rectus, est ergo dv ad dz ut Pt sive $y + \frac{z dy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ ad $P\epsilon$ quod erit ergo $\frac{y dz + z dy}{dv} \times \frac{dm}{m}$ sive

deletâ ratione $\frac{d m}{m}$ quæ data est, perpendiculari portio inter duas curvas similes intercepti erit ut $\frac{y dz + z dy}{dv}$, multiplicetur id perpendicularum per $y dv$, factum erit ut annulus solidus inter curvas interceptus tandem ergo multiplicetur $y^2 dz + z y dy$ per valorem gravitatis acceleratricis secundum PZ quæ prius inventa fuit, factum erit ut pondus fluidi inter curvas similes intercepti in puncto P , sumanturs ejus facti fluxiones facta dz constanti, et nihilo æquanturs illæ fluxiones, sic pondera omnium partium inter duas curvas contentarum fient æqualia, et habebitur æquatio fluxionalis curvæ quæ meridianus Terræ affectat.

Alia etiam est in hoc Problemate conditio quæ brevius æquationem suppeditare posset, nempe (fig. præced.) cùm sit PQ ad ZV ut ZY ad YQ , et ZV sit ubique ut vis centrifuga puncti P quæ est semper proportionalis ordinatæ PQ , ratio ZY ad YQ constans esse debet. Bene ergo res se habet si utroque modo eadem obtineatur curva, sin minus, oportet ut inter has hypotheses aliqua sit repugnantia, nempe dari solidum, uniformiter densum, rotans circa axem et in æquilibrio constitutum, in quo media actio inter gravitatem et vim centrifugam sit perpendicularis ad curvam; quæ quidem dicta non putenturs ut præripiam palmam et laudem illi qui majori patientiâ aut

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

(v) *Puncta æquinoctialia regredi, et axem Terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis (q) inclinari in eclipticam et bis redire ad positionem priorem.*

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet, et vix aut ne vix quidem sensibilis.

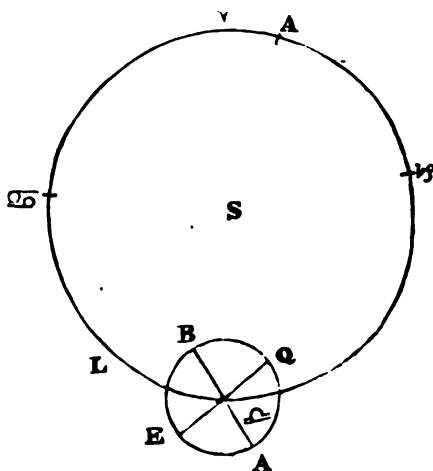
98. Tandem si ratio illa sit numeri 1351 ad 1440 ut quibusdam mathematicis mensurarum peritissimis videtur, major prodit penduli longitudo, nimirum ped. Paris. 3. lin. 8.3888.

Hæc sunt quæ ad Telluris figuram spectant. Hæc de re nova quamplurima an. 1740. et 1741. duplici Dissertatione edidit P. Boscowick S. J. insignis matheseos professor: maximè autem exoptandum ut ad hujusce questionis totiusque matheseos utilitatem salvi et incolumes redeant clariss. Academici qui ad definiendam Telluris figuram nobili ardore laboriosum iter versus æquatorem susceperunt. Simul enim collatis versùs polum et versùs æquatorem institutis observationibus, a doctissimis viris pro bono scientiarum in unum conspirantibus certissima de Telluris magnitudine et figurâ, gravitatis decremento, aliisque ad astronomiam, geographiam et physicam maximè momentosis speranda sunt.

(*) 101. *Puncta æquinoctialia.* Si Terra nullo alio motu præter motum progressivum in suâ orbitâ motumque vertiginis circa axem ageretur, axem suum sibi semper parallelum retineret (Cor. 22. Prop. LXVI. Lib. I.) sed ob Telluris figuram versùs polos depressam et versùs æquatorem oblongatam fit ut axis situs perturbetur. Referat $\gamma\gamma$ \triangle $\gamma\gamma$, orbitam Telluris circâ Solem S, sitque A E B Q, ipsa Tellus cujus poli A et B, æquator E Q. Quoniam (ex Prop. præced.) Terra est sphaeroidis ad polos A et B, depressa et versùs æquatorem E Q, elata, instar globi annulo inherentis spectari poterit, annulo enim æquivalet materia redundans in regionibus æquatoris. Quare (per Cor. 20. Prop. LXVI.) annuli hujus nodi regredientur, hoc est, Tellus digressa a librâ \triangle , ubi communis sectio eclipticæ et æquatoris versùs Solem S, dirigitur, et per $\gamma\gamma$ versùs $\gamma\gamma$ pergens, ad nodum A prius pertinget quàm ad $\gamma\gamma$ pervenerit, et Tellus ab $\gamma\gamma$ per $\gamma\gamma$ versùs \triangle progrediens prius alterum nodum L attinget quàm \triangle ubi in priori revolutione erat nodus: id est, æquatoris planum productum, per Solem prius transibit quàm Telluris centrum ad \triangle pervenerit, sed tunc contingit æquinoctium dum nempe Sol in plano æquatoris terrestri versatur (4.) illaque puncta pro æquinoctialibus habentur in quibus Sol videtur tem-

pore æquinoctiorum. Quare patet, stellis fixis quiescentibus, puncta æquinoctialia omniaque eclipticæ puncta quæ a punctis æquinoctialibus numerantur, regredi seu in antecedentia moveri. Hic punctorum æquinoctialium regressus pendet ab actione Solis in materiam ad partes æquatoris redundantem, sed et Lunæ etiam non leves vires esse possunt; cùm enim Luna in eclipticæ plano aut non procul ab eo jaceat, ad eundem cum Sole effectum concurret. Sed infra computabitur motus æquinoctiorum ab utràque vî, Solis scilicet et Lunæ oriundus.

(q) 102. *Bis inclinari in eclipticam.* In semi-revolutione Telluris circâ Solem a \triangle per $\gamma\gamma$ ad $\gamma\gamma$, actio Solis inclinationem æquatoris in eclipticam minuire conatur cùm illa actio eam inclinationem augere conetur a $\gamma\gamma$ ad \triangle , hinc maxima fit inclinatio inter \triangle et $\gamma\gamma$ postea minuitur ex Solis actione oriunda (Cor. 10. et 18.



Prop. LXVI. Lib. I.) sitque inclinatio illa minima, cùm Terra est inter $\gamma\gamma$ et $\gamma\gamma$, cùm verò Tellus inter $\gamma\gamma$ et $\gamma\gamma$ pervenit, rursus restituitur præcedens inclinatio (ibid.) sicque deinceps simulque cum æquatore Telluris axis oscillatur.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes planetas deferre, et minores illos in ellipsis, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimodè, iisque adficiuntur inæqualitatibus quæ in Lunâ nostrâ notantur. Hæc utique (per Cor. 2, 3, 4, et 5. Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad Terram, in syzygiis quàm in quadraturis, nisi quatenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi apogæum Lunæ in syzygiis versatur, et minima ubi idem in quadraturis consistit; et inde Luna in perigæo velocior est et nobis propior, in apogæo autem tardior, et remotior in syzygiis quàm in quadraturis. Progreditur insuper apogæum, et regrediuntur nodi, sed motu inæquabili. Et apogæum quidem (per Cor. 7. et 8. Prop. LXVI.) velocius progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis, et excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per Corol. 2. Prop. LXVI.) quiescunt in syzygiis suis et velocissimè regrediuntur in quadraturis. Sed et major est Lunæ latitudo maxima in ipsius quadra-

Axis igitur Terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinatur in eclipticam et bis redit ad positionem priorem: hæc omnia faciliè intelliget qui in mentem revocaverit Prop. LXVI. Lib. I. ultimasque ejusdem Corollaria.

103. In singulis octantibus inter æquinoctia et solstitia sequentia, inclinatio axis Terræ ad eclipticam redit ad priorem magnitudinem, plurimique annorum decursu sensibilior non evadit, at regressus punctorum eclipticæ continuo fit in antecedentia, nec ad pristinum locum redeunt puncta æquinoctialia, nisi post integrum circulum. Hinc mutatio quæ unius anni spatio insensibilis est, post plurium annorum intervalla notabilis evadit.

104. Cùm stellæ fixæ quiescant et retrocedat communis sectio æquatoris et eclipticæ, necesse est ut mutabilis sit fixarum a punctis æquinoctialibus distantia et stellæ ab iisdem punctis versus orientem quotidie progredi videantur, undè stellarum longitudines quæ in eclipticâ ab initio Arietis sive intersectione vernali eclipticæ et æquatoris computari solent, continuè crescunt, et

fixæ omnes videntur moveri in consequentia signorum. Hinc fit quod constellationes omnes antiquam sedem mutaverint. Sic constellatio Arietis quæ tempore Hipparchi propè intersectionem vernalem eclipticæ et æquatoris visa fuit, nunc ab eadem digressa in signo Tauri moratur, sicut et Tauri constellatio in Geminorum locum transivit, Geminique in Cancrum promoti sunt, ita ut unaquæque constellatio e suo in proximum locum successerit. * Cùm autem hic, dum de inclinatione egimus, nec ad motum ipsum nodorum, nec ad eccentricitatem orbitarum quas Terra aut Luna describunt, nec ad spaldum motus, nec ad irregularitatem molis Terræ attenderimus, nec denique ad aliorum planetarum actiones, quædam etiâ eclipticæ inclinationi mutatio afferri potest, quæ forte perseverabit satis ut sensibilis evadat: inclinationis angulum 1'. centum annis decrescere volebat Louvillæus, cui non repugnant quæ Cassinus in Astronomiæ Elementis, ex variâ astronomorum æstimatione inclinationis eclipticæ retulit. Sed de his plura in posterum erunt dicenda.

turis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quàm in syzygiis: et motus medius tardior in perihelio Terræ (per Corol. 6. Prop. LXVI.) quàm in ipsius aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab astronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam (*) a prioribus astronomis non observatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii apogæi et nodorum Lunæ, et eorundem æquationes, ut et differentia inter eccentricitatem maximam in syzygiis et minimam in quadraturis, et inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis solaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicatâ ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per Corol. 1. et 2. Lem. X. et Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) sed hæc inæqualitas in calculo astronomico ad prostaphæresin Lunæ referri solet, et cum eâ confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales satellitum Jovis et Saturni a motibus lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi lunarum seu satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius nodorum satellitis extimi jovialis, est ad motum medium nodorum Lunæ nostræ, in ratione compositâ ex ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, et ratione simplici temporis periodici satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) (b) ideòque annis centum conficit nodus iste 8 gr. 24' in

(*) * A prioribus astronomis non observatæ. Inæqualitates illæ quas hic per transennam enumerat Newtonus, æquationesque omnes seu correctiones deinceps commodius explicabuntur, et quomodò variatio Lunæ ad prostaphæresim in calculo astronomico referri soleat, exponetur. Variatio autem dicitur inæqualitas illa quâ fit ut motus Lunæ in primo mensis quadrante, sive pergente Lunâ a conjunctione ad quadraturam proximam retardetur, in secundo acceleretur dum tendit a quadraturâ ad oppositionem, in tertio retardetur rursus et in quarto iterum acceleretur.

(b) * Ideòque annis centum. Tempus periodicum Terræ circa Solem est dierum 365.2565; tempus periodicum Jovis circa Solem est dierum 4332.514 (per Phæn. IV.) tempus periodicum satellitis circa Jovem est dierum 16.6880 (per Phæn. II.) et tempus periodicum Lunæ circa

Terram dierum 27.321. (Prop. XVII.) Sump-
tisque logarithmis, erit

$$L. (365.2565)^2 = 5.1251956$$

$$L. 16.6880 = 1.2224043$$

$$\text{utriusque summa} = 6.3475999$$

$$\text{Deindè } L. (4332.514)^2 = 7.2734600$$

$$L. 27.321 = 1.4364966$$

$$\text{utriusque summa} = 8.7099566$$

Ab hac ultimâ subtrahatur sum-
ma superior - - -

$$6.3475999$$

$$\text{residuum erit } L. 2.3623567$$

Cui respondet numerus 230.38. Quare ex
hoc calculo et analogiâ Newtoni patet motum

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum et refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.

Mare singulis diebus tam lunaribus quàm solaribus bis intumescere debere ac bis defluere, patet ⁽¹⁾ per Corol. 19. et 20. Prop. LXVI. Lib. I. ut et ⁽²⁾ aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis et liberis, appulsum luminarium ad meridianum loci minori quàm sex horarum spatio sequi, uti fit in maris Atlantici et Æthiopici tractu toto orientali inter Galliam et Promontorium Bonæ Spei ut et in maris Pacifici littore Chilensi et Peruviano: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter secundam, tertiam vel quartam, incidit, nisi ubi motus ab oceano profundo per loca vadosa propagatus usque ad horam, quintam, sextam, septimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad meridianum loci, tam infra horizontem quàm supra, et per horas diei lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impressa manet aliquamdiu et per vim novam subinde impressam augetur, donec mare ad altitudinem maximam ascenderit, id quod fiet spatio horæ unius duarumve, sed

extimi dierum 16.688. Sumptis logarithmis erit

$$L. - 69.681 = 4.8431144$$

$$L. dierum 27.321 = 1.4364966$$

$$\text{utriusque log. summa} = 6.2796110$$

$$\text{Deindè } L. 302\frac{3}{4} = 2.4805818$$

$$\text{Log. dier. 16.688} = 1.2224043$$

$$\text{utriusque summa} = 3.7029861$$

Hæc subtrahatur a summâ superiori 6.2796110 remanet log. 2.5766249, cui respondet numerus 378. ferè. Quare ex analogiâ Newtoni et calculo colligitur variationem satellitis esse partem 378 variationis Lunæ circiter. Sed variationem Lunæ maximam in apogeo Solis deinceps determinat Newtonus 33'. 14". sive 1994'. Quare pars 378. est 5". 15" ut Newtonus invenit, quamproximè.

⁽¹⁾ * Per Cor. 19. et 20. Si fluidum in alveo per superficiem cujusvis planetæ excavato contineatur, simulque cum planetâ motu diurno periodico uniformiter revolvatur, partes singulæ hujus fluidi per vices acceleratæ et retardatæ in syzygiis suis, hoc est, in meridiè et mediâ nocte velociores erunt; in quadraturis sive horâ sextâ matutinâ, et vespertinâ tardiores quàm superficies

globi contigua, quare fluat in alveo reflexque per vices perpetuò (per Cor. 19. et 20.) idem postea iterum demonstrabitur, viresque Solis et Lunæ seorsim computabuntur.

⁽²⁾ * *Aquæ maximam altitudinem.* Rem ita se habere patet ex observatis æstibus marinis, ratio autem hæc est. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum et postea decrevit, attamen hujus vis effectus nondum est maximus. Omnis enim motus semel impressus perseverat uniformiter, donec motu contrario destruat vel saltem retardetur. Hinc fit ut fluxus maris per sex circiter horas ante-meridianas auctus et cum motu diurno conspirans acceleratus, majori caliditate ulterius pergere debeat et aquas magis magisque attollet, usquè dum eadem vis motu diurno contraria fluidi cursum paulatim sistat et aquas cogat refluxere. Hæc motus retardatio maximè circa octantes sive horam tertiam notabilis est. Alia non desunt exempla maximorum effectuum qui post causas maximas contingunt. Non in ipsis solstitiis æstivis maxime fervet æstas, sicut neque in ipsis solstitiis hybernæ maxime friget hiems; sed integro circiter mense post solstitia maximus deprehenditur æstatis hybernæque effectus. Indubitatâ quoque constat experientiâ summum calorem secundâ aut terciâ post meridiem horâ fieri.

sæpius ad littora spatio horarum trium circiter, vel etiam plurium si mare sit vadosum.

(^b) Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppositione conjunguntur eorum effectus, et componetur (¹) fluxus et refluxus maximus. In quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimat, deprimetque ubi Luna attollit; et ex effectuum differentiâ æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teste, major est effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra syzygias et quadraturas, æstus maximus qui solâ vi lunari incidere semper deberet in horam tertiam lunarem, et solâ solari in tertiam solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius est; ideòque in transitu Lunæ a syzygiis ad quadraturas, ubi hora tertiâ solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo post octantes Lunæ, et paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem in transitu Lunæ a quadraturis ad syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμήν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantiiis a Terrâ. In minoribus enim distantiiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque (^b) in triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis (¹) paulò majores sint, et in quadraturis paulò minores (cæteris paribus) quàm tempore æstivo; et Luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quàm antè vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. (^m) Unde fit ut æstus duos omnino maximi in syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque luminaris ex ipsius declinatione seu distantia ab æquatore. Nam si luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, sine actionis intensione et remissione, ideòque nullam motûs reciprocationem cieret. Igitur luminaria

(^b) * *Motus autem bini.* Quemadmodum corpus quodvis duplici vi sollicitatum in lineis duabus progredi nequit, sed conjunctis viribus parallelogrammi diagonalem eodem modo describit ac si unicâ vi juxta diagonalis directionem argeretur (41. Lib. I.) ita motus bini quos luminaria hæc duo excitant non cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient.

(¹) * *Fluxus et refluxus maximus*, ut potè e virium summâ tum temporis oriundus.

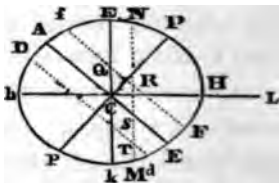
(^b) * *In triplicatâ ratione diametrorum* (Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I.).

(¹) * *Paulò majores sint*, ob majorem virium summam et in quadraturis paulò minores ob minorem virium differentiam quàm tempore æstivo.

(^m) * *Undè fit ut æstus.* Si enim Luna in syzygiarum alterâ sit circâ perigæum, æstumque maximum conjunctis cum Sole viribus tunc temporis excitet, necesse est ut in alterâ syzygiâ versetur circâ apogæum minoresque vires obtineat.

recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent, et propterea minores ciebunt æstus in syzygiis solstitialibus quàm in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebunt æstus quàm in quadraturis æquinoctialibus, eo quod Lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maximè superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in syzygiis et minimi in quadraturis luminarium, circa tempora æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in syzygiis comitatur semper minimus in quadraturis, ut experienciâ compertum est. Per minorem autem distantiam Solis a Terrâ, tam tempore hyberno quàm tempore æstivo, sit ut æstus maximi et minimi sæpius præcedant æquinoctium verum quàm sequantur, et sæpius sequantur autumnale quàm præcedant.

Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Designet A p E P Tellurem aquis profundis undique coopertam; C centrum ejus; P, p polos; A E æquatorem; F locum quemvis extra æquatorem; F f parallelum loci; D d parallelum ei respondentem ex alterâ parte æquatoris; L locum quem Luna tribus ante horis occupabat; H locum Telluris ei perpendiculariter subjectum; h locum huic oppositum; K, k loca inde gradibus 90 distantia, C H, C h maris altitudines maximas mensuratas a centro Telluris; et C K, C k altitudines minimas: et si axibus H h, K k describatur ellipsis, deinde ellipseos hujus revolutione circa axem majorem H h describatur sphærois H P K h p k; designabit hæc (*) figuram maris quam proximè, et erunt C F, C f, C D, C d altitudines maris in locis F, f, D, d.



(*) 106. • *Figuram maris quam proximè.* Circulus centro T descriptus Tellurem referat; circulus autem centro L descriptus exhibeat Lunam. Si nulla esset in Tellurem actio, Tellus profundis aquis undiquè cooperta et quiescens (per Hyp.) in sphaeram sese componeret. At singulæ Telluris partes gravitant in Lunam, estque gravitas in Lunam in ratione duplicatâ distantiarum a centro reciproçè. Jam verò recta L T, exponat gravitatem acceleratricem corporis in centro T positi versus Lunam, sitque E quælibet fluidi marini particula. Si in recta L E productâ sumatur L K æqualis L T, sitque L F ad L K in duplicatâ ratione L K ad L E, recta L F exponet gravitatem corporis in loco E versus Lunam, quæ vis dividitur in vires ut F G et G L (Prop. LXVI. Lib. I.). Si autem a vi illâ quâ corpus in E locatum urgetur, quæ est ut G L, auferatur vis ut T L quâ centrum Telluris urgetur versus Lunam, relinquuntur vires ut F G, G T, quibus corpus E sollicitatur præter vim propriam gravitatis quâ tendit versus centrum Terræ et vim ipsi commu-

nem cum centro ipsius Terræ. Jam sit C punctum Telluris cujus zenith Luna imminet, A verò punctum oppositum, sintque B et D puncta circumposita, sive potius exhibeant circulum horizontis in quo Luna versatur, liquet punctum G a T maximè distare, ubi punctum E est aut in C, aut in A; in priori casu G transeat in M, in posteriori in N; dum verò punctum E versatur in circulo B D, punctum G ferè coincidit cum T, nullaque partibus in circulo B D locatis relinquuntur vires præter vim gravitatis propriæ atque vim F G; ipsæ verò F G, sit B T aut D T, coeuntibus punctis F et K; quare fluidi particule in locis B et D, præter vim gravitatis propriæ urgentur etiam versus centrum T vi ex Lunâ procedente, particule in loco C, versus Lunam magis attrahuntur quàm Terra integra quæ in centro T locata fingi potest; particule autem in loco A, versus Lunam minùs attrahuntur quàm Terra integra in T, ideoque eodem modo afficiuntur ac si ad partes contrarias urgerentur. At particule in circulo B D, magis gravitant versus T; in locis inter

in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet (°) in tempora solstitiorum; præsertim si Lunæ nodus ascendens versatur in principio Arietis. Sic experiētiā compertum est, quod æstus matutini tempore hyberno superant vespertinos, et vespertini tempore æstivo matutinos, ad Plymuthum quidem altitudine quasi pedis unius, ad Bristoliam verò altitudine quindecim digitorum: observantibus Colepressio et Sturmio.

Motus autem hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æstus, etiam cessantibus luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motûs impressi minuit differentiam æstuum alternorum; et æstus proximè post syzygias majores reddit, eosque proximè post quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad Plymuthum ad Bristoliam non multò magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus, non sint primi a syzygiis, sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam et fluviorum ostiis, (P) sint quarti vel etiam quinti a syzygiis.

(°) * *In tempora solstitiorum.* Tunc enim in syzygiis utrumque luminare ab æquatore maximè declinat, atquè fluxuum differentia adhuc augebitur, si Lunæ nodus ascendens versatur in principio Arietis; nam præter declinationis Solis maximam, Luna quoque Soli conjuncta quantitate latitudinis maximæ in boream aut austrum magis declinat. Hinc fit fluctus borealis nobis vicinissimus et fluctus australis remotissimus in eadem revolutione diurnâ.

(P) * *Sint quarti vel etiam quinti.* In Opusculo de Mundi Systemate quædam occurrunt observationes quæ ad hunc locum pertinent, eas itaque exscribemus. Fieri etiam potest, inquit autor, ut æstus omnium maximus sit quartus vel quintus a syzygiis vel tardius adveniat, eò quod retardantur motus marium in transitu per loca vadosa ad littora. Sic enim æstus accedit ad littus occidentale Hiberniæ horâ tertiâ lunari, et post horam unam et alteram ad portus in littore australi ejusdem insulæ ut et ad insulas Cassiterides vulgò Sorling dictas. Dein successivè ad Falmuthum, Plymuthum, Portlandiam insulam, Vectam, Winchelseiam, Doveriam, ostium Tamesis et Pontem Londinensem, consumptis horis duodecim in hoc itinere. Sed et oceani ipsius alveis haud satis profundis impeditur æstuum propagatio, incidit enim æstus ad insulas Fortunatas et ad occidentalia marique Atlantico exposita littora Hiberniæ, Galliæ, Hispaniæ et Africæ totius usque ad Caput Bonæ Spei in horam tertiam lunarem, præterquam in locis nonnullis vadosis ubi æstus impeditus tardius advenit, inque freto Gaditano quod motu ex mari Mediterraneo propagato citiùs æstuat; per-

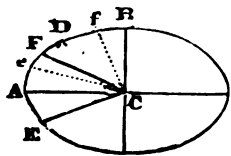
gendo verò de his littoribus per oceani latitudinem ad oras Americæ, accedit æstus primò ad Brasilie littora maximè orientalia circâ horam lunarem quartam vel quintam; deindè ad ostium fluvii Amazoni horâ sextâ, ad insulas verò adjacentes horâ quartâ, postea ad insulas Bermudas horâ septimâ et ad Floridæ portum S. Augustini horâ 7½. Tardius igitur progreditur æstus per oceanum quàm pro ratione motûs Lunæ; et per necessaria est hæcce retardatio ut mare eodem tempore descendat inter Brasiliam et Novam Franciam, ascendatque ad insulas Fortunatas et littora Europæ et Africæ et viceversâ. Namque mare ascendere nequit in uno loco quin simul descendat in altero. Lege jam descriptâ agitari quoque mare Pacificum verisimile est. Namque æstus altissimi in littore Chiliensi et Peruviano incidere dicuntur in horam tertiam lunarem, sed quâ velocitate propagantur inde ad littus orientale Japoniæ et ad insulas Philippinas cæterasque regno Sinarum adjacentes nondum reperi.

108. In alveis fluminum pendet influxus et refluxus a fluminum cursu. Nam cursus ille facit aquam tardiùs influere ex mari, et in mare citius et velocius refluxu atquè adeò diutius refluxu quàm influere, præsertim si longè in flumen ascenditur ubi minor est vis maris. Sic in fluxu Avonæ ad tertium lapidem infrâ Bristoliam refert Sturmius aquam horis quinis influere, septenis refluxu suprâ Bristoliam, ut ad Canesham vel Bathoniam differentia procul dubio major est. Pendet etiam hæc differentia a magnitudine fluxûs et refluxûs. Nam prope luminarium syzygias, vehementior maris motus facilius

Porro fieri potest ut æstus propagetur ob oceano per freta diversa ad eundem portum, et citius transeat per aliqua freta quàm per alia: quo in casu æstus idem, in duos vel plures successivè advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales a diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, et sic spatium diei illius efficient ut aqua tranquillè stagnet. Si Luna tunc declinabat ab æquatore, fient æstus in oceano vicibus alternis majores et minores, uti dictum est; et inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores et bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major et mi-

superando resistantiam fluminum faciet aquam citius ac diutius influere, adeoque minuet hanc differentiam: interea verò dum Luna ad syzygias properat, necesse est ut flumina ob cursus suos per magnitudinem æstuum impeditos magis impleantur et propterea maris refluxum paulò magis impendant proximè post syzygias quàm proximè antè. Eà de causà æstus omnium tardissimi non incident in ipsas syzygias, sed paulò præcedent. Dixi æstus etiam antè syzygias retardari vi Solis. Coniungatur causa utraque, et æstuum retardatio et major erit et syzygias magis præcedet. Quæ omnia ità se habere colligo ex tabulis æstuum quas Flamsteedius ex observationibus quamplurimis construxit.

109. Æstuum magnitudo non parum etiam pendet a magnitudine marium, ut in Opusculo citato observat clariss. autor. Sit C centrum Terræ, E A D B oblonga maris figura, C A semi-axis major, C B semi-axis minor priori in-



sistens ad angulos rectos. Sumatur D punctum medium inter A et B, sitque E C F, vel ipsi aequalis e C f angulus ad centrum Terræ, quem subtendit latitudo maris littoribus E, F, vel e, f, terminari; versetur autem punctum A, in medio inter puncta E, F, et punctum D in medio inter puncta e, f. Si per differentiam altitudinum C A, C B, exponatur quantitas æstus in mari satis profundo Terram totam cingente, ex-

cessus altitudinis C A super altitudinem C E vel C F designabit maximam quantitatem æstus in medio maris E F littoribus E, F terminati, et excessus altitudinis C e super altitudinem C f, exponet maximam quantitatem æstus ad littora ejusdem maris. (Nam, differentia inter diametrum bisecantem angulum datum quem faciunt duæ diametri ellipseos et alterutram ex illis diametris major esse non potest ex naturâ ellipseos quàm si illa diameter bisecans sit semi-axis major et differentia inter illas duas ipsas diametros angulum datum constituentes major esse nequit quàm si diameter angulum bisecans faciat angulum cum axe semi-rectum.) Unde patet æstus ad littora esse propèmodum ut maris latitudo E F, arcu quadrantalì non major. Hinc fit ut nullus aut ferè nullus observetur aquarum motus in maribus non satis latè patentibus, nisi cum oceano ipso liberè communicent. Si enim nihil aut parum cum oceano communicent, ut accidit in mari Mediterraneo, æstus quoque eam ob causam minor deprehenditur. Hinc est etiam quod prope æquatorem ubi mare inter Africam et Americam angustum est, æstus sint multo minores quàm hinc inde in zonis temperatis ubi maria latè patent, et in maris Pacifici littoribus fere singulis tam Americanis quàm Sincis et intrà tropicos et extrà. Contingere tamen potest ut æstus qui in oceano mediocri est, in fluviis evadat maximus propter transitus angustias littorumque seorsim coëuntium convergentiam. Hæc de maris æstu pro præsentì dicta sint: de hac nobilissimâ inter physicos questione plurima in decursu, ubi recurret occasio, adjungemus. Prolixius foret prosequi factas a diligentissimis philosophis æstuum observationes; legantur quæ huc et illuc tum in Transact. Angl. tum in Mon. Paris. dispersa inveniuntur, sed ea præsertim quæ clariss. viri Halleus Num. 226. Transact. et Cassinus in Mon. Paris. an. 1712. 1713. scripta reliquerunt.

nor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in medio ipsorum, et inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem et semel ad minimam: et altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad meridianum, atque Lunæ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni Tunquini ad Batsham sub latitudine boreali 20 gr. 50'. Halleius ex nautarum observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum Lunæ per æquatorem sequente stagnat, dein Lunâ ad boream declinante incipit fluere et refluere, non bis, ut in aliis portubus, sed semel singulis diebus; et æstus incidit in occasum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimam vel octavam, dein per alios septem dies iisdem gradibus decrescit, quibus antea creverat; et Lunâ declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum Lunæ et affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano Sinensi inter Continentem et insulam Luconiam, alter a mari Indico inter Continentem et insulam Borneo. An æstus spatio horarum duodecim a mari Indico, et spatio horarum sex a mari Sinensi per freta illa venientes, et sic in horam tertiam et nonam lunarem incidentes, componant huiusmodi motus; sitne alia marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus causas motuum Lunæ et marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua subjungere.

EDITOR LECTORI



FELICIUS commentari non possumus ea quæ tradit autor noster de Maris *Æstu*, quàm huic propositioni subjungendo eas dissertationes quæ præmio fuere condecoratæ a celebri Parisiensi Scientiarum Academiâ. Id quidem primum nobis fuerat propositum, ut ea quæ in illis dissertationibus momentosiora viderentur et ad Newtonianæ philosophiæ illustrationem pertinerent, brevi compendio comprehensa notis adjiceremus; verùm trunca ac ingenii nostri vitio detrita exhibere hæc illustrissimorum viro-
rum scripta meritò piguit, et non dubitavimus nos meliùs consulturos tùm lectoribus nostris, tùm ipsis eorum scriptorum authoribus, si qualia sunt edita hîc illa insereremus: cùmque authorum a typothetis absentia factum sit ut in editione Parisinâ plurima irrepserint menda, nullo errorum catalogo correctæ, ea demonstrationibus ac calculis accuratè repetitis emendavimus, figurasque ad loca, quibus respondent, aptari curavimus.

Quatuor quidem dissertationes Parisinis typis fuerunt evulgatæ, quarum prior a Patre Cavallieri Jesuitâ, secunda a Daniele Bernoullio, tertia a D. D. Mac-Laurino, quarta a Leonardo Eulero fuere ad Academiam missæ. Prior in eo occupatur ut Cartesianæ hypotheseos circa causam æstûs marini vitia et hiatus corrigat et resarciat, quod quidem ingeniosè admodum præstat; tres reliquæ ex legibus gravitatis aquarum Maris in Solem, Lunam et Terram, omnes phænomeni propositi circumstantias explicant et calculis determinant: has ergo tres, omissâ priore, hujus esse loci credidimus.

In dissertatione Mac-Laurini occurrit solutio synthetica Problematis de figurâ Terræ, quale illud proposueramus in notis nostris ad Prop. XIX. quodque parum felici successu analyticè solve-
re tentaveramus; ex ejus solutione patet meridianum esse veram ellipsim in hypothesi quòd Terra sit homogenea: cùm autem hæc in manus nostras non devenerint, nisi cùm notæ ad eam Propositionem XIX. prælum subiissent, inde fac-

tum est ut in iis notis de illo Problemate ut nondum soluto egerimus : quæ in his tribus dissertationibus ingeniosa sunt, enumerare longius foret ; intelligit lector quæ sint ipsi speranda a tantis viris, et quàm facilis, his intellectis et perlectis, futurus sit transitus ad ea quæ sequuntur de Lunæ motu, de præcessionem æquinociorum, aliisque ; lectorem itaque rogamus ut nobis vitio non vertat, quod typographo indulserimus hæc qualia sunt edere, ne, et ipse lector et typographus, eam paterentur moram quæ ad condendam epitomem istarum dissertationum necessaria fuisset.

T R A I T E
SUR
LE FLUX ET REFLUX
D E L A M E R.

PAR MR. DANIEL BERNOULLI PROFESSEUR D'ANATOMIE
ET DE BOTANIQUE À BASLE.

Devise—*Deus nobis hæc otia fecit.*

Pour concourir au Prix de 1740.

CHAPITRE PREMIER.

Contenant une introduction à la question proposée.

I.—DANS le grand nombre des systèmes sur le Flux et Reflux de la Mer, qui sont parvenus à notre connoissance depuis l'antiquité la plus reculée, il n'y a plus que ceux des Tourbillons et de l'Attraction ou Gravitation mutuelle des corps célestes et de la Terre, qui partagent encore les philosophes de notre tems : l'un et l'autre de ces systèmes ont eu les plus grands hommes pour défenseurs, et ont entraîné des nations entières dans leur parti. Il semble donc que tout le mérite qui nous reste à espérer sur cette grande question, est de bien opter entre ces deux systèmes, et de bien manier celui qu'on aura choisi pour expliquer tous les phénomènes qu'on a observés jusqu'ici sur le Flux et Reflux de la Mer, pour en tirer de nouvelles propriétés, et pour donner des uns et des autres les calculs est le mesures.

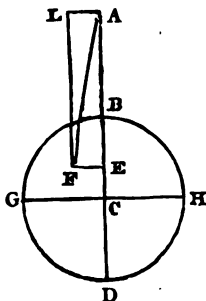
II.—J'ai commencé d'abord par l'idée de Kepler, qu'on nomme avec justice le Pere de la vraie philosophie. Elle est fondée sur l'Attraction ou Gravitation mutuelle des corps célestes et de la Terre : cet incompréhensible et incontestable principe, que le grand Newton a si bien établi, et qu'on ne sauroit plus revoquer en doute, sans faire tort aux sublimes connoissan-

ces et aux heureuses découvertes de notre siècle. Après un examen fort scrupuleux, j'ai vû que cette gravitation mutuelle, considérée dans les globes de la Terre, de la Lune et du Soleil, nonseulement pouvoit produire tous les phénomènes du Flux et Reflux de la Mer, mais même qu'elle le devoit necessairement, et qu'elle le devoit : suivant toutes les loix qu'on a observées jusqu'ici. Avec ces heureux succès, j'ai poussé mes recherches aussi loin qu'il m'a été possible de les porter. En chemin faisant, je suis tombé sur les Théoremes de M. Newton, dont je n'avois pû gueres voir la source auparavant ; mais en même tems j'ai remarqué le peu de chemin qu'on a encore fait dans cette matiere, et même l'insuffisance de la méthode usitée, lorsqu'elle est appliquée à des questions un peu détaillées. J'ai suivi une toute autre route ; j'ai poussé mes recherches bien plus loin, et je suis entré dans un détail tel que l'Academie m'a paru le demander ; et je dois dire à l'avantage des principes que nous adopterons, que j'ai trouvé par-tout un accord merveilleux entre la théorie et les observations, accord qui doit être d'autant moins suspect, que je n'ai consulté les observations, qu'après avoir achevé tous mes calculs, de maniere que je puis dire de bonne foi, d'avoir deviné la pluspart des observations, sur lesquelles je n'étois pas trop bien informé, lorsque j'ai entrepris cet ouvrage.

III.—Quant aux tourbillons, j'avoué qu'il est bien difficile d'en démontrer le faux à ceux qui veulent s'obstiner à les défendre : mais aussi il n'en est pas de la physique, comme de la géometrie. Dans celle-ci on n'admet, ni ne rejette rien, que ce dont on peut absolument démontrer la vérité ou la fausseté, pendant que dans la physique il faut se rapporter souvent à un certain instinct naturel de sentir le faux et le vrai, après avoir bien pesé toutes les raisons de part et d'autre. Quant à moi, je ne trouve point ce caractere de vérité, ni dans l'hypothese des tourbillons, ni dans les conséquences que l'on en tire. Si nous disons que le tourbillon a la même densité, la même direction et la même vitesse que la Lune, ce tourbillon ne sçauroit faire aucun effet ; et si au contraire nous supposons ces trois choses n'être pas les mêmes de part et d'autre, il me paroît bien clair et bien certain, que l'effet du tourbillon devoit se manifester infiniment davantage dans le mouvement de la Lune, que dans celui des eaux de la Terre. Cependant on sçait parfaitement bien que la Lune, quoique sujette à beaucoup d'irrégularités dans ses mouvemens, n'en a aucune qui puisse être attribuée à l'action aussi sensible d'un tourbillon. Si nous passons par dessus toutes ces différentes difficultés, nous en rencontrerons d'autres également embarrassantes. C'est contre les loix de

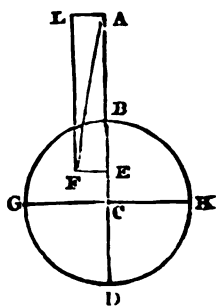
l'hydrostatique, que la Lune, qui nage dans le tourbillon, puisse causer des variations dans la compression des parties du fluide. C'est une propriété essentielle des fluides de se remettre aussi-tôt à l'équilibre, lorsque ses parties en sont sorties. Si une colonne de tourbillon, entre la Lune et la Terre, étoit plus comprimée qu'une autre colonne semblable, rien ne sçauroit empêcher ses parties de s'échapper de côté jusqu'au retablissement de l'équilibre. Qu'on s'imagine, par exemple, l'air de notre atmosphère tout d'un coup extrêmement échauffé ; ce changement feroit en même tems hausser à proportion le mercure dans le barometre, puisque l'air chaud a plus de ressort que l'air froid ; mais comme rien n'empêche l'air de s'échapper de côté jusqu'à la parfaite conservation de l'équilibre, cela fait qu'un tel changement n'en sçauroit faire aucun sur le barometre ; aussi n'observe-t-on dans le barometre aucune variation du jour à la nuit, qui cependant, par un raisonnement tout-à fait semblable à celui des tourbillonnaires pour expliquer les marées, devoit être très-sensible. Pareillement si les eaux d'une riviere donnent contre un pieu, on ne remarquera aucune différence dans la surface des eaux, que bien près du pieu, et le fond du lit de la riviere sera toujours également pressé. En voilà assez et trop sur cette matiere ; car ce sera toujours aux sectateurs de Descartes de montrer l'esset des tourbillons sur l'océan, avec la même clarté qu'on peut le faire, moyennant le principe de Kepler, principe d'ailleurs qui n'est plus contesté ; sçavoir, que la Terre et tous les corps célestes ont une tendance mutuelle à s'approcher les uns des autres. Ce principe posé, il est facile de faire voir, que la Terre que nous supposerons devoir être sans cette tendance parfaitement ronde, en changera continuellement sa figure, et que c'est ce changement de figure qui est la cause du flux et reflux de la mer : comme ce changement dans la figure de la surface de la Terre est produit de différentes façons, j'en ferai ici un dénombrement, et je tâcherai dans la suite d'en donner la mesure.

IV.—Si A est le centre de la Lune, ou du Soleil : B G D H la Terre ; si l'on tire par les centres de la Lune ou du Soleil et de la Terre la droite A D, et qu'on prenne au dedans de la Terre un point quelconque F, on tirera F E perpendiculaire à B D, avec la droite F A, et on achevera le rectangle F L A E. Chaque point F est tiré ou poussé vers A, et cette force étant représentée par F A, elle sera considérée comme composée des deux laterales F L et F E :



cela étant, on voit que la force FE étant appliquée dans chaque point de la Terre, ne sauroit que l'allonger autour de BD : et comme c'est une même raison pour tous les plans qui passent par BD , il est clair que la Terre formera ainsi un sphéroïde produit par la rotation d'une courbe BGD autour de BD .

On remarquera, que cet allongement ne sauroit être qu'extrêmement petit. *Premièrement*, à cause de la petitesse des lignes FE par rapport à FA . *En second lieu*, à cause du peu de rapport qu'il y a entre la pesanteur du point F vers A , à la pesanteur du même point vers le centre de la Terre C . Nous verrons dans la suite que cet allongement ne peut aller qu'à un petit nombre de pieds, ce qui est fort peu considérable, par rapport au diamètre de la Terre.



On remarquera encore, que l'allongement total étant imperceptible par rapport au diamètre de la Terre, la différence des allongemens pour l'hémisphère supérieur GBH , et pour l'inférieur GDH , doit être insensible par rapport à l'allongement total; à la rigueur, il faudroit dire, que les forces exprimées par FE , sont tant soit peu plus grandes dans l'hémisphère GBH , que dans l'hémisphère opposé, dont les parties sont plus éloignées du point A , et qu'ainsi ledit hémisphère GBH sera un peu plus allongé que l'autre hémisphère: mais on sent bien que la différence doit être insensible. On peut donc prévoir que les poles B et D resteront également éloignés du point C , et que la courbe GBH pourra être censée la même que GDH . Nous donnerons un calcul juste et détaillé de tout cela dans la suite de ce traité.

Venons à une seconde considération, qui produira le même résultat, que celle dont nous venons de parler.

V.—Comme la Terre tâche continuellement à s'approcher du Soleil et de la Lune, il faut qu'il y ait en même tems d'autres forces qui la retiennent; et ce sont les forces centrifuges de la Terre, qu'elle a par son mouvement autour du Soleil, et autour du centre de gravité (je l'appelle ainsi, pour me conformer à l'usage) qui est entre la Terre et la Lune. Je démontrerai aussi ci-dessous, que cette force centrifuge doit être supposée égale dans toutes les parties de la Terre, et parallèle à la ligne AD , pendant que l'autre force se répand inégalement sur les parties de la Terre. Elle est plus grande dans les parties les plus proches de A , et plus petite dans les parties qui en sont plus éloignées, et cela en raison

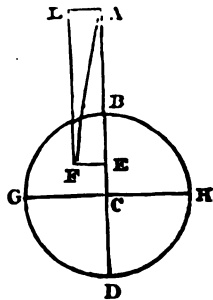
quarrée reciproque des distances. Cette raison supposée, le calcul fait voir, que pourvû que les couches concentriques de la Terre autour du point C, soient homogenes, la force moyenne, qui pousse les parties de la Terre vers A, est précisément celle qui répond au centre de la Terre C; et que c'est dans ce centre C, où la force centrifuge est précisément égale à la force centripete. Ainsi chaque partie qui est entre C et B, est plus poussée vers A, qu'elle n'est repoussée; et au contraire chaque partie située entre C et D, est moins poussée vers A, qu'elle n'est repoussée; de sorte qu'en s'imaginant deux canaux communicans entre eux G H et B D, on voit que chaque goutte dans la partie C B, est tirée vers A, et que chaque goutte dans la partie C D, est poussée dans un sens contraire. Cela diminue l'action de la pesanteur vers le centre de la Terre dans le canal B D, pendant que cette même pesanteur n'est pas diminuée dans le canal G H, d'où il arrivera encore un allongement autour de l'axe B D, ce que je m'étois proposé de faire voir.

Le calcul montre que cette raison est en soi-même de fort peu d'importance; qu'elle ne sçauroit allonger l'axe B D considérablement. Mais son resultat est assez comparable avec celui de l'allongement exposé auparavant. On prévoit d'ailleurs encore que l'allongement produit par cette raison, doit être égal dans les canaux B C et C D, la différence ne pouvant être sensible; et ainsi les points B et D resteront encore également éloignés du centre C.

VI.—Une troisième raison, qui peut allonger davantage l'axe B D, est que par l'allongement même, produit par les deux causes précédentes, pesanteur terrestre qui fait descendre tous les corps vers le centre C, est changée. Cette pesanteur peut être considérée comme égale dans les canaux G C et B C, ou D C à des distances égales du centre C, tant que la Terre est supposée sphérique; mais cette sphéricité ôtée, il est naturel que cette égalité ne pourra plus subsister. Il est aussi vraisemblable que la pesanteur est diminuée dans les canaux C B et C D, et qu'ainsi l'axe doit encore être prolongé. Pour calculer cet allongement, nous aurons recours au système de M. Newton, qui suppose la pesanteur produite par l'attraction commune de la matiere en raison quarrée reciproque des distances. Ce n'est pas que je croye cette hypothese bien démontrée; car la conclusion de la gravitation mutuelle des corps du système du monde en raison quarrée reciproque des distances, qu'on ne sçauroit plus nier, à une semblable attraction*universelle de la matiere, de laquelle M. Newton déduit la pesanteur; cette conséquence, dis-je, demande beaucoup d'indulgence. Mais je l'adopterai pour ce sujet,

parce que tous les autres systêmes sur la pesanteur me seroient inutiles : c'est le seul, qui étant du ressort de la géometrie, donne des mesures assurées et fixes ; et il est d'ailleurs digne de l'attention de tous les géometres et physiciens.

VII.—Les trois causes que je viens d'exposer, comme pouvant et devant allonger la Terre autour de la ligne qui passeroit par le centre du Soleil et de la Lune, sont d'une force assez égale ; de sorte qu'il faudra tenir compte de toutes, quoique chacune soit si petite, qu'elle ne sçauroit allonger la Terre au delà d'un petit nombre de pieds, et peut-être moins d'un pied. Il sera bon de remarquer ici que ce qui, après le calcul, exprime les dits allongemens, est toujours un certain multiple, ou sous-mul-



tiplie de $\frac{b}{a} \frac{g}{G} \times b$, entendant par b le rayon de la Terre, par a la distance du

luminaire en question, et par $\frac{g}{G}$ la raison qui est entre la pesanteur d'un

corps placé en B vers A, et sa pesanteur vers C, laquelle raison est extrêmement petite.

J'ai jugé à propos d'alleguer ici cette formule, que le calcul m'a enseigné, afin que ceux qui voudroient le faire après moi, sçachent d'abord quels termes on peut rejeter, comme inutiles, qui rendent les calculs extrêmement pénibles, et qui se trouvent au bout du calcul, n'être d'aucune importance. Ce seroit une chose ridicule, de vouloir faire ici attention à des parties d'une ligne qui proviendroient, si la dite quantité $\frac{b}{a} \frac{g}{G} \times b$ étoit encore multipliée par $\frac{b}{a}$, ou par $\frac{g}{G}$.

VIII.—Notre dessein est d'abord de chercher et d'exprimer analytiquement les allongemens dont nous venons de parler. On peut les trouver par rapport aux deux premieres causes, indépendamment de la figure de la Terre ; mais par rapport à la troisième cause exposée au fixieme article, il faut supposer la Terre, c'est-à-dire, le méridien B G D H d'une figure donnée ; et c'est l'hypothese la plus naturelle, de la supposer elliptique, ayant pour axes les lignes B D et G H ; quelle qu'elle soit, elle n'en sçauroit être sensiblement différente, et si elle l'étoit, cela ne sçauroit produire un changement bien considérable sur le rapport des deux axes B D et G H, que nous cherchons. Outre cela nous verrons

que c'est ici un Problème, qui dépend encore de la loi des changemens dans les densités des couches de la Terre. M. Newton suppose la Terre par-tout homogène. Il ne l'a fait apparemment, que pour faciliter le Problème, qui est assez difficile dans toute autre hypothèse. Mais cette supposition de M. Newton n'a aucune vraisemblance ; je dirai même, qu'elle seroit fort peu favorable à notre système, comme nous le verrons dans la suite. C'est pourquoi je n'ai pas voulu restreindre si fort la solution du Problème en question. J'ai cru que je payerois trop cher l'avantage d'appplanir les difficultés du Problème, et les peines du calcul. J'ai donc rendu notre question infiniment plus générale, pour en tirer tous les Corollaires, et pour choisir ceux qui conviennent le plus à notre sujet, et qui rendront par là même plus vraisemblables les hypothèses, auxquelles ils appartiennent.

IX.—Voici à present nos hypotheses. Nous considererons la Terre, comme naturellement sphérique, et composée des couches concentriques : nous supposerons ces couches homogènes, chacune dans toute son étendue ; mais qu'elles sont de différentes densités entre elles, et que la loi des variations de leur densité soit donnée. Quant à la sphericité de la Terre, que nous supposerons, on voit bien qu'il seroit ridicule de s'y arrêter, puisque l'élevation des eaux de l'océan, causée par les deux luminaires, ne sçauroit différer sensiblement, que la Terre soit un peu aplatie, ou un peu allongée. La supposition de l'homogénéité des couches concentriques, ne doit pas non plus nous faire de la peine, puisqu'on ne sçauroit donner aucune raison, pourquoi elles devroient être hétérogènes.

CHAPITRE II.

Contenant quelques lemmes sur l'Attraction des Corps.

I.—Je prie encore une fois le lecteur, de ne considérer ce chapitre, que comme hypothétique. Je ne suppose l'attraction universelle de la matière, que parce que c'est la seule hypothèse, qui admette des calculs, et qu'elle est d'ailleurs assez bien fondée, pour mériter l'attention de tous les philosophes du monde.

On appelle au reste attraction qu'exerce un corps A sur un corps B, la force accélératrice, que le corps B acquiert à chaque instant, en tom-

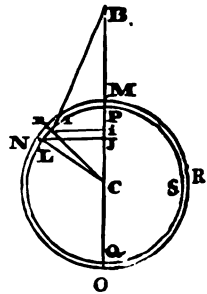
bant vers A. On voit donc que l'effet de l'attraction du corps A sur le corps B, est de communiquer à celui-ci une pesanteur, qu'on suppose proportionnelle à la masse du corps A divisée par le quarré de la distance; et cette pesanteur doit encore être multipliée par la masse du corps B, pour avoir la force que ce corps exerce s'il est empêché de s'approcher du corps A.

PROBLEME.

II.—Soit une couche sphérique homogène, infiniment mince, et d'une épaisseur égale, comprise entre les surfaces sphériques M N O R et P L Q S, trouver l'attraction, ou la force accélératrice, que cette couche exercera sur un corps placé au point B, pris hors de la surface extérieure.

SOLUTION.

Qu'on tire la droite B O par le point B et le centre C, dans laquelle on prendra deux points infiniment proches J et i: on tirera ensuite les deux perpendiculaires J L et i l, et par les points L et l, on tirera du centre les droites C N et C n. Soit à présent C B = a; C J = x; J i = d x; C P = b; P M ou L N (que nous regardons comme infiniment petite) = c: la densité de la matiere de la couche = m.



On voit que pendant la révolution autour de l'axe M O, la petite partie N L l n garde toujours une même distance du point B, et que cette distance sera = $\sqrt{a a - 2 a x + b b}$: or, comme il faut toujours diviser par le quarré des distances, il faudra pour trouver la force accélératrice en question d'abord prendre $\frac{1}{a a - 2 a x + b b}$, et cette quantité doit être multipliée par la raison de

B i à B l, et on aura $\frac{a - x}{(a a - 2 a x + b b)^{\frac{3}{2}}}$: et cette quantité doit encore

être multipliée par la masse de l'anneau, que la partie N L n l forme par sa révolution, et la masse doit être exprimée par la densité m et la capacité de l'anneau, c'est-à-dire (en nommant n la raison de la circonférence d'un cercle à son rayon) par $m \times N L \times L l \times n \times L J$: ou par

$m \times c \times \frac{b \, d \, x}{\sqrt{(b \, b - x \, x)}} \times n \times \sqrt{(b \, b - x \, x)}$ ou enfin par $n \, m \, b \, c \, d \, x$;

de sorte qu'on a la force accélératrice absolue produite par le dit anneau = $\frac{n \, m \, b \, c \, (a - x) \, d \, x}{(a \, a - 2 \, a \, x + b \, b)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'intégrale exprimera l'attraction cherchée de

toute la couche. Pour trouver cette intégrale, nous supposons $a \, a - 2 \, a \, x + b \, b = y \, y$, et nous aurons $\int \frac{n \, m \, b \, c \, (a - x) \, d \, x}{(a \, a - 2 \, a \, x + b \, b)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-n \, m \, b \, c \, (a \, a - b \, b + y \, y) \, d y}{2 \, a \, a \, y \, y}$

$$= \frac{n \, m \, b \, c}{2 \, a \, a} \times \left(\frac{a \, a - b \, b - y \, y}{y} + C \right) = \frac{n \, m \, b \, c}{2 \, a \, a} \times \left(\frac{2 \, a \, x - 2 \, b \, b}{\sqrt{a \, a - 2 \, a \, x + b \, b}} + C \right),$$

entendant par C une constante convenable : pour la trouver il faut remarquer, que l'intégrale doit être = 0, lorsque $x = -b$, d'où l'on tire

$$C = \frac{2 \, a \, b + 2 \, b \, b}{a + b} = 2 \, b : \text{substituant cette valeur, on obtient pour l'intégrale en question}$$

$$\frac{n \, m \, b \, c}{a \, a} \left(\frac{a \, x - b \, b}{\sqrt{a \, a - 2 \, a \, x + b \, b}} + b \right), \text{ et mettant enfin } b$$

$$\text{à la place de } x, \text{ on obtient la force accélératrice cherchée } = \frac{2 \, n \, m \, b \, b \, c}{a \, a}.$$

C. q. f. t.

COROLLAIRE.

III.—Comme la quantité de la matière de toute la couche (pour laquelle nous venons de déterminer la force accélératrice, qu'elle exerce sur le corps placé au point B) est = $2 \, n \, m \, b \, b \, c$, nous voyons que cette force accélératrice est exprimée par la quantité de matière divisée par le carré de la distance du point B au centre C, et par conséquent la même, que si cette quantité de matière étoit concentrée au centre.

SCHOLIE.

IV.—On remarquera que cette solution n'a lieu, que lorsque le point B est placé hors de la couche, parce que dans notre calcul nous avons supposé, que chaque anneau formé par la révolution de la partie N L l n produit une force accélératrice du même côté, ce qui n'a plus lieu, lorsque le point B est placé entre les deux surfaces, ou au-dedans de la surface intérieure. Je ne dirai rien de ces deux cas, dont chacun demande une solution particulière, parce que nous n'en aurons pas besoin, et qu'ils ont déjà été résolus par l'auteur de ces Problèmes. Je n'aurois même rien

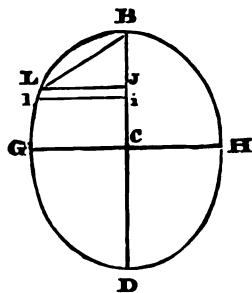
dit du cas que nous venons de résoudre, comme pareillement résolu par M. Newton, si je n'avois pas crû, qu'il étoit convenable de suivre toutes les traces qui nous menent à l'intelligence de notre question principale : aussi ces précautions sont-elles nécessaires, pour pouvoir toujours exprimer d'une même façon les quantités constantes ; et ainsi nous nous souviendrons toujours dans la suite d'exprimer la force accélératrice d'un corps infiniment petit, par la masse divisée par le quarré de la distance, et de dénoter la masse par le produit de son étendue, et de sa densité.

PROBLEME.

V.—Trouver l'attraction pour un corps placé en B, causée par une sphere solide, composée de couches homogenes ; mais de différentes densités entr'elles.

SOLUTION.

Il paroît par le troisième article, qu'on n'a qu'à concevoir la masse de toute la sphere ramassée au centre C, et qu'elle causera la même attraction, tant que le point B est hors de la sphere : nommant donc M la masse du globe, ou la somme des masses de toutes les couches, l'attraction cherchée sera $= \frac{M}{a a}$. C. q. f. t.



PROBLEME.

VI.—Soit B G D H une ellipse presque circulaire, c'est-à-dire, dont la différence des axes B D et G H soit regardée comme infiniment petite ; et qu'on conçoive cette ellipse former par sa rotation autour de l'axe B D, un sphéroïde homogene. On demande la force accélératrice, ou l'attraction que ce sphéroïde produira sur un corps placé au pôle B.

SOLUTION.

Soit la densité de la matiere exprimée par μ ; le petit demi-axe G C $= b$; le grand demi-axe B C $= b + c$; B J $= x$; J i $= d x$; on aura

la perpendiculaire $LJ = \frac{b+c}{b} \times \sqrt{2(b+c)x - xx}$. On voit facile-

ment * que l'attraction causée par la couche, qui répond au rectangle $LJil$, est $= n\mu dx - n\mu dx \times \frac{BJ}{BL}$, c'est-à-dire, par $n\mu dx -$

$n\mu dx$: $\sqrt{xx + \frac{bb}{(b+c)^2} \times (2bx + 2cx - xx)}$ ou par $n\mu dx -$

$(b+c)n\mu dx$: $\sqrt{(2bcxx + ccxx + 2b^2x + 2bbc x)}$: dans cette dernière quantité, nous rejettons le terme $ccxx$, comme devant être comparé aux infiniment petits du second ordre, et nous changerons le signe radical du dénominateur en signe exponentiel de numérateur; et de cette manière nous aurons $n\mu dx - (b+c)n\mu dx \times (2b^2x + 2bcxx + 2bbc x)^{-\frac{1}{2}}$: or on sait par la formation des suites de

M. Newton, que $(2b^2x + 2bcxx + 2bbc x)^{-\frac{1}{2}}$ est $= (2b^2x)^{-\frac{1}{2}} - (2b^2x)^{-\frac{3}{2}} \times (bcxx + bbc x)$: substituant donc cette valeur, on obtient $n\mu dx - \frac{(b+c)n\mu dx}{\sqrt{2b^2x}} + \frac{(b+c)n\mu dx (bcxx + bbc x)}{2b^2x \sqrt{2b^2x}}$,

qui marque l'action de la couche formée par la rotation du rectangle $LJil$; à la place de cette quantité, on peut encore, en multipliant les quantités à multiplier, et rejetant les termes affectés de la seconde dimension de c , poser $n\mu dx - \frac{n\mu dx \sqrt{x}}{\sqrt{2b}} - \frac{cn\mu dx \sqrt{x}}{2b \sqrt{b}} + \frac{cn\mu dx \sqrt{x}}{2bb \sqrt{b}}$,

et l'intégrale de cette quantité (qui doit être $= 0$, lorsque $x = 0$) est $= n\mu x - \frac{2n\mu x \sqrt{x}}{3 \sqrt{2b}} - \frac{cn\mu x \sqrt{x}}{3b \sqrt{2b}} + \frac{cn\mu xx \sqrt{x}}{5bb \sqrt{2b}}$; et faisant enfin $x = 2b + 2c$, on trouve, en rejetant toujours les infiniment petits du second ordre $2n\mu b + 3n\mu c - 2n\mu b - 2n\mu c - \frac{2}{3}n\mu c + \frac{4}{5}n\mu c$, ou bien enfin $\frac{2}{3}n\mu b + \frac{1}{5}n\mu c$,

qui marque la force accélératrice causée par l'action de tout l'ellipsoïde sur un petit corps placé au pôle B. C. q. f. t.

PROBLEME.

VII.—Les hypotheses étant les mêmes, que dans la Proposition précédente, trouver la même chose pour un petit corps placé en G, qui est sous l'équateur de l'ellipsoïde.

* Ceci se trouve démontré par le Cor. I. de la Prop. XC. du 1^{er}. Livre de Mr. Newton; on y voit que l'attraction du point B par le cercle dont LJ est le rayon, est $1 - \frac{BJ}{BL}$ qu'il faut

multiplier par la masse du petit cylindre dont ce cercle est la base et dont Ji est la hauteur, pour avoir l'attraction causée par la couche qui répond au rectangle LJil.

SOLUTION.

Il est facile de démontrer par la géométrie, que toute section de l'ellipsoïde parallèle à l'axe de rotation B D, fait une ellipse semblable à l'ellipse génératrice B G D H. Considérons l'ellipsoïde comme composée de la sphere inscrite, ayant pour diametre le petit axe G H, et de l'écorce formant un double menisque: l'action de la sphere doit être exprimée par $\frac{2}{3} n \mu b$, comme nous avons démontré au 5. §. Car la masse de cette sphere est $\frac{2}{3} n \mu b^3$, et la distance du point G au centre est = b. Il nous reste donc à chercher quelle action resulte du double menisque.

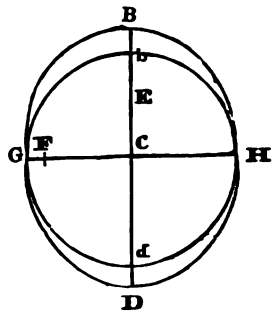
Concevons pour cet effet tout l'ellipsoïde partagé en couches parallèles et perpendiculaires à G H. Soit la distance du centre d'une de ces couches au point G = x; son épaisseur = d x; il n'est pas difficile de voir * que la capacité du bord de cette couche (qui fait partie du double menisque en question) est = $\frac{n \zeta}{2 b} \times (2 b x - x x) d x$, et que ce bord

étant multiplié par la densité μ , en donne la quantité de matiere = $\frac{n \mu \zeta}{2 b}$

$\times (2 b x - x x) d x$. Or toutes les parties de ce bord infiniment mince, peuvent être censées agir également, et avec une même obliquité sur le corps placé au point G: on n'a donc qu'à multiplier cette quantité de matiere par la raison de la distance du centre de la couche au point G à la distance du bord de la couche au même point G, et diviser par le carré de cette distance, pour avoir l'attraction du bord de la couche, qui sera donc $\frac{n \mu \zeta}{2 b} \times (2 b x - x x)$

$d x \times \frac{x}{\sqrt{2 b x}} \times \frac{1}{2 b x}$, ou bien $\frac{n \mu \zeta d x}{4 b b \sqrt{2 b}}$

$\times (2 b \sqrt{x} - x \sqrt{x})$ dont l'intégrale est = $\frac{n \mu \zeta}{4 b b \sqrt{2 b b}} \times (\frac{2}{3} b x \sqrt{x} - \frac{1}{2} x x \sqrt{x})$ puisqu'il ne faut point ajouter ici de constante; et pour avoir enfin l'attraction de tout le double menisque, il faut mettre $x = 2 b$, après quoi on aura simplement $\frac{1}{3} n \mu \zeta$. Si on ajoute à cette quantité



* Car l'aire de l'ellipse éloignée de G de la quantité x est $\frac{n}{2 b} \times \overline{b + \zeta} (2 b x - x x)$ et l'aire du cercle inscrit est $\frac{n}{2} (2 b x - x x)$. Donc étant cette aire du cercle de celle de l'ellipse reste $\frac{n \zeta}{2 b} (2 b x - x x)$ pour l'aire de menisque.

L'action de la sphere inscrite, on aura l'attraction cherchée de tout l'ellipsoïde sur un corps placé au point $G = \frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu c$. C. q. f. t.

COROLLAIRE.

VIII.—On voit par ces deux dernieres Propositions, que les forces accélératrices au pôle, et sous l'équateur dans un ellipsoïde homogene, sont comme $\frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu c$ à $\frac{2}{3} n \mu c + \frac{4}{15} n \mu b$, ou comme $5b + c$ à $5c + 2b$, laquelle raison peut passer pour celle de 1 à $1 + \frac{c}{5b}$. Je vois que cela est conforme à ce que M. Newton dit à la page 380. * des Princip. Math. Phil. Nat. edit. II. pour déterminer la proportion de l'axe de la Terre au rayon de son equateur. Quant à son raisonnement, il n'y a peut-être que lui, qui pût y voir clair; car ce grand homme voyoit à travers d'un voile, ce qu'un autre ne distingue qu'à peine avec un microscope.

LEMME.

Dans un sphéroïde elliptique homogene, la force accélératrice pour un point quelconque, est à la force accélératrice pour un autre point pris dans le même diametre, comme la distance du premier point au centre, à la distance pareille du second point.

† M. Newton a démontré cette Proposition à la 199 page de son Livre, que nous venons de citer: et comme il ne s'agit ici que de la proportion entre les deux forces accélératrices, sans qu'il soit question de les exprimer analytiquement, il seroit superflu, pour mon dessein, de la démontrer à ma façon.

PROBLEME.

X.—Soit encore le double menisque, tel que nous l'avons décrit au septieme article, compris entre la surface de l'ellipsoïde $G B D H$, et $G b H d$, qui marque la surface de la sphere inscrite; il s'agit de trouver la force accélératrice, que ce double menisque produira au point E , pris dans l'axe de rotation $B D$.

* Ceci se rapporte à la page 60. et suiv. de ce Vol., et nous avons essayé d'éclaircir cet endroit de M. Newton dans la note (*) et suivantes.

† C'est le Cor. 3. de la Prop. XCI. du Livre 1^{er}. Vol. 1^{er}. pag. 400.

SOLUTION.

Nous garderons les dénominations de ci-dessus : or on voit qu'on trouvera l'action du double menisque, en prenant celle de tout l'ellipsoïde considéré comme homogène avec les ménisques, et en retranchant celle de la sphere inscrite. L'action de tout le sphéroïde est en vertu des VI. et IX. Articles =

$$(\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu c) \times \frac{C E}{C B}, \text{ et celle de la sphere}$$

$$= \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{C E}{C b} : \text{ de là on tire la force ac-}$$

$$célératrice, qui convient aux ménisques =$$

$$(\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu c) \times \frac{C E}{C B} - \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{C E}{C b}.$$

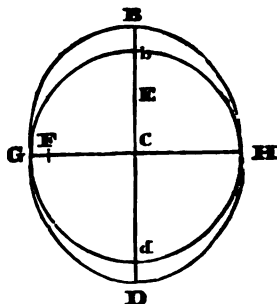
Substituons à la place de $\frac{C E}{C b}$ cette quantité

$$\frac{C E}{C B - B b}, \text{ qui peut être censée égale à } \frac{C E}{C B} + \frac{B b \times C E}{C B^2} \text{ (à cause que}$$

nous traitons la petite $B b$, comme infiniment petite, par rapport à $C B$) et nous trouverons la force accélératrice pour les ménisques

$$= \frac{2}{15} n \mu c \times \frac{C E}{C B} - \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{B b \times C E}{C B^2} = \frac{2}{15} n \mu c \times \frac{C E}{C B} - \frac{2}{3} n \mu c \times \frac{C E}{C B}$$

$$\left(\text{puisque } \frac{B b}{C B} = \frac{c}{b + c} = \frac{c}{b} \right) = - \frac{2}{15} n \mu c \times \frac{C E}{C B}. \quad \text{C. q. f. t.}$$



COROLLAIRE.

XI.—Le signe négatif fait voir, que la gravitation au point E, causée par l'action des deux ménisques, se fait vers le pôle B, et non vers le centre C. Au reste on remarquera, que cette Proposition n'est vraie que pour les points compris entre C et b, en excluant tous les points, qui sont au-delà de b ; et cela à cause que le Lemme du IX. §. ne sçauroit être appliqué à trouver la force accélératrice causée par l'action de la sphere pour le point E, si ce point est pris hors de la sphere inscrite au sphéroïde. Ainsi par exemple, au point B, la gravitation causée par les ménisques se feroit vers le centre avec une force accélératrice $\frac{2}{3} n \mu c$. Je restreins ces Propositions, quoique ma méthode suffise pour des solutions beaucoup plus générales ; et cela pour ne me point engager dans des longueurs qui nous meneroient au-delà de notre sujet.

PROBLEME.

XII.—Trouver la même chose que dans l'Art. X. pour un point quelconque F, pris dans une ligne G H perpendiculaire à B D.

SOLUTION.

On obtient encore l'action des ménisques, en retranchant celle de la sphere de celle du sphéroïde. Or celle de la sphere est $= \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CF}{CG}$,

et celle du sphéroïde $= (\frac{2}{3} n \mu b + \frac{1}{15} n \mu c) \times \frac{CF}{CG}$, en vertu des §. §. VII.

et IX. Donc la gravitation au point F se fait vers le centre C par la simple action du double ménisque, et la force accélératrice y sera $= \frac{1}{15} n \mu c \times \frac{CF}{CG}$. C. q. f. t.

XIII.—Voilà les Propositions qui nous seront nécessaires, pour mesurer les haussemens et baissemens des eaux dans la mer libre par l'action de l'un des deux luminaires, entant que ces variations répondent à la relation qui se trouve entre la pesanteur et la figure de la Terre. Ceux qui voudront employer l'analyse pure pour la solution de nos deux derniers Problèmes, se plongeront dans des calculs extrêmement pénibles, et verront par là l'avantage de notre méthode.

 CHAPITRE III.

Contenant quelques considérations astronomiques et physiques préliminaires, pour la détermination du Flux et Reflux de la Mer.

COMME le flux et reflux de la mer dépendent de la Lune et du Soleil, on voit bien que notre sujet demande une exacte théorie du mouvement de ces deux luminaires. Quant au mouvement apparent du Soleil, on le connoit avec toute l'exactitude requise ici. Mais on est encore bien éloigné de sçavoir avec la même précision la théorie de la Lune, qui est cependant d'une plus grande importance. Une idée qui m'est venuë la-dessus, d'employer le principe de la conservation de ce que l'on appelle

communément *forces vives* (principe déjà employé sous un autre nom par le grand et incomparable M. Huyghens, pour trouver les loix du choc des corps parfaitement élastiques, et auquel on est redevable d'une grande partie des connoissances nouvelles dans la dynamique, tant des fluides, que des solides :) cette idée, dis-je, m'a conduit par un chemin fort abrégé, à déterminer beaucoup plus exactement, que l'on n'a fait jusqu'ici, les mouvemens de la Lune, que l'on appelle communément irréguliers, mais qui sont tous sujets aux loix mécaniques. Je m'étois proposé d'insérer ici ma nouvelle théorie sur la Lune ; mais, comme notre sujet n'est déjà que trop étendu, et qu'il demande des discussions assez pénibles, je la différerai à une autre occasion, où je la donnerai en forme d'addition, si l'Académie trouve ce traité digne de son attention. Je ne ferai donc ici qu'indiquer en gros les connoissances tirées du système du monde, qui servent à donner un système général du flux et reflux de la mer ; et quand nous viendrons au détail, nous supposerons les mouvemens de la Lune parfaitement connus.

II.—On sçait que la Lune et la Terre font un système à part : l'un et l'autre de ces corps tournent autour d'un point, et font leur revolution dans un même tems, décrivant chacun une ellipse : l'action du Soleil sur l'un et l'autre corps, change un peu ces ellipses, et fait même que la proportion des distances du dit point aux centres de la Lune et de la Terre, ne demeure pas exactement le même : mais, comme nous ne prétendons jusqu'ici que d'exposer en gros les choses nécessaires à notre question, nous ne ferons point d'attention à ces inégalités, et considérerons la Terre et la Lune, comme faisant des ellipses parfaites et semblables entre elles autour d'un même point.

III.—Par la dite revolution, les deux corps tâchent à s'éloigner l'un de l'autre ; et cet effort est contrebalancé par leur gravitation mutuelle : et comme la Terre fait autant d'effort pour s'approcher de la Lune, que celle-ci en fait pour s'approcher de la Terre, il faut que les forces centrifuges soient aussi égales : d'où il suit que le point autour duquel ces deux corps tournent, doit être placé, en sorte que les forces centrifuges soient égales : c'est là la première idée. Il vaudroit donc mieux appeler ce point, *centre de forces centrifuges*, ou bien, puisque les vitesses gardent dans notre hypothese une proportion constante, *centre de masses*, que *centre de gravité*. Il est vrai que ces mots reviennent au même, à prendre celui du centre de gravité dans le sens commun : mais quelle idée y peut-on attacher, lorsque la pesanteur est inégale dans les différentes parties du corps ? Il n'y a aucun point alors, qu'on puisse nommer

tel, quelque définition qu'on donne à ce mot. Quoi qu'il en soit, il est certain que les distances du point en question aux centres de la Terre et de la Lune, sont en raison reciproque des masses ou quantités de matière de ces corps.

IV.—Si la Lune et la Terre étoient des corps parfaitement homogenes dans toute leur étendue, ou du moins chacun composé de couches concentriques parfaitement homogenes, et qu'ils fussent parfaitement sphériques, sans avoir aucun mouvement, imprimé originairement, ou produit par une cause physique, autour d'un axe passant par leur propre centre de gravité, il est clair, que toutes les parties des corps garderoient pendant leur revolution un parallélisme ; de sorte que les deux corps vus du centre de gravité commun, paroîtroient faire précisément le tour en sens contraire autour d'un axe perpendiculaire au plan des orbites, pendant chaque revolution des corps. Cependant cela ne se fait point dans la Lune : car nous savons qu'elle nous montre constamment une même face (je ne fais pas encore attention à quelques legers changemens ;) et cela est contraire au parallélisme, que nous venons d'alléguer : quoique ce ne soit pas ici proprement l'endroit pour expliquer ce phénomène de la Lune, je ne laisserai pas de le faire, pour nous préparer à ce que nous aurons à dire sur la Terre, comme essentiel à notre matière.

V.—Considérons donc, que la parfaite homogénéité dans les couches concentriques de la Lune, aussi bien que sa parfaite sphéricité, sont moralement impossibles : mais il n'est pas encore expliqué, comment on peut déduire de là, pourquoi la Lune nous montre toujours une même face. Il ne suffit pas de dire que le centre de gravité de la Lune pris dans le sens commun, tâche toujours à s'éloigner, le plus qu'il est possible, du centre de revolution. Quelques inégales que fussent les couches, et quelque irrégulière que fut la figure, la Lune garderoit toujours le parallélisme des faces, s'il n'y avoit pas une autre raison ; savoir, celle de l'inégalité de pesanteur de ses parties vers la Terre : les parties ayant d'autant plus de pesanteur, qu'elles sont plus près de la Terre : c'est cette raison, qu'il faut joindre à l'une des deux autres, ou à toutes les deux ensemble ; de sorte que quand même la Lune seroit parfaitement homogene, sa seule figure, jointe à l'inégalité de pesanteur de ses parties vers le centre de la Terre, pourroit même produire le phénomène en question.

Soit A le centre de la Terre : B C F D, par exemple, une ellipse, dont l'axe B F soit le plus grand, et C D le plus petit : que cette ellipse

infiniment petite autour du point E, la force qui tend à la remettre dans sa situation naturelle, est de même infiniment petite ; ce qui fait voir, que le point E faisant sa révolution autour du point A, ce ne sauroit plus être exactement la face C B D, qui regarde vers A, parce qu'à chaque petit mouvement du point E, la Lune fait une petite rotation autour de ce point, pour garder le parallélisme, et la force qui tâche à tourner vers le point A la face C B D, étant encore infiniment petite, ne sauroit s'en acquitter assez-tôt : et ce sera la même chose pendant que le point E parcourt un second élément, et ainsi de suite, jusqu'à-ce qu'à la fin la Lune se place assez obliquement, pour que la force, qui tâche à mettre la Lune dans sa situation naturelle, soit assez grande, pour réparer, à chaque moment, une nouvelle petite inclinaison, qui survient par la rotation du point E autour du point A. [Cette explication pourra nous servir dans la suite, pour démontrer un des principaux phénomènes des marées.] La Lune prendra donc la situation oblique c b d f, si sa révolution autour du point A est supposée se faire de E vers D. Mais cette situation oblique demeureroit encore la même à l'égard de la ligne F A, sans que la Lune eût aucune nutation, si le point E faisoit sa révolution autour du point A dans un cercle parfait, et avec une vitesse constante : c'est donc l'inégalité des distances A E, et des vitesses du point E, qui fait que l'obliquité de la situation f c b d varie ; et c'est cette variation qui fait la nutation de la Lune en longitude.

VII.—Venons maintenant à la Terre, et examinons quel mouvement elle doit avoir autour du centre de gravité, qui est entre-elle et la Lune ; cette recherche est nécessaire pour notre question, et elle ne sera plus difficile, après ce que nous avons dit de la Lune dans cette vûë. Nous remarquerons donc, que si la Terre est parfaitement homogène, soit dans toute son étendue, soit seulement dans chacune de ses couches concentriques ; et si elle est en même tems parfaitement sphérique, elle doit conserver parfaitement un parallélisme dans la situation de ses parties, pendant sa révolution. Cependant cette parfaite homogénéité est moralement impossible ; et la parfaite sphéricité a été réfutée par les observations les plus exactes. Ce parallélisme seroit donc altéré, de même qu'il l'est dans la Lune, et la Terre ne manqueroit pas de présenter à la Lune une même face, sans le mouvement journalier de la Terre. Ce mouvement empêche l'action de la Lune ; et l'effet de cette action étant, à cause du dit mouvement journalier, tantôt d'un côté de la Terre, tantôt de l'autre, il ne pourroit plus produire qu'une légère nutation journalière dans l'axe de la Terre, et quelque petite inégalité dans le mouvement journalier de

la Terre. Mais l'une et l'autre doivent être tout-à-fait insensibles, à cause de la grandeur de la masse de la Terre, de l'extrême petitesse de l'action de la Lune, et de la rapidité du mouvement journalier.

VIII.—On voit donc que la Terre fera sa révolution autour du centre de gravité, qui lui est commun avec la Lune, de telle manière que son axe gardera constamment une situation parallèle. Si nous considérons donc le mouvement journalier de la Terre à part, il est clair que l'autre mouvement doit être supposé se faire d'une manière à garder un parallélisme dans toutes les sections de la Terre. Cela étant, il s'ensuit que chaque point de la Terre fait, à l'égard de cet autre mouvement, une même ellipse; que chaque partie a une même force centrifuge, et que les directions des forces centrifuges sont par-tout parallèles entre elles. Et c'est ici le point principal, que je me suis proposé d'établir, et de bien démontrer dans ce Chapitre.

IX.—Ce que nous venons de démontrer du mouvement de la Terre à l'égard de la Lune, doit aussi s'entendre à l'égard du Soleil; en sorte que la force centrifuge des parties de la Terre, par rapport à son orbite annuelle, doit être censée la même, et leurs directions parallèles entre elles. Mais cette Proposition n'est pas si essentielle à l'égard de l'orbite annuelle, comme à l'égard de l'orbite, qui se fait autour du centre de gravité, qui est commun à la Terre et à la Lune, à cause de l'extrême petitesse de cette dernière orbite.



CHAPITRE IV.

Qui expose en gros la Cause des Marées.

I.—APRÈS avoir expliqué au premier Chapitre trois différentes raisons, qui peuvent allonger la Terre autour des deux axes, qui passent par les centres des deux luminaires, il n'est pas difficile de voir comment on doit déduire de ces allongemens le flux et reflux de la mer, pourvu qu'on ait égard en même tems au mouvement journalier de la Terre. Il est clair que ce mouvement journalier doit faire continuellement changer de place les deux axes d'allongement. Mais il faut remarquer ici par avance, que l'action composée des deux luminaires, peut toujours être considérée comme une action simple, quoi-qu'à la vérité fort irrégulière. Cependant

cette considération suffit, pour voir en gros, que la mer doit en chaque endroit s'élever et se baisser environ deux fois dans un jour. Mais il s'agit de mettre cette cause en tout son jour, d'en développer tous les effets, et de les réduire à leur juste mesure, autant que les circonstances peuvent le permettre.

II.—La question qui se présente d'abord, et qui est en même tems la plus importante pour notre sujet, est de trouver la quantité de l'allongement causé par chacun des deux luminaires. Nous ne considérerons donc qu'un seul luminaire. Voici, avant toutes choses, les suppositions dont je me servirai dans les calculs, et que j'ai déjà exposées en partie.

1. Nous supposerons que la Terre est naturellement sphérique. Cette hypothèse n'est que pour abrégér le calcul, et on voit bien que l'effet des deux luminaires doit être sensiblement le même sur une Terre ronde, ou un peu aplatie, ou un peu allongée.

2. Que les couches concentriques de la Terre sont d'une même matière, ou d'une même densité. Cette supposition est sans doute fort naturelle; car les inégalités ne peuvent qu'être tout-à-fait insensibles: mais il me semble qu'il n'y a aucune vraisemblance de supposer que la Terre est homogène dans toute son étendue, comme M. Newton l'a fait.

3. Que la Terre, que nous supposons, sans l'action des luminaires, ronde, est changée par l'action de l'un des deux luminaires en ellipsoïde, dont l'axe passe par le centre du luminaire agissant. C'est l'hypothèse de M. Newton; et quoi qu'on ne puisse pas le démontrer pour le système des attractions, elle ne doit pas nous arrêter; car quelle que soit la figure de la Terre après ce petit changement, on voit assez qu'elle ne s'écarteroit sensiblement de l'ellipsoïde. Aussi trouvons-nous cette figure elliptique dans toutes les hypothèses, qu'on pourroit se former sur la pesanteur, susceptibles d'un calcul et tant soit peu naturelles. D'ailleurs un petit changement dans cette figure extérieure de la Terre, n'en s'écarteroit produire, qui soit sensible, entre l'axe du sphéroïde, et le diamètre qui lui est perpendiculaire.

4. Nous supposerons, que les luminaires ne s'écarteroient faire changer de figure toutes les couches qui composent la Terre jusqu'au centre. Car vraisemblablement la Terre est, dans sa plus grande partie, solide; et quand même elle seroit toute fluide, sa masse seroit trop grande, pour être mise toute entière en mouvement, et pour obéir assez vite à une action aussi petite. Ces réflexions m'ont engagé à considérer la Terre, comme un noyau sphérique, composé de couches parfaitement sphériques et inaltérables par l'action des deux luminaires, et inondé d'un fluide

homogene, tel que sont les eaux de la mer ; et à supposer, qu'il n'y a que ce fluide inondant, qui recoive des impressions des luminaires, et que sa profondeur n'est pas sensible par rapport au rayon de la Terre. Cette hypothese est sans contredit la plus naturelle, lorsque la Terre n'est pas supposée homogene dans toute son étenduë, mais, si on la supposoit homogene, comme M. Newton l'a fait, contre toutes les apparences de vérité, notre hypothese n'entre plus en ligne de compte.

5. Enfin nous substituerons à la place des forces centrifuges, qui empêchent la Terre de tomber vers les luminaires, une autre force qui agisse de la même façon, afin que nous puissions considérer d'abord la Terre, comme dans un parfait repos, et un entier équilibre dans toutes ses parties. Cette force à substituer, doit être supposée égale dans toutes les parties de la Terre (§. VIII. Chap. III.) et parallele à la ligne qui passe par les centres de la Terre et du luminaire, dont il sera question.

III.—La force centrifuge dont nous venons de parler, doit être prise pour notre sujet, précisément telle, qu'elle soit égale à la force totale de l'attraction du luminaire, tout comme si la Terre se soutenoit dans sa distance, en décrivant un cercle parfait ; et cela est vrai, quelle que soit la force centrifuge réelle de la Terre. C'est ici une Proposition, dont on ne sent la vérité, qu'après quelque réflexion ; et elle est fondée sur ce que la différence entre la force centrifuge, telle que nous venons de la décrire, et la force centrifuge réelle, n'est employée qu'à pousser ou repousser la Terre, et ne sçauroit lui faire changer sa figure, puisque nous avons démontré au VIII. Art. du précédent Chapitre, que chaque partie est poussée également et parallelement.

IV.—La force centrifuge totale devant être parfaitement égale à la gravitation totale de la Terre vers le luminaire, et la premiere force étant la même dans toutes les parties, on voit bien qu'on pourroit supposer la force centrifuge égale à la gravitation vers le luminaire, telle qu'elle est au centre de la Terre. Car la gravitation qui répond au centre, peut être censée la moyenne entre toutes les gravitations du globe ; et cela, quelque relation qu'on suppose entre les distances et les gravitations, puisque la différence des distances est insensible, par rapport à la distance totale ; et que par conséquent la gravitation diminue comme également pour des égales augmentations de distances, et qu'il se fera ainsi une juste compensation pour l'hémisphere tourné au luminaire, et pour l'hémisphere opposé. Cette Proposition n'est pourtant pas géométriquement vraie ; mais la fin du calcul m'a fait voir, qu'elle peut

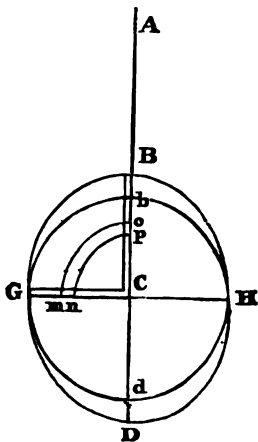
être censée vraie pour notre sujet : et comme elle abrège fort le calcul, je l'ai mise ici, pour en faire usage dans la suite.

PROBLEME.

V.—Soit A le centre du Soleil, $B G D H$ la Terre ; $A D$ une ligne tirée par les centres du Soleil et de la Terre : trouver la différence entre $B D$ et sa perpendiculaire $G H$, qui passe par le centre C .

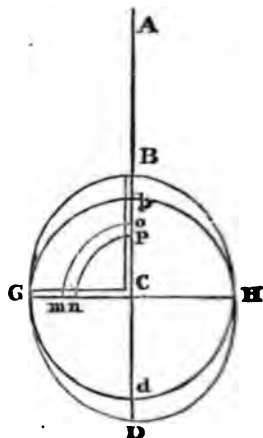
SOLUTION.

Qu'on s'imagine deux canaux $B C$ et $G C$, communiquans entre eux au centre C , rempli d'un fluide de différentes densités, telles qu'on suppose dans les couches de la Terre. Pour déterminer ces couches, nous considérerons la sphere inscrite $G b H d$, et nous supposerons tout ce noyau immuable pendant la revolution journaliere de la Terre, fondés, à cet égard, sur ce que nous avons dit dans la quatrième hypothese du II. §. Quand même on feroit attention aux changemens de figure dans les couches près de $G b H d$, cette considération ne sçauroit changer sensiblement le resultat du calcul, parce que ces changemens de figure sont tout-à-fait insensibles, et que, selon toutes les apparences, ils ne sçauroient se faire au-delà d'une certaine profondeur assez petite à l'égard du rayon de la Terre. Après cette remarque, nous déduirons la solution de notre Problème, de ce que le fluide doit être en équilibre dans les canaux $G C$ et $B C$. Pour satisfaire à cette loi, et pour observer un ordre, nous diviserons la solution en trois parties : dans la première, nous chercherons la pression totale du fluide $B C$ au point C : dans la seconde, nous ferons la même chose à l'égard du fluide $G C$; et enfin nous ferons le calcul, en faisant les deux pressions totales égales entre elles.



1. Soit $A C = a$; $G C$, ou $b C = b$; la cherchée $B b = c$: qu'on tire du centre C deux quarts de cercles infiniment proches $p n$, $o m$; soit $C p$ ou $C n = x$; $p o$ ou $n m = d x$; la densité variable en $p o$ ou $n m = m$, la densité uniforme de l'eau (qui couvre le noyau sphérique, et qui

forme le double ménisque) = μ . Soit la gravitation au centre C vers le centre du Soleil A = g , et la force centrifuge, qui agit parallèlement à B D, sera par-tout = g (§. VIII. Chap. III. et §. IV. Chap. IV.) qu'on nomme G la force accélératrice en G ou b, causée par l'action du globe G b H d, et Q la même force accélératrice pour les points p et n. Après toutes ces préparations, on voit que la goutte p o (dont la masse doit être exprimée par la densité m , et par la hauteur $d x$, c'est à dire $m d x$) est animée par plusieurs forces accélératrices : la *première* force accélératrice est celle qui résulte de l'action du globe G b H d, que nous avons nommé Q : la *seconde* est la force centrifuge de A vers C, provenant par la révolution de la Terre autour du point A : nous avons démontré, que cette force doit être faite = g : la *troisième* se fait vers A, et provient de la gravitation vers le Soleil : celle-ci est négative à l'égard du



point C, et doit être faite = $-\frac{a a}{(a-x)^2} \times g$: enfin la *quatrième* provient de l'action du double ménisque, compris entre G B H D et G b H d, et elle est encore négative à l'égard du point C ; elle est = $-\frac{8}{15} n \mu \zeta \times \frac{x}{b}$, en vertu des §. X. et XI. Chap. II. En multipliant toutes ces pressions accélératrices de la goutte p o par sa masse, on obtient la pression absolue qu'elle exerce sur le point C, et cette pression absolue sera $(Q + g - \frac{a a g}{(a-x)^2} - \frac{8 n \mu \zeta x}{15 b}) \times m d x$.

On remarquera ici en passant, que comme a est sensé infiniment plus grand que x , on peut poser $\frac{a^2}{(a-x)^2} = 1 + \frac{2x}{a}$, et ainsi cette pression devient

$$(Q - \frac{2x}{a} g - \frac{8 n \mu \zeta x}{15 b}) \times m d x.$$

dont l'intégrale donnera la pression de la colonne p C ; sçavoir ;

$$\int Q m d x - \int \frac{2 g m d x}{a} - \int \frac{8 n \mu \zeta m x d x}{15 b},$$

après quoi on aura la pression de toute la colonne b C, en substituant dans l'intégrale b à la place de x . A cette pression, il faut encore

ajouter celle de la petite colonne B b, dont la gravitation ou pesanteur vers C doit être censée uniforme dans toute sa hauteur, et égale à G : il faut aussi remarquer, que toutes les autres forces qui agissent sur cette petite colonne B b peuvent être négligées, comme infiniment inférieures à l'action G, qui exprime proprement la pesanteur près la surface de la Terre vers son centre ; ainsi donc la pression de la petite colonne B b doit être simplement estimée par sa hauteur ζ , sa densité μ et sa pesanteur G, ce qui fait $\mu \zeta G$. Il résulte enfin de tout cela, que la pression totale de toute la colonne B C sur le point C est

$$\mu \zeta G + \int Q m d x - \int \frac{2 g m x d x}{a} - \int \frac{8 n \mu \zeta m x d x}{15 b},$$

en prenant après l'intégration $x = b$.

2. Pour trouver à présent la pression de la colonne G C, il faut chercher toutes les forces qui animent la goutte m n, dont la masse est encore $m d x$. La *première* de ces forces provient de l'attraction du globe G b H d ; et est encore = Q, puisque cette force est la même en n et en p : la *seconde* force, provenant de la force centrifuge des parties de la Terre, entant qu'elle se tourne autour du point A, est = 0, cette force étant par-tout perpendiculaire à G C (§. VIII. Chap. III.). La *troisième* force provient de la gravitation des parties de la Terre vers A, cette gravitation est au point n vers le point A = $\frac{a a g}{a a + x x}$, et

étant décomposée, la gravitation résultante vers C doit être exprimée par

$$\frac{a a g x}{(a a + x x)^{\frac{3}{2}}}$$

: dans cette dernière expression on peut rejeter au dénominateur le terme $x x$, comme le calcul me l'a fait voir ; ainsi il provient $\frac{g x}{a}$, qui marque la troisième force vers C résultante de la gravitation

vers A. La *quatrième* force accélératrice, qui anime la goutte m n à descendre vers le centre, provient de l'action du double ménisque, qui en vertu du XII. §. Ch. II. est = $\frac{4}{15} n \mu \zeta \times \frac{x}{b}$. En prenant la somme

$$\text{de toutes ces forces accélératrices, la force totale sera } Q + \frac{g x}{a} + \frac{4 n \mu \zeta x}{15 b};$$

cette force accélératrice totale doit être multipliée par la petite masse $m d x$; et du produit il faut prendre l'intégrale, qui marquera la pression qu'exerce

la colonne m C sur le centre C : cette pression est donc $\int Q m d x +$

$$\int \frac{g m x d x}{a} + \int \frac{4 n \mu \zeta m x d x}{15 b}; \text{ et pour avoir la pression, qui ré-}$$

ponde à toute la colonne G C, il faut encore après l'intégration faire $x = b$.

3. Après avoir exprimé analytiquement les valeurs des pressions des colonnes B C et G C, il ne reste plus pour achever la solution de notre Problème, qu'à faire une équation entre les deux dites valeurs trouvées dans la première et seconde partie. On aura donc $\mu G C +$

$$\int Q m d x - \int \frac{2 g m x d x}{a} - \int \frac{8 n \mu c m x d x}{15 b} = \int Q m d x + \int \frac{g m x d x}{a} + \int \frac{4 n \mu m c x d x}{15 b}.$$

et cette équation arrangée donne

$$5 \mu G a b c - \int 4 n \mu a c m x d x = \int 15 g b m x d x,$$

et de là on tire la valeur cherchée de c , qui est constante; savoir,

$$c = \frac{\int 15 g b m x d x}{5 \mu G a b - \int 4 n \mu a m x d x}. \quad \text{C. q. f. t.}$$

COROLLAIRE.

VI.—On voit par notre solution, que généralement B b doit être égale à D d; car la valeur de c est la même, soit que l'on prenne x affirmativement, soit négativement. Aussi auroit-il été ridicule de supposer la courbe B G D H une ellipse, si les deux parties G B H et G D H n'étoient pas devenues par le calcul également allongées, et la supposition auroit renfermé une contradiction.

Au reste ces deux petites lignes ne seroient pas égales à la rigueur. Cette égalité n'est fondée que sur ce que nous avons rejeté plusieurs fois dans notre solution de certaines petites quantités, mais qu'on pouvoit négliger réellement, comme tout-à-fait insensibles, non-seulement par rapport à la ligne B C, mais même par rapport à la petite ligne B b, qui ne sauroit être que d'un petit nombre de pieds. Cependant je crois encore nécessaire d'avertir ici, qu'il faut être sur ses gardes, en rejetant dans le calcul de certains termes; car comme dans l'équation résultante, plusieurs termes se détruisent, et qu'il n'en reste que des termes d'une fort petite valeur, on ne doit rejeter que des quantités qui sont insensibles, même par rapport aux quantités restantes dans l'équation.

Ce n'est qu'avec une telle précaution, que j'ai négligé dans ma solution plusieurs termes, et je ne les aurois point négligés, si la fin du calcul ne m'avoit enseigné, qu'ils peuvent et doivent être négligés.

SCHOLIE.

VII.—Pour avoir une juste idée de notre équation, remarquons que μ signifie la densité de l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, et m la densité quelconque de la couche, dont la distance au centre est égale à x : n exprime la circonférence du cercle, dont le rayon est égal à l'unité : b est le rayon de la Terre : a la distance entre les centres du Soleil et de la Terre : g exprime la force accélératrice vers le Soleil, d'un corps placé au centre de la Terre ; et enfin G exprime la force accélératrice, ou la pesanteur des corps à la surface de la Terre vers son centre.

Or, pour voir que tous les termes de notre équation sont homogènes et comparables entre eux, et en même tems de quelle manière il faut faire usage de notre équation, il faut remarquer qu'en vertu du III. §. Chap. II. G doit être exprimée par la masse de toute la Terre, divisée par le quarré de son rayon ; c'est-à-dire, qu'il faut supposer $G = \frac{\int 2 n m x x d x}{b b}$,

et comme on connoît pour le Soleil le rapport entre g et G , aussi-bien que celui d'entre a et b , on voit qu'on peut enfin exprimer c simplement par b : mais il faut pour cet effet intégrer auparavant les quantités $m x x d x$ et $m x d x$: c'est ce que nous allons faire dans quelques hypothèses particulières.

VIII.—Soit d'abord la densité de la Terre uniforme, et nommément celle de l'eau de la mer : c'est ici l'hypothèse de M. Newton.

En ce cas m est une constante et égale à μ ; et ainsi notre équation

$$\text{finale du V. §. est } c = \frac{15 g b b}{2 a (5 G - 2 n \mu b)}.$$

Mais par le VII. §. on obtient $G = \frac{2}{3} n \mu b$, ou bien $2 n \mu b = 3 G$, et substituant cette valeur pour le second terme du dénominateur, il provient $c = \frac{15 g b}{4 G a} \times b$.

Nous verrons dans la suite, que cette expression analytique donne précisément la hauteur indiquée par M. Newton (†) simplement en pieds,

(†) C'est dans le Corollaire de la Prop. XXXVI. du Liv. III. ; M. Newton dit que la hauteur de l'eau de la mer sous le Soleil ou en point opposé au Soleil, surpasse la hauteur de l'eau de la mer à 90°. de ces points de 1¹¹/₈ pous., et c'est à peu près à cela que revient l'expression $\frac{15 g b}{4 G a}$ b, car (par Cor. 1. Prop.

VIII. de ce Livre) la gravité à la surface du Soleil est à la gravité à la surface de la Terre

comme 10000 à 435. Le demi-diamètre du Soleil étant vu de la Terre sous l'angle de 16'. 4". ce diamètre est à sa distance du centre de la Terre comme 1 à 214, ainsi la gravité de la Terre sur le Soleil (qui est g) est à la gravité à la surface de la Terre (qui est G) comme $\frac{10000}{214^2}$

à 435 ; d'où l'on trouve le log. de $\frac{g}{G} = -4.7002107$. Le diamètre du Soleil étant à celui

pouces et lignes, sans en donner le calcul, ou du moins sans le mettre à la portée, je ne dirai pas de tout le monde, mais uniquement de ceux qui voudroient bien prendre la peine nécessaire pour l'approfondir. Notre methode comprend donc le cas tout particulier de M. Newton. Mais ce cas donne une si petite quantité, qu'il ne me paroît pas possible d'en déduire les phénomènes des marées, tels que les observations les donnent. C'est ce que je ferai voir plus au long dans la suite. Je n'ai donc jamais pû comprendre, comment M. Newton, et tous ceux de sa nation, qui ont écrit sur cette matiere, ont pû s'y attacher. On voit par là, combien il est essentiel d'étendre les hypotheses des densités des couches de la Terre. J'ai remarqué que la loi de ces densités contribue beaucoup au haussement et baissement des eaux dans les marées; qu'on en peut déduire tel effet qu'on trouvera nécessaire pour l'explication des phénomènes indiqués par l'expérience; je ferai même voir que cet effet pourroit être infini dans de certaines hypotheses. Mais ce que je souhaite sur-tout que l'on remarque, c'est que les mêmes hypotheses qui donnent plus d'effet aux luminaires, pour hausser et baisser les eaux dans les marées, sont d'ailleurs extrêmement vrai-semblables par plusieurs raisons physiques, toutes très-fortes. Mais venons à d'autres exemples.

IX.—Supposons la Terre creuse en dedans, jusqu'à une distance donnée c depuis le centre, et que la croute (dont l'épaisseur sera $= b - c$, soit encore par-tout d'une densité égale à celle de l'eau de la mer.

Nous avons en ce cas encore m égale à la constante μ , et ainsi le calcul se fera comme dans le précédent Article, avec cette restriction, que les intégrales des quantités $m \times x \, dx$, et $m \, x \, dx$ doivent être $= 0$, lorsque $x = c$: de cette maniere on obtient $\int m \, x \, dx = \frac{1}{2} \mu \, x \, x - \frac{1}{2} \mu \, c \, c$, ou (en faisant $x = b$) $= \frac{1}{2} \mu \, b \, b - \frac{1}{2} \mu \, c \, c$; substituant cette valeur dans l'équation finale du V. §. il vient

$$c = \frac{15 \, g \, b \, (b \, b - c \, c)}{10 \, G \, a \, b - 4 \, n \, \mu \, a \, (b \, b - c \, c)};$$

et (par le VII. §.) G est $= \frac{\int 2 \, n \, m \, x \, x \, dx}{b \, b} = \frac{2 \, n \, \mu}{3 \, b \, b} \times (x^3 - c^3) =$ (puis qu'il faut poser $x = b$) $\frac{2 \, n \, \mu}{3 \, b \, b} \times (b^3 - c^3)$: de cette dernière équation,

de la Terre comme 10000 à 109, on aura que le rayon de la Terre $= b$ est à la distance du Soleil $= a$ comme 1 à 214 $\times \frac{10000}{109}$, ainsi le log. de $\frac{b}{a} = -5.7070265$, et $L \frac{g \, b}{G \, a} = -8.4072372$. Enfin, reduisant le rayon de la Terre b en pouces à raison de 1145 $\frac{1}{2}$ lieues de 2855 toises chacune pour le rayon, son log. est 8.3718709. Ainsi le log. de $\frac{g \, b}{G \, a} = 0.7791081$ dont le nombre est 6.014 dont les $\frac{1}{4}$ sont 22 $\frac{1}{2}$ pouces, à peu près comme M. Newton a trouvé.

on peut tirer celle-ci $\mu = \frac{3 b b G}{2 n \times (b^3 - c^3)}$; et enfin $4 n \mu a (b b - c c) = \frac{6 a b b G (b b - c c)}{b^3 - c^3}$ et substituant cette valeur dans le second terme du dénominateur de notre équation, on a $c = \frac{15 g}{2 G} \times \frac{b + x}{a} \times \frac{b^3 - c^3}{2 b b + 2 b c + 5 c c}$.

Cette quantité est la même que celle du précédent article, lorsque $c = 0$; mais elle devient plus petite, à mesure qu'on suppose la Terre plus creusée, et elle deviendrait tout-à-fait nulle, si on supposoit la Terre presque entièrement creuse en forme d'une voute sphérique, dont l'épaisseur fût peu considérable, par rapport au rayon de la Terre. Cette remarque suffit seule, pour refuter le sentiment de ceux qui croient que la Terre pourroit bien n'être qu'une croute voutée ; car il ne pourroit y avoir en ce cas aucun flux et reflux de la mer, au moins dans notre système.

X.—Si l'on supposoit la loi des densités des couches de la Terre exprimée par cette équation $m = \frac{x}{b} \mu$, c'est-à-dire, que les densités fussent proportionnelles aux distances des couches au centre, on trouveroit la hauteur

$$c = \frac{15 g b}{7 G a} \times b,$$

et par conséquent beaucoup plus petite, que si la Terre étoit par-tout d'une même densité, sçavoir en raison de 7. à 4. Aussi cette hypothese n'est-elle aucunement vraisemblable, y ayant apparence que les couches plus denses sont plus bas que les couches plus legeres.

XI.—Si la loi des densités est exprimée par $m = \frac{b \mu}{x}$, c'est-à-dire, si l'on suppose les densités, suivre la raison inverse des distances des couches au centre, on trouveroit

$$c = \frac{15 g b}{G a} \times b,$$

ce qui fait la valeur de c quatre fois plus grande, que dans la supposition de M. Newton, de la parfaite homogenéité de la Terre.

XII.—Supposons enfin la loi des densités exprimée par $m = \left(\frac{b}{x}\right)^{\frac{4}{3}} \mu$

il faudra mettre $\frac{5}{2} \mu b$ pour $\int m x dx$, et l'équation du VI. §. divisée par μ sera

$$c = \frac{45 g b}{10 G a - 12 n \mu a b} \times b:$$

mais en vertu du VII. §. on a $G = \int \frac{2 n m x dx}{b b} = \int \frac{2 n \mu x \frac{5}{2} dx}{b \frac{5}{2}} = \frac{6 n \mu x \frac{5}{2}}{5 b \frac{5}{2}}$
 = (en faisant $x = b$) $\frac{6}{5} n \mu b$. D'où l'on voit que le dénominateur de notre équation fondamentale devient = 0, et par conséquent $c = \infty$. Ainsi l'élevation des eaux seroit infinie.

XIII.—J'ai mis cette dernière hypothèse, non qu'elle soit possible, puisque la densité ne sauroit être infinie, comme elle devrait être au centre; mais pour faire voir l'avantage et la supériorité de notre théorie, puisqu'elle ne met point de bornes à l'élevation des eaux: si les marées étoient cent ou mille fois plus grandes qu'on ne les observe, nous pourrions lui assigner une cause suffisante. Ayant au reste bien examiné tous les phénomènes du flux et reflux de la mer, je suis entièrement convaincu, que la force assignée par M. Newton ne sauroit suffire pour les produire: il faut donc dire dans le système même de ce philosophe, que les densités de la Terre ne sont pas uniformes, mais qu'elles croissent vers le centre. Cette hypothèse n'est-elle pas fort probable d'ailleurs d'elle même? L'eau est-elle le seul fluide que nous connoissons? et ne faut-il pas que les fluides plus pesants, soient plus proches du centre de la Terre? le mercure est près de quatorze fois plus pesant que l'eau: la grande compression que souffrent les parties proches du centre de la Terre, ne pourroit-elle pas contribuer à rendre la matière plus compacte et plus dense?

Si nous considérons outre cela, combien les planètes et la Terre, qui nagent sans doute dans un milieu résistant, quoique extrêmement subtil, conservent leur mouvement, sans en perdre la moindre partie considérable pendant une longue suite de siècles, nous pourrions facilement croire, que tous ces corps ont beaucoup plus de matière, que Mr. Newton ne marque. Enfin de quel côté que j'envisage cette question, tout me fait croire, que les couches de la Terre augmentent de densité vers le centre.

XIV.—Si, tout le noyau ou tout le globe de la Terre restant, l'eau de la mer, qui inonde la Terre, changeoit de densité, la quantité c suivroit la raison reciproque des densités des eaux de la mer. Il suit de là que si la Terre étoit inondée de mercure, les marées seroient quatorze fois plus petites, qu'elles ne sont actuellement. Et si au contraire l'air étoit un fluide homogène pesant, mais sans élasticité, sa hauteur seroit environ de 850 c plus grande à ceux qui ont le Soleil au zenith, qu'à ceux qui

l'auroient à l'horizon. Cela feroit 1700 pieds de différence dans la hauteur de l'atmosphère, à ne donner que deux pieds de valeur à ϵ ; et cette différence en produiroit une sur le barometre de plus de 20 lignes. D'où vient donc, demandera-t-on, qu'on n'observe point à cet égard aucune variation dans le barometre? C'est l'élasticité de l'air qui en est la cause, cette élasticité fait que la hauteur du barometre doit être constamment la même dans toute la surface de la mer, en faisant abstraction seulement des causes accidentelles et passageres, qui peuvent survenir tout d'un coup, et qui n'agissent sur l'air, que parce que celui-ci ne sauroit obéir assez promptement, ni se mettre dans un instant dans son état naturel d'équilibre. On remarquera ici qu'il est faux que la pression du mercure soit égale à la pression, ou plutôt au poids de la colonne d'air verticale couchée dessus, ce que l'on affirme ordinairement; mais la pression du mercure est égale au poids moyen de toutes les colonnes d'air verticales, qui environnent la Terre, c'est à-dire, égale au poids de tout l'atmosphère (dont la hauteur est considérée comme infiniment petite, par rapport au rayon de la Terre) multiplié par la raison de la base de la colonne du mercure à toute la surface de la Terre. Cette Proposition fait voir que la hauteur moyenne du barometre doit être la même sous l'équateur et sous le cercle polaire, quoique le poids absolu de la colonne d'air verticale sous l'équateur pendant les plus grandes chaleurs ne soit pas la moitié si grand que celui d'une pareille colonne d'air sous le cercle polaire en hyver. On voit de tout ce que nous venons de dire, pourquoi, ni le Soleil, ni la Lune ne changent pas sensiblement la hauteur du barometre, quoi qu'ils élèvent les eaux considérablement. La véritable raison n'en est que l'élasticité de l'air, qui doit faire presser également tous les endroits de la surface de la Terre; et cette seule réflexion démontre entièrement l'insuffisance des inégales compressions de la matière des tourbillons, pour expliquer les marées, comme nous avons déjà remarqué au III. §. Chap. I.

XV.—Tous les cas particuliers, que nous venons d'examiner, font voir, et il n'est pas difficile de le démontrer généralement par l'équation du V. §. que la quantité ϵ (qui exprime la différence entre la plus grande hauteur de la mer, et la plus petite, entant qu'elle est produite par la seule action du Soleil) est toujours $= \frac{n g b}{G a} \times b$: le coefficient n dépend

des différentes densités des couches de la Terre, le rapport $\frac{b}{a}$ est connu par les observations astronomiques: il ne reste donc qu'à voir comment

il faudra mettre $\frac{2}{3} \mu b$ pour $\int m x dx$, et l'équation du VI. §. divisée par μ sera

$$c = \frac{45 g b}{10 G a - 12 n \mu a b} \times b:$$

mais en vertu du VII. §. on a $G = \int \frac{2 n m x dx}{b b} = \int \frac{2 n \mu x^{\frac{2}{3}} dx}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{6 n \mu x^{\frac{5}{3}}}{5 b^{\frac{2}{3}}}$
 = (en faisant $x = b$) $\frac{6}{5} n \mu b$. D'où l'on voit que le dénominateur de notre équation fondamentale devient = 0, et par conséquent $c = \infty$. Ainsi l'élevation des eaux seroit infinie.

XIII.—J'ai mis cette dernière hypothèse, non qu'elle soit possible, puisque la densité ne sauroit être infinie, comme elle devrait être au centre; mais pour faire voir l'avantage et la supériorité de notre théorie, puisqu'elle ne met point de bornes à l'élevation des eaux: si les marées étoient cent ou mille fois plus grandes qu'on ne les observe, nous pourrions lui assigner une cause suffisante. Ayant au reste bien examiné tous les phénomènes du flux et reflux de la mer, je suis entièrement convaincu, que la force assignée par M. Newton ne sauroit suffire pour les produire: il faut donc dire dans le système même de ce philosophe, que les densités de la Terre ne sont pas uniformes, mais qu'elles croissent vers le centre. Cette hypothèse n'est-elle pas fort probable d'ailleurs d'elle même? L'eau est-elle le seul fluide que nous connoissions? et ne faut-il pas que les fluides plus pesants, soient plus proches du centre de la Terre? le mercure est près de quatorze fois plus pesant que l'eau: la grande compression que souffrent les parties proches du centre de la Terre, ne pourroit-elle pas contribuer à rendre la matière plus compacte et plus dense?

Si nous considérons outre cela, combien les planètes et la Terre, qui nagent sans doute dans un milieu résistant, quoique extrêmement subtil, conservent leur mouvement, sans en perdre la moindre partie considérable pendant une longue suite de siècles, nous pourrions facilement croire, que tous ces corps ont beaucoup plus de matière, que Mr. Newton ne marque. Enfin de quel côté que j'envisage cette question, tout me fait croire, que les couches de la Terre augmentent de densité vers le centre.

XIV.—Si, tout le noyau ou tout le globe de la Terre restant, l'eau de la mer, qui inonde la Terre, changeoit de densité, la quantité c suivroit la raison reciproque des densités des eaux de la mer. Il suit de là que si la Terre étoit inondée de mercure, les marées seroient quatorze fois plus petites, qu'elles ne sont actuellement. Et si au contraire l'air étoit un fluide homogène pesant, mais sans élasticité, sa hauteur seroit environ de 850 c plus grande à ceux qui ont le Soleil au zénith, qu'à ceux qui

11 pouces et un huitieme. (Princ. Math. pag. 419.) La différence me paroît trop petite, pour en rechercher l'origine.

XVI.—Tout ce que nous venons de dire par rapport à l'action du Soleil, doit être entendu aussi de la Lune, sans y rien changer; de sorte que les équations fondamentales des §. V. et VII. servent également pour la Lune, en entendant par a la distance entre les centres de la Terre et de la Lune, et par g la pesanteur d'un corps placé au centre de la Terre vers la Lune. Et comme nous avons dit au XV. §. que quelque hypothese qu'on prenne pour exprimer les différentes densités dans les couches de la Terre, on trouvera toujours

$$c = \frac{n g b}{G a} \times b,$$

nous dirons par rapport à la Lune, qu'on trouvera toujours

$$\delta = \frac{n \gamma b}{G a} \times b,$$

prenant pour δ la différence des hauteurs des eaux à ceux qui ont la Lune au zenith, et à l'horison, pour a la distance entre les centres de la Lune et de la Terre, et pour γ la pesanteur d'un corps placé au centre de la Terre vers la Lune.

XVII.—Ce qui m'a engagé à ne parler d'abord que de l'action du Soleil sur la mer, est qu'on connoît parfaitement bien la valeur de g pour le Soleil, comme nous avons vû au XV. §. au lieu que la Lune, qui n'a point de satellites, ne sçauroit donner immédiatement la force accélératrice qu'elle cause au centre de la Terre, et que nous avons nommé γ . Je trouve par ma nouvelle théorie de la Lune, dont j'ai déjà fait mention ci-dessus, plus générale, plus exacte, et sur-tout infiniment plus facile, que celle de M. Newton, qu'on peut déterminer la valeur γ avec toutes les autres qui en dépendent; sçavoir la masse de la Lune, comparée avec celle de la Terre, et leur commun centre de gravité, moyennant quelques irrégularités dans les mouvemens de la Lune, pourvû qu'on puisse les observer assez exactement. M. Newton a tâché de déterminer la force accélératrice γ , en comparant les effets de la Lune sur la mer avec ceux du Soleil; cette methode seroit fort bonne, si on sçavoit bien séparer les effets des deux luminaires. Il a prétendu le faire, en comparant les marées bâtardees, qui suivent les quadratures, avec les plus grandes marées, qui suivent les syzygies. Nous verrons ci-dessous ce que l'on peut trouver à redire à cette methode, et comment on pourra en substituer d'autres plus exactes.

XVIII.—Au reste, il est clair que la Lune et le Soleil produiront leurs


XIX.—Voici donc les cas et les hypothèses, par lesquelles nous commencerons. Nous supposerons d'abord, que la Lune fait des cercles parfaits autour de la Terre, et pareillement la Terre autour du Soleil : que ces orbites sont dans le plan de l'équateur de la Terre : que toute la Terre est inondée : que la surface de la mer prend dans un instant sa juste figure, tout comme si l'eau n'avoit point d'inertie, ni résistances ; et enfin qu'il ne faille déterminer les loix des marées, que sous l'équateur. Mais avant de faire les calculs, il sera bon d'exposer préliminairement quelques Lemmes géométriques.

CHAPITRE V.

*Contenant quelques Propositions de géometrie préliminaires pour
l'Explication et le Calcul des Marées.*

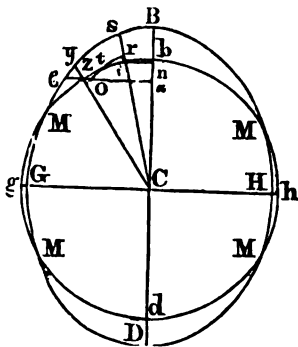
PROBLEME.

1.—Soit, comme ci-dessus, le cercle $b g d h$ et l'ellipse presque circulaire $B G D H$, et supposons la sphère et le sphéroïde, décrits par la rotation du cercle et de l'ellipse autour de l'axe $B D$, égaux; trouver le rapport entre les petites lignes $B b$ et $G g$.



SOLUTION.

Nous supposons pour nous servir des mêmes expressions, que nous avons employées jusqu'ici, $Bb + Gg = c$; $Gg = x$, et $Bb = c - x$; Cb ou $Cg = b$; n la circonférence du cercle, dont le rayon est égal à l'unité. Ceci posé, on sçait que la sphere sera $= \frac{2}{3} n b^3$: on sçait aussi, qu'un ellipsoïde (dont le grand axe est $= 2 A$, et le plus petit diametre $= 2 B$) est $= \frac{2}{3} n B B A$; cela donne notre sphéroïde $= \frac{2}{3} n (b - x)^2 \times (b + c - x) = \frac{2}{3} n (b^3 - 3 b b x + b b c)$ si l'on néglige les infiniment petits du second ordre. Faisant à présent par la condition du Problème la sphere égale au sphéroïde, on a $\frac{2}{3} n b^3 = \frac{2}{3} n (b^3 - 3 b b x + b b c)$ c'est-à-dire, $x = \frac{1}{3} c$. C. q. f. t.



COROLLAIRE.

II.—Si $Gg = \frac{1}{2}c$, il faut que Bb soit $= \frac{2}{3}c$, et par conséquent double de l'autre. Ainsi donc l'eau monte deux fois plus autour de la ligne, qui passe par le centre de l'un des luminaires, et celui de la Terre, qu'elle ne descend à la distance de 90 degrés.

PROBLEME.

III.—Si l'on tire du centre C une droite quelconque Cy , trouver la petite ligne yz , qui marque la hauteur verticale du point y pris dans l'ellipse, par dessus le point z pris dans le cercle.

SOLUTION.

Qu'on tire par le point z la droite Ca perpendiculaire à l'axe: on voit qu'en conséquence de nos hypothèses, l'angle Cyz doit être pris pour un droit, et le petit triangle Cyz censé semblable au triangle $Ca z$, d'où l'on tire

$$yz = \frac{az}{Cz} \times Cz.$$

Soit à présent $Ca = s$; $za = \sqrt{bb - ss}$; on aura par la nature de l'ellipse

$$ac = \frac{CG}{CB} \times \sqrt{Ba \times aD} = \frac{b - \frac{1}{2}c}{b + \frac{2}{3}c} \times \sqrt{(b + \frac{2}{3}c - s) \times (b + \frac{2}{3}c + s)}.$$

Si on change cette quantité en suites, et qu'on rejette toujours les infiniment petits du second ordre, on trouvera enfin

$$ac = \sqrt{bb - ss} + \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times c.$$

De là on tire $ac - az = cz = \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times c$, et par conséquent

$$yz = \frac{3ss - bb}{3bb} \times c. \quad \text{C. q. f. t.}$$

COROLLAIRE I.

IV.—Pour trouver les points M , où l'ellipse coupe le cercle, on n'a qu'à faire $yz = 0$, ce qui donne $s = b\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5773b$, et l'arc oM de $61^{\circ}.44'$.

COROLLAIRE.

que les baissemens des eaux sont proportionnels aux quarrés des sinus des angles horaires, qui commencent du moment de la haute-mer.

COROLLAIRE III.

VI.—Les variations qui répondent à de petits intervalles de tems égaux, sont pour chaque point z, proportionnelles aux aires du triangle C a z. Car l'intervalle de tems doit être exprimé simplement par un petit arc de cercle, qui est $= \frac{-b \, ds}{\sqrt{b \, b - s \, s}}$, en considérant s comme variable; et si nous faisons cette quantité égale à un petit élément de tems d t, nous aurons $\frac{-b \, ds}{\sqrt{b \, b - s \, s}} = d t$ et $ds = \frac{-d t \sqrt{b \, b - s \, s}}{b}$. Or par le V. §. tout le baissement des eaux étant $= \frac{b \, b - s \, s}{b \, b} \times \zeta$, sa différentielle sera $= \frac{2 \, \zeta \, s \, d t \sqrt{b \, b - s \, s}}{b^3}$; et comme les quantités ζ , b et d t sont constantes, nous voyons, que les variations verticales des marées, qui se font en de petits intervalles de tems égaux, sont proportionnelles aux quantités répondantes $\sqrt{b \, b - s \, s}$, ou aux aires des triangles C a z.

COROLLAIRE.

II.—Si $Gg = \frac{1}{3}c$, il faut que Bb soit $= \frac{2}{3}c$, et par conséquent double de l'autre. Ainsi donc l'eau monte deux fois plus autour de la ligne, qui passe par le centre de l'un des luminaires, et celui de la Terre, qu'elle ne descend à la distance de 90 degrés.

PROBLEME.

III.—Si l'on tire du centre C une droite quelconque Cy , trouver la petite ligne yz , qui marque la hauteur verticale du point y pris dans l'ellipse, par dessus le point z pris dans le cercle.

SOLUTION.

Qu'on tire par le point z la droite ca perpendiculaire à l'axe: on voit qu'en conséquence de nos hypothèses, l'angle cyz doit être pris pour un droit, et le petit triangle cyz censé semblable au triangle $Ca z$, d'où l'on tire

$$yz = \frac{az}{Cz} \times cz.$$

Soit à présent $Ca = s$; $za = \sqrt{bb - ss}$; on aura par la nature de l'ellipse

$$ac = \frac{CG}{CB} \times \sqrt{Ba \times aD} = \frac{b - \frac{1}{3}c}{b + \frac{2}{3}c} \times \sqrt{(b + \frac{2}{3}c - s) \times (b + \frac{2}{3}c + s)}.$$

Si on change cette quantité en suites, et qu'on rejette toujours les infiniment petits du second ordre, on trouvera enfin

$$ac = \sqrt{bb - ss} + \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times c.$$

De là on tire $ac - az = cz = \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times c$, et par consequent

$$yz = \frac{3ss - bb}{3bb} \times c. \quad \text{C. q. f. t.}$$

COROLLAIRE I.

IV.—Pour trouver les points M , où l'ellipse coupe le cercle, on n'a qu'à faire $yz = 0$, ce qui donne $s = b\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5773b$, et l'arc oM de $54^\circ.44'$.

l'angle donné $b C z = \frac{\sigma}{b}$; le sinus de l'angle $c C z$ pareillement donné $= \frac{\ell}{b}$: de cette manière, nous aurons en vertu du III. §. $r z = \frac{3 s s - b b}{3 b b} \times c = \frac{2 b b - 3 \sigma \sigma}{3 b b} \times c$, et pareillement $y r = \frac{2 b b - 3 \ell \ell}{3 b b} \times d$, et par conséquent

$$y z = \frac{2 b b - 3 \sigma \sigma}{3 b b} \times c + \frac{2 b b - 3 \ell \ell}{3 b b} \times d. \quad \text{C. q. f. t.}$$

COROLLAIRE.

IX.—On voit par cette solution la loi qu'il faudroit observer pour construire une table, qui marquât pour chaque âge de la Lune, et pour chaque moment, les hauteurs des marées, en supposant le point z changer continuellement de position, jusqu'à-ce qu'il ait fait le tour: voyons à présent quel est le point z , qui marque la plus grande hauteur $y z$, les poles b et c étant donnés de position.

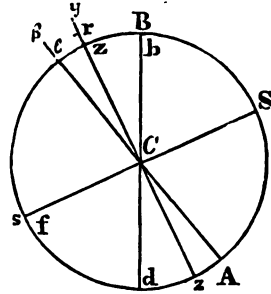
LEMME.

X.—Si le sinus de l'angle $b C z$ est appelé, comme ci-dessus, $\frac{\sigma}{b}$; le sinus de l'angle $c C z$, $\frac{\ell}{b}$;

le sinus de la somme de ces deux angles, c'est-à-dire, le sinus de l'angle $b C c$, $\frac{m}{b}$; je dis qu'on aura

$$\ell = \frac{m \sqrt{(b b - \sigma \sigma)} - n \sigma}{b}, \quad * \text{ et}$$

$$\ell^2 = \frac{m m b b + n n \sigma \sigma - m m \sigma \sigma - 2 m n \sigma \sqrt{(b b - \sigma \sigma)}}{b b}$$



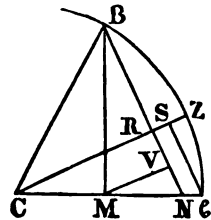
* La lettre n exprime ici $\sqrt{b b - m m}$. La démonstration de ce Lemme est fort simple, le rayon $B C$ étant b , le sinus de tout l'angle $B C c$ étant $\frac{m}{b}$, on aura $B M = m$, $C M = \sqrt{b b - m m}$; $c S = \sigma$, $C S = \sqrt{b b - \sigma \sigma}$, $B R = \ell$. Prolongez $B R$ en N , et menez $M V$ parallèle à $C R$, les triangles $C c S$ et $B M V$ seront semblables à cause des angles droits $S c V$ et des angles égaux $C c S$ et $M B N$; donc on aura $C c$

$$(b) : C S (\sqrt{b b - \sigma \sigma}) = B M (m) : B V = \frac{m \sqrt{b b - \sigma \sigma}}{b};$$

$$\text{on trouvera de même que } C c (b) : c S (\sigma) = C N : N R = C M (n) :$$

$$R V = \frac{n \sigma}{b}; \text{ donc } B R (\ell) = B V - R V = \frac{m \sqrt{b b - \sigma \sigma}}{b}$$

$$- \frac{n \sigma}{b} : \text{ C. q. f. t.}$$



Je n'ajouterais pas la démonstration de ce Lemme : mais il est pourtant bon d'avertir ici, qu'en cherchant la valeur de φ , qui marque le sinus de la différence de deux angles donnés par leurs sinus, on tombe facilement dans une autre expression beaucoup plus prolix, et qui rend le calcul du Problème, que nous allons exposer, presque impraticable.

PROBLEME.

Trouver les points z , où les hauteurs $y z$ soient les plus grandes.

SOLUTION.

La nature de notre Problème demande, que la différentielle de $y z$, savoir $\frac{-2 \zeta \sigma d \sigma - 2 \delta \varphi d \varphi}{b b}$ (§. VIII.) soit $= 0$, ou bien $\varphi d \varphi = \frac{\zeta}{\delta} \sigma d \sigma$.

Et si l'on différentie l'équation seconde du précédent Lemme, on trouve, prenant les quantités m , n et b pour constantes, et σ pour variable,

$$\varphi d \varphi = \frac{n n \sigma d \sigma - n m \sigma d \sigma}{b b} + \frac{2 m n \sigma \sigma - n m b b d \sigma}{b b \sqrt{(b b - \sigma \sigma)}} d \sigma.$$

En comparant ces deux valeurs de $\varphi d \varphi$, on trouve une nouvelle équation, à laquelle on pourra donner une telle forme,

$$\left(-\frac{\zeta}{\delta} b b \sigma + m m \sigma - n n \sigma \right) \sqrt{b b - \sigma \sigma} = 2 m n \sigma \sigma - m n b b : \text{---}$$

l'on suppose pour abrégier la formule $\frac{-\zeta b b}{\delta m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = A$, on trouve — après une reduction entiere de l'équation, le sinus de l'angle $b C z$, ou

$$\frac{\sigma}{b} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{A}{2 \sqrt{4 + A A}} \right)}. \quad \text{C. q. f. t.}$$

SCHOLIE.

XII.—Il ne sera pas difficile de reconnoître dans chaque cas, qu'— choix on doit faire des signes ambigus. Mais pour faciliter la chose, — pour en donner une idée d'autant plus distincte, on pourra faire — remarques qui suivent.

1°. Que notre formule marque en même tems quatre points z , Z , s — S ; que les deux premiers diametralement opposés, marquent que la — y est la plus haute, et les deux autres diametralement opposés marque — que la mer x est la plus basse, et que l'arc $z s$ est toujours de 90° , ce —

SOLUTION.

Pour déterminer l'angle en question, il faut faire $d\varphi = 0$, or φ étant exprimé par des constantes, et par la variable B (§. XIII.) il faut supposer $d B = 0$, c'est-à-dire, que la différentielle de la quantité $\frac{-\partial b b}{\zeta m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$, doit être supposée égale à zero, en considérant les lettres m et n comme variables: substituons pour n sa valeur $\sqrt{b b - m m}$ (§. X.) nous aurons

$$B = \frac{-\partial b b + 2 \zeta m m - \zeta b b}{\zeta m \sqrt{b b - m m}},$$

dont la différentielle devient nulle, en faisant

$$\frac{m}{b} = \sqrt{\frac{\zeta + \partial}{2 \partial}}.$$

COROLLAIRE.

XVI.—Si ζ étoit $= \partial$, c'est-à-dire, si les deux luminaires avoient une force égale, pour mettre la mer en mouvement, on auroit $m = b$. Mais la force lunaire étant plus grande que la force solaire, m devient plus petit que b : cependant l'angle $b C \zeta$ ne deviendra jamais moindre que de 45° .

On remarquera aussi, qu'il y a quatre points, tels que ζ , dont deux sont autant éloignés du point b , que les deux autres le sont du point d ; et que dans ces quatre points, la haute marée vient alternativement après et avant le passage de la Lune par le méridien.

Nous allons voir à présent comme on doit appliquer tout ce que nous venons de dire pour trouver l'heure des marées, et pour faire voir, combien notre théorie bien ménagée s'accorde là-dessus avec les observations.

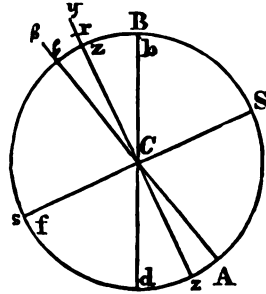
CHAPITRE VI.

Sur l'heure moyenne des Marées pour toutes les Lunaisons.

I.—ON a été de tout tems soigneux à bien remarquer l'heure des hautes et basses marées, pour établir là-dessus, autant qu'il est possible, des

l'on connoit de ce que $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}}$, exprimant le sinus d'un angle, son cosinus est exprimé par $\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}\right)}$.

2°. Que l'angle $b C c$ étant aigu, le point z tombe entre les points b et c , que si cet angle est droit, le point z tombe précisément sur c (en supposant la force lunaire plus grande que la force solaire, comme elle l'est sans doute); et enfin, lorsque l'angle $b C c$ est obtus, que le point z tombe au-delà du point c , l'arc $b z$ devenant plus grand que l'arc $b c$, avec cette loi que le point z s'approche réciproquement du point d , tout comme il s'étoit éloigné du point b . Enfin, qu'il y a autant de racines inutiles, qu'il faut rejeter, mais qu'il faudroit adopter, si la force solaire surpassoit la force lunaire.



COROLLAIRE I.

XIII.—On trouve le sinus de l'angle $c C z$ exprimé par $\frac{c}{b}$ de la même façon, que nous avons trouvé le sinus de l'angle $b C z$. On voit même que sans faire le calcul de nouveau, on n'a qu'à renverser les lettres c et b dans la valeur de A , indiquée au §. XI. et supposer $-\frac{b b b}{c m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = B$, et on aura $\frac{f}{b} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}$.

COROLLAIRE II.

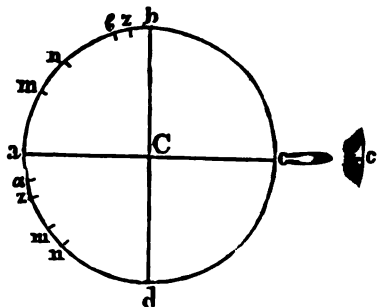
XIV.—Considérant l'angle $b C c$ comme variable, on voit que l'angle $c C z$, qui marque l'angle horaire entre le moment de la plus haute marée, et celui du passage de la Lune par le méridien, peut faire un *maximum*, ou plus grand, puisqu'il est $= 0$, tant lorsque l'angle $b C c$ est nul, que lorsqu'il est égal à un droit: nous allons déterminer cet angle dans la Proposition suivante.

PROBLEME.

XV.—Déterminer l'angle $b C c$ tel que son angle $c C z$ devienne le plus grand qu'il est possible.

cette matiere, qui l'éclairciront plus que toutes les observations, qu'on a faites jusqu'ici. Il est vrai que ces déterminations dépendent du rapport qu'il y a entre les forces des deux luminaires, que ce rapport est encore incertain, et qu'il est même variable: mais j'indiquerai quels sont les moyens les plus sûrs, pour le déterminer d'abord dans de certaines circonstances, et ensuite généralement. Avant que de traiter cette question, qui est une des plus utiles, et des plus essentielles, nous déterminerons généralement le vrai tems des hautes et basses marées, en supposant le rapport entre les forces des deux luminaires connu.

IV.—Soit $b a d c$ l'équateur, dans le plan duquel les deux luminaires sont encore supposés se mouvoir de b vers a , pendant que l'équateur de la Terre se tourne dans le même sens autour de son centre C . Prenons dans l'équateur un point b , et considérons les luminaires se trouver dans leur conjonction au point b , c'est-à-dire, étant l'un et l'autre dans la ligne prolongée $d b$; on voit qu'en ce cas la haute marée doit être dans ce moment-là en b , et précisément à midi.



V.—Voyons à présent ce qui doit arriver un, deux, trois, &c. jours après: supposons pour cet effet, que le Soleil se trouvant encore à midi au point b , la Lune réponde au point c : la haute marée répondra dans ce moment au point z , et les arcs $b z$, $c z$ se déterminent par le §. XI. et XIII. du Chap. V. il faut donc que le point b parcoure dans l'équateur l'arc $b z$, pour se trouver dans l'endroit de la plus haute marée; car on peut négliger les petits arcs, que les luminaires parcourent, dans le tems que le point b de l'équateur parcourt l'arc $b z$. On voit donc, que si l'on veut régler le tems des hautes marées après le tems vrai, on doit prendre l'arc $b z$, pour l'arc horaire, qui marque l'heure de la haute marée de ce jour-là.

Cette règle suppose le point c en repos, pendant le tems qui conviendrait au dit arc horaire $b z$; mais il est facile de corriger cette supposition car nous verrons dans la suite, que l'arc $b z$ est presque égal à l'arc $b c$; et cela étant, il est clair, qu'on n'a qu'à substituer des heures lunaires aux heures solaires, qui répondent à l'arc $b z$, pour corriger la dite supposition.

VI.—Nous venons de montrer, comment on peut déterminer le vrai tems des hautes marées, en le rapportant au midi, c'est-à-dire, au passage

du Soleil par le méridien : voici à présent, comment on peut déterminer l'heure des hautes marées, en la rapportant au passage de la Lune par le méridien, qu'on connoît par les éphémérides : on peut le faire immédiatement par le moyen de l'arc Cz : nous verrons que le point z ne sçauroit s'éloigner du point C au-delà d'environ dix degrés, qui répond à 40 minutes de tems, pendant lequel cet arc ne sçauroit varier sensiblement ; d'où il suit que ce petit arc Cz marquera toujours l'arc horaire entre le moment du passage de la Lune par le méridien et le moment de la haute marée.

VII.—L'arc Cz étant tantôt négatif, tantôt affirmatif, comme il paroît par le XIII. Art. du Chap. V. on voit que la haute marée suivra le passage de la Lune par le méridien, depuis les syzygies jusqu'aux quadratures, et qu'elle le précèdera depuis les quadratures jusqu'aux syzygies : on voit encore par l'Art. XV. du Chap. V. que l'arc Cz fait un *maximum*,

lorsque le sinus de l'arc bC est $= \sqrt{\frac{C + \delta}{2\delta}}$: c'est alors que la haute

marée retarde ou avance le plus sur le passage de la Lune par le méridien : et comme vers ce tems-là les points C et z peuvent être censés avoir un mouvement égal, l'intervalle d'une marée à l'autre, sera alors précisément d'un jour lunaire : et cet intervalle peut être appelé intervalle moyen entre deux marées qui se suivent : il est de 24 heures 50½ minutes, en prenant 29 jours 12 heures 44 minutes, pour le tems moyen d'une conjonction à l'autre.

On remarquera encore que l'intervalle d'une marée à l'autre, est le plus petit dans les syzygies, et le plus grand dans les quadratures.

VIII.—Pour déterminer analytiquement les propriétés, que nous venons d'indiquer en gros, nous supposerons, que la Lune répondant au point m , et la haute marée étant dans ce moment là au point n , l'arc mn soit alors le plus grand qu'il est possible. Soit outre cela encore le sinus total $= 1$, le sinus de l'arc $mb = m$, son cosinus $= n$. Cela étant, nous avons déjà dit, et nous le remarquerons encore ici :

$$1^{\circ}. \text{ Qu'on aura } m = \sqrt{\frac{C + \delta}{\delta}}.$$

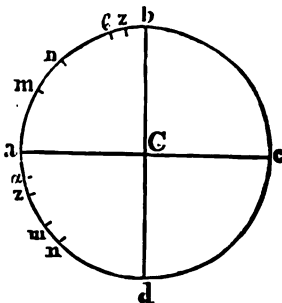
2^o. Qu'on peut déterminer la grandeur de l'arc mn par le moyen du XIII. §. Chap. V. où nous avons démontré, que généralement le sinus de cet arc est

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}$$

en supposant $B = \frac{\delta b b}{c m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Pour appliquer cette règle générale à notre cas particulier, il faut supposer $b = 1$; $m = \sqrt{\frac{c + \delta}{2 \delta}}$, et $n = \sqrt{\frac{\delta - c}{2 \delta}}$: après ces substitutions, on trouve le sinus de l'arc $m n$ $= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\delta \delta - c c}}{2 \delta}\right)}$; et comme δ est beaucoup plus grand que c , on peut censurer le sinus de l'arc $m n$ être simplement $= \frac{c}{2 \delta}$.

3°. Qu'on déterminera la grandeur de l'arc $n b$, par le moyen du XI. §. du Chap. V. Il est remarquable que cet arc ne dépend point du rapport, qui est entre la force lunaire δ , et la force solaire c ; car il est toujours de 45 degrés.

4°. Que si la Lune est supposée dans un point quelconque c , les arcs $b z$ et $c z$ peuvent se déterminer par le moyen des XI. et XIII. §. du Chap. V. comme nous avons déjà dit: mais si l'on suppose le point c bien près du point b , nos formules font voir, qu'on peut



censurer alors le sinus de l'arc $c z = \frac{c}{\delta + \delta} \times m$, et le sinus du petit arc $= b z = \frac{\delta}{c + \delta} \times m$. Cette formule nous servira à déterminer combien les marées priment vers les syzygies.

5°. Que si la Lune se trouve en a bien près de a , la haute marée répondra dans ce moment au point z au-delà du point a , et on trouvera par le XIII. Art. du Chap. V. si l'on traite bien l'équation qui y est marquée, le sinus du petit arc $a z = \frac{c}{\delta - c} \times n$, en prenant pour n le cosinus de l'arc $b a$, ou ce qui revient au même, le sinus du petit arc $a a$. Cette valeur du petit arc $a z$ nous servira à déterminer, combien les marées retardent vers les quadratures.

Ces deux dernières remarques sont fondées sur ce que m ou n , étant comme infiniment petits, les quantités A et B deviennent comme infiniment grandes, et alors on peut substituer simplement $\frac{1}{A}$ et $\frac{1}{B}$ à la place des quantités.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{3 \sqrt{4 + A A}}\right)} \text{ et } \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{B}{2 \sqrt{4 + B B}}\right)} :$$

et après ces substitutions, on trouve les sinus des petits arcs, comme nous les avons déterminés.

IX.—Toutes ces propriétés, que nous venons d'établir, sont tout-à-fait conformes aux observations. Mais pour en sentir toute la force, il faudroit toujours sçavoir le rapport qu'il y a entre les forces δ et ζ , et c'est ce que j'ai déjà dit, qu'on ne sçauroit déterminer immédiatement par les principes d'astronomie, faute d'observations assez justes sur la Lune; il faut donc s'en tenir aux effets physiques, que la Lune produit sur la Terre, pour en déduire sa force; et je n'en connois point d'autres, que les marées mêmes: mais il s'en faut servir avec beaucoup de circonspection. Comme c'est ici un point très-essentiel, je n'ai pas voulu manquer de le considérer avec toute l'attention qu'il mérite. Voici mes réflexions là-dessus.

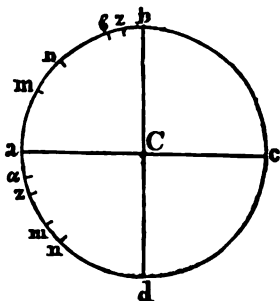
X.—On pourroit déduire le rapport moyen entre les forces δ et ζ du rapport des plus hautes marées, qui se font près des syzygies, et des plus petites marées aux quadratures. Car on voit par le VIII. §. Chap. V. que la hauteur de la plus grande marée doit être à celle de la plus petite marée, comme $\delta + \zeta$ est à $\delta - \zeta$. Mais les hauteurs des marées dans les ports, où l'on fait les observations, dépendent de tant de circonstances, qu'elles ne peuvent être tout-à-fait proportionnelles aux hauteurs des marées dans la mer libre; et c'est ce qui fait, qu'on trouve le rapport moyen entre les plus grandes et les plus petites marées, assez différent dans différents ports.

M. Newton, qui a suivi cette méthode, rapporte une observation faite par Sturm au-dessous de Bristol, où cet auteur a trouvé que les hauteurs de la plus grande et de la plus petite marée, ont été, comme 9 à 5, d'où il faudroit conclure, que $\delta = 3\frac{1}{2} \times \zeta$. Cette observation est bien éloignée de celle que j'ai reçue dernièrement faite à Saint Malo par M. Thouroud. La voici: " Dans les grandissimes marées, la mer s'élève de 50 pieds en " plomb au-dessus du bas de l'eau: dans les marées bâtarde, elle ne dif- " fère que de quinze pieds." Si j'ai bien compris cette observation, la plus grande marée étoit à la plus petite, comme 50 à 15, ou comme 10 à 3; ce qui donneroit $\delta = 7 \times \zeta$. Ces deux resultans sont bien différens: il est vrai, que le rapport de δ à ζ est variable, mais cette variation ne sçauroit aller si loin; si la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\zeta}$ est $= m$, la plus grande valeur de $\frac{\delta}{\zeta}$ sera environ $= \frac{3}{2} m$.

Il y a une autre réflexion à faire sur cette méthode de trouver le

rapport entre les forces des deux luminaires : c'est que les marées font une espece d'oscillations, qui se ressentent toujours des oscillations précédentes : cette raison fait que les variations des marées, ne sçauroient être aussi grandes qu'elles devroient être, suivant les loix hydrostatiques.

Concevons un pendule attaché à une horloge animée successivement par des poids différens : on sçait, que plus ces poids sont grands, plus les oscillations du pendule deviennent grandes : mais en changeant les poids, les premieres oscillations ne prendront pas d'abord leur grandeur naturelle ; elles ne s'en approchent que peu à peu. Il n'en est pas de même des durées des oscillations, lorsque le pendule est successivement animé par différentes pesanteurs.



Considérons d'abord un pendule simple animé par la pesanteur ordinaire, et qui fasse ses oscillations dans deux secondes de tems, et supposons ensuite la pesanteur devenir tout d'un coup quatre fois plus grande ; je dis que la premiere oscillation, qui suivra ce changement, se fera de même que toutes les autres suivantes dans une seconde de tems.

Cette considération me porte à croire, que les observations sur les durées et sur les intervalles des marées sont plus sûres pour notre dessein, que les hauteurs des marées : si cette réflexion est bien fondée, on pourroit faire attention aux méthodes suivantes, pour trouver le rapport moyen entre δ et ζ .

1°. Il faudroit pendant plusieurs mois observer, quel est le plus petit intervalle de deux marées. Nous avons dit au VI. §. que l'intervalle moyen est d'un jour moyen lunaire, que je suppose de 24 heures 50 minutes : mais il sera moindre dans les syzygies, quoique plus grand qu'un jour solaire, ou de 24 heures : supposons ce plus petit intervalle de 24 heures, et d'autant de minutes, qu'il y a d'unités dans N ; et il faudra prendre dans la figure ci-dessus un arc horaire b c de 50 minutes de tems : de cet arc b c, il faut prendre une partie c z, qui réponde à (50 — N) minutes. Or par la IV. remarque du VII. §. l'arc c z est à l'arc b c, comme $\frac{\zeta + \delta}{\zeta} \times m$ est à m : d'où nous tirons cette analogie,

$$50 - N : 50 :: \zeta : \zeta + \delta.$$

et cette analogie donne

$$\delta = \frac{N}{50 - N} \times \zeta.$$

Soit N égal à 35 (c'est ainsi qu'on l'observe à peu près dans les marées régulières) et on aura $\delta = \frac{5}{17} \zeta$.

2°. On pourroit aussi faire attention aux plus grands intervalles, si ce plus grand intervalle (qui se fait ordinairement après les quadratures) étoit de 24 heures et d'autant de minutes, qu'il y a d'unités en M . On trouve par la même méthode, que nous venons d'indiquer, et par la V. remarque

$$\text{du VII. §. } \delta = \frac{M}{M - 50} \times \zeta.$$

Soit $M = 85$ minutes (c'est à peu près la valeur que l'on observe) et on trouvera

$$\delta = \frac{8}{17} \times \zeta.$$

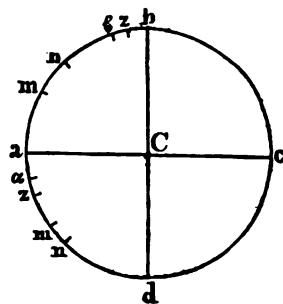
Voilà les deux méthodes, que je crois les plus exactes ; et la première doit l'emporter sur la seconde, parce que les marées sont plus irrégulières après les quadratures, qu'après les syzygies. Il y a encore plusieurs autres méthodes pareilles à celles que je viens d'exposer, et dont j'ai fait en partie le calcul ; mais comme je ne suis pas assez content des observations, sur lesquelles ces méthodes sont fondées, je ne les mettrai pas ici. Je me contenterai de dire, qu'après tous les examens que j'ai faits, j'ai trouvé, que pour accorder, autant qu'il est possible, toutes les observations qui déterminent le rapport entre δ et ζ , il faut supposer la valeur moyenne de $\frac{\delta}{\zeta} = \frac{1}{2}$; la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\zeta} = 2$, et sa plus grande valeur = 3. C'est donc sur ces suppositions que nous raisonnerons et calculerons dans la suite ; et comme nous ne considérons encore toutes les circonstances variables, que dans leur état moyen, nous ferons dans tout le reste de ce Chapitre $\frac{\delta}{\zeta} = \frac{1}{2}$.

M. Newton suppose $\frac{\delta}{\zeta}$ environ = 4 : mais j'ai déjà dit, pourquoi sa méthode doit indiquer la valeur de $\frac{\delta}{\zeta}$ plus grande qu'elle n'est : la raison en est, que si les marées n'avoient point d'influences les unes sur les autres, comme elles ont, les plus grandes marées différeroient davantage des plus petites, et par là on trouveroit la valeur de $\frac{\delta}{\zeta}$ plus petite.

Avant que de finir cette digression sur le rapport entre la force de la Lune, et celle du Soleil, et d'en faire l'application à notre sujet, je ferai ici une réflexion sur les forces absolues de la Lune et du Soleil. Nous avons fait voir aux §. VIII. et XV. du Chap. IV. que dans l'hypothèse

rapport entre les forces des deux luminaires : c'est que les marées font une espece d'oscillations, qui se ressentent toujours des oscillations précédentes : cette raison fait que les variations des marées, ne sauroient être aussi grandes qu'elles devroient être, suivant les loix hydrostatiques.

Concevons un pendule attaché à une horloge animée successivement par des poids différens : on sçait, que plus ces poids sont grands, plus les oscillations du pendule deviennent grandes : mais en changeant les poids, les premieres oscillations ne prendront pas d'abord leur grandeur naturelle ; elles ne s'en approchent que peu à peu. Il n'en est pas de même des durées des oscillations, lorsque le pendule est successivement animé par différentes pesanteurs.



Considérons d'abord un pendule simple animé par la pesanteur ordinaire, et qui fasse ses oscillations dans deux secondes de tems, et supposons ensuite la pesanteur devenir tout d'un coup quatre fois plus grande ; je dis que la premiere oscillation, qui suivra ce changement, se fera de même que toutes les autres suivantes dans une seconde de tems.

Cette considération me porte à croire, que les observations sur les durées et sur les intervalles des marées sont plus sûres pour notre dessein, que les hauteurs des marées : si cette réflexion est bien fondée, on pourroit faire attention aux méthodes suivantes, pour trouver le rapport moyen entre δ et ζ .

1°. Il faudroit pendant plusieurs mois observer, quel est le plus petit intervalle de deux marées. Nous avons dit au VI. §. que l'intervalle moyen est d'un jour moyen lunaire, que je suppose de 24 heures 50 minutes : mais il sera moindre dans les syzygies, quoique plus grand qu'un jour solaire, ou de 24 heures : supposons ce plus petit intervalle de 24 heures, et d'autant de minutes, qu'il y a d'unités dans N ; et il faudra prendre dans la figure ci-dessus un arc horaire $b\zeta$ de 50 minutes de tems : de cet arc $b\zeta$, il faut prendre une partie ζz , qui réponde à $(50 - N)$ minutes. Or par la IV. remarque du VII. §. l'arc ζz est à l'arc $b\zeta$, comme $\frac{\zeta + \delta}{\zeta} \times m$ est à m : d'où nous tirons cette analogie,

$$50 - N : 50 :: \zeta : \zeta + \delta.$$

et cette analogie donne

$$\delta = \frac{N}{50 - N} \times \zeta.$$

Soit Négal à 35 (c'est ainsi qu'on l'observe à peu près dans les marées régulières) et on aura $\delta = \frac{3}{4}\frac{5}{3} \text{ c.}$

2^o. On pourroit aussi faire attention aux plus grands intervalles, si ce plus grand intervalle (qui se fait ordinairement après les quadratures) étoit de 24 heures et d'autant de minutes, qu'il y a d'unités en M. On trouve par la même méthode, que nous venons d'indiquer, et par la V. remarque du VII. §. $\delta = \frac{M}{M-50} \times \text{c.}$

Soit M = 85 minutes (c'est à peu près la valeur que l'on observe) et on trouvera

$$\delta = \frac{85}{35} \times \text{c.}$$

Voilà les deux méthodes, que je crois les plus exactes; et la première doit l'emporter sur la seconde, parce que les marées sont plus irrégulières après les quadratures, qu'après les syzygies. Il y a encore plusieurs autres méthodes pareilles à celles que je viens d'exposer, et dont j'ai fait en partie le calcul; mais comme je ne suis pas assez content des observations, sur lesquelles ces méthodes sont fondées, je ne les mettrai pas ici. Je me contenterai de dire, qu'après tous les examens que j'ai faits, j'ai trouvé, que pour accorder, autant qu'il est possible, toutes les observations qui déterminent le rapport entre δ et c, il faut supposer la valeur moyenne de $\frac{\delta}{\text{c}} = \frac{5}{2}$; la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\text{c}} = 2$, et sa plus grande valeur = 3. C'est donc sur ces suppositions que nous raisonnerons et calculerons dans la suite; et comme nous ne considérons encore toutes les circonstances variables, que dans leur état moyen, nous ferons dans tout le reste de ce Chapitre $\frac{\delta}{\text{c}} = \frac{5}{2}$.

M. Newton suppose $\frac{\delta}{\text{c}}$ environ = 4: mais j'ai déjà dit, pourquoi sa méthode doit indiquer la valeur de $\frac{\delta}{\text{c}}$ plus grande qu'elle n'est: la raison en est, que si les marées n'avoient point d'influences les unes sur les autres, comme elles ont, les plus grandes marées différeroient davantage des plus petites, et par là on trouveroit la valeur de $\frac{\delta}{\text{c}}$ plus petite.

Avant que de finir cette digression sur le rapport entre la force de la Lune, et celle du Soleil, et d'en faire l'application à notre sujet, je ferai ici une réflexion sur les forces absolues de la Lune et du Soleil. Nous avons fait voir aux §. VIII. et XV. du Chap. IV. que dans l'hypothèse

XVI.—Enfin nous remarquerons, que l'intervalle moyen de deux marées qui se suivent, lequel intervalle est de 24 heures lunaires, ou 24 heures 50 minutes, n'est pas également éloigné des syzygies et des quadratures; mais qu'il est beaucoup plus près des quadratures, que des syzygies: aussi pouvoit-on le prévoir facilement; car comme toutes les accélérations depuis le point b jusqu'au point m (qui est celui, dont il est question ici) doivent compenser tous les retardemens depuis le point m jusqu'au point a, et que les accélérations sont beaucoup plus petites que les retardemens, on voit d'abord, que le point m doit être plus près du point a, que du point b. Mais nous déterminerons exactement ce point m par le moyen de la premiere Remarque du VIII. §. où nous avons démontré que le sinus de l'arc m b est $= \sqrt{\frac{c + \delta}{2 \delta}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = 0,3166$

lequel sinus répond à un arc de $56^{\text{d}}. 47^{\text{m}}$. L'arc m b étant donc de $56^{\text{d}}. 47^{\text{m}}$., l'arc m a sera de $33^{\text{d}}. 13^{\text{m}}$., et les deux arcs m b et m a sont comme 3407 à 1993.

L'arc n b étant toujours de 45 degrés (par la III. Remarque du VIII. §.) nous avons l'arc m n = $11^{\text{d}}. 47^{\text{m}}$.; et cet arc m n marque le plus grand intervalle possible entre le passage de la Lune par le méridien, et la haute marée. Cet intervalle est donc de 47 minutes de tems: le passage de la Lune par le méridien suivra la haute marée depuis les syzygies jusqu'aux quadratures, et la précédera depuis les quadratures jusqu'aux syzygies. Mais le plus grand intervalle de l'un à l'autre (qui se fait environ $2\frac{1}{4}$ jours avant et après les quadratures) ne surpasse jamais 47 minutes de tems.

XVII.—Toutes ces Propositions depuis le XI. §. jusqu'ici, nous donnent une idée claire des heures des hautes marées, et de toutes leurs variations pour chaque âge de la Lune. Car, quoi-que nos démonstrations soient fort hypothétiques, elles n'en méritent pas moins d'attention; je ferai voir dans le Chapitre suivant, comment on peut donner des corrections assez justes à l'égard de toutes les hypotheses que j'ai exposées au XIX. §. du Chap. IV. Mais pour donner toute la perfection qui est possible, à cette matiere, je montrerai plus précisément, comment on peut trouver l'intervalle entre le passage de la Lune par le méridien, et la haute marée, pour tout arc donné entre les deux luminaires; après quoi je donnerai une table, que j'ai pris la peine de calculer de dix en dix degrés. Il sera facile après cela moyennant les éphémérides et des interpolations, de déterminer l'heure des marées généralement.

que dans les syzygies ; et c'est aussi ce que l'on observe : mais ce n'est pas la seule raison.

XIII.—Les marées répondront précisément au passage de la Lune par le méridien, tant dans les quadratures, que dans les syzygies, si celles-ci se font aussi au moment du passage de la Lune par le méridien. Mais si les quadratures et les syzygies ne se font pas dans le moment du passage de la Lune par le méridien, il faut des corrections. Dans les syzygies, il faut une correction de 15 minutes pour un jour entier en vertu du XI. §. et par conséquent $\frac{1}{2}$ de minutes par heure, que la haute marée avancera sur le passage de la Lune par le méridien, si les syzygies se font avant ce même passage ; et que la haute marée retardera sur le passage de la Lune par le méridien, si les syzygies se font après ce passage. Dans les quadratures il faut une correction de 35 minutes par jour, en vertu du §. XII. c'est à-dire, environ une minute et demie par heure, que la haute marée retardera sur le passage de la Lune par le méridien, si les quadratures se font avant le dit passage ; et qu'elle avancera, si les quadratures se font après le passage de la Lune par le méridien. Car près des points b et a, les arcs ζz et αz peuvent être censés proportionnels aux arcs b ζ et a α .

XIV.—Si au lieu de rapporter les hautes marées aux jours lunaires, on vouloit considérer les jours solaires, on voit bien qu'il faut dire, que les hautes marées, au lieu de primer de 15 minutes dans les syzygies, retardent de 35 minutes dans un jour, ou d'environ une minute et demie par heure ; et qu'elles retardent de 85 minutes par jour dans les quadratures, ce qui fait environ trois minutes et demie par heure : de là nous tirerons cette règle pour les syzygies.

Il faut ajouter à l'heure moyenne de la marée dans les syzygies une minute et demie par chaque heure, que les syzygies auront devancé la dite heure moyenne, et en retrancher une minute et demie par chaque heure, que les syzygies retarderont sur la même heure moyenne.

Et pour les quadratures nous aurons la règle suivante :

Il faut ajouter, ou retrancher, dans les quadratures de l'heure moyenne de la marée, trois minutes et demie par chaque heure, que les quadratures avanceront ou retarderont sur la même heure moyenne.

XV.—M. Cassini, dont les remarques ingénieuses sur les marées m'ont servi de guide dans mes recherches, a donné par induction des règles pareilles, avec cette différence que dans les syzygies, il a mis deux minutes par heure, au lieu d'une minute et demie ; et deux minutes et demie dans les quadratures, au lieu de trois minutes et demie.

XVI.—Enfin nous remarquerons, que l'intervalle moyen de deux marées qui se suivent, lequel intervalle est de 24 heures lunaires, ou 24 heures 50 minutes, n'est pas également éloigné des syzygies et des quadratures; mais qu'il est beaucoup plus près des quadratures, que des syzygies: aussi pouvoit-on le prévoir facilement; car comme toutes les accélérations depuis le point b jusqu'au point m (qui est celui, dont il est question ici) doivent compenser tous les retardemens depuis le point m jusqu'au point a, et que les accélérations sont beaucoup plus petites que les retardemens, on voit d'abord, que le point m doit être plus près du point a, que du point b. Mais nous déterminerons exactement ce point m par le moyen de la premiere Remarque du VIII. §. où nous avons démontré que le sinus de l'arc m b est $= \sqrt{\frac{c + \delta}{2\delta}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = 0,3166$

lequel sinus répond à un arc de $56^{\text{d}}. 47^{\text{m}}$. L'arc m b étant donc de $56^{\text{d}}. 47^{\text{m}}$., l'arc m a sera de $33^{\text{d}}. 13^{\text{m}}$., et les deux arcs m b et m a sont comme 3407 à 1993.

L'arc n b étant toujours de 45 degrés (par la III. Remarque du VIII. §.) nous avons l'arc m n $= 11^{\text{d}}. 47^{\text{m}}$.; et cet arc m n marque le plus grand intervalle possible entre le passage de la Lune par le méridien, et la haute marée. Cet intervalle est donc de 47 minutes de tems: le passage de la Lune par le méridien suivra la haute marée depuis les syzygies jusqu'aux quadratures, et la précédera depuis les quadratures jusqu'aux syzygies. Mais le plus grand intervalle de l'un à l'autre (qui se fait environ $2\frac{1}{2}$ jours avant et après les quadratures) ne surpasse jamais 47 minutes de tems.

XVII.—Toutes ces Propositions depuis le XI. §. jusqu'ici, nous donnent une idée claire des heures des hautes marées, et de toutes leurs variations pour chaque âge de la Lune. Car, quoi-que nos démonstrations soient fort hypothétiques, elles n'en méritent pas moins d'attention; je ferai voir dans le Chapitre suivant, comment on peut donner des corrections assez justes à l'égard de toutes les hypotheses que j'ai exposées au XIX. §. du Chap. IV. Mais pour donner toute la perfection qui est possible, à cette matiere, je montrerai plus précisément, comment on peut trouver l'intervalle entre le passage de la Lune par le méridien, et la haute marée, pour tout arc donné entre les deux luminaires; après quoi je donnerai une table, que j'ai pris la peine de calculer de dix en dix degrés. Il sera facile après cela moyennant les ephemerides et des interpolations, de déterminer l'heure des marées généralement.

XVIII.—Soit donc encore le Soleil en b ; la Lune dans un point quelconque m : la haute marée en n . Soit le sinus de l'arc $mb = m$: le sinus total = 1, le cosinus de l'arc $mb = n$: qu'on fasse (§. XIII. Chap. V.).

$$B = \frac{-\delta b b}{c m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{4 m m - 7}{2 m n}:$$

on aura le sinus de l'arc mn (qui est l'arc horaire entre le passage de la Lune par le méridien et la haute marée)

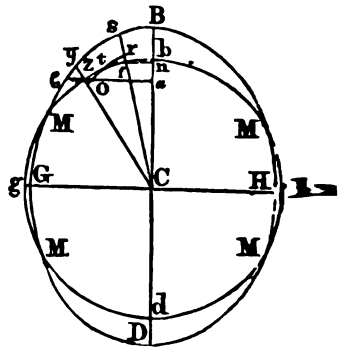
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}.$$

Si l'on change cette quantité radicale en suites, en faisant attention que B est toujours un nombre négatif beaucoup plus grand que l'unité, on verra qu'on peut, sans aucune erreur sensible, supposer le sinus de l'arc horaire $mn = \frac{1}{B} - \frac{3}{2B^2}$, et même simplement $= \frac{1}{B}$ près des syzygies et des quadratures. Voici à présent la table dont je viens de parler.

La *première* colonne marque de dix en dix degrés l'angle compris entre les deux luminaires vus du centre de la Terre environ l'heure de la marée: la *seconde* marque le nombre de minutes, qu'il faut retrancher depuis les syzygies jusqu'aux quadratures, et ajouter depuis les quadratures jusqu'aux syzygies à l'heure du passage de la Lune par le méridien, pour trouver l'heure de la marée; et la *troisième* marque la vraie heure de la haute marée.

syzygies, et pour les marées bâtarde dans les quadratures. Mais avec tout cela, on ne doit pas la rejeter, plusieurs observations m'ayant fait voir, que moyennant cette correction, le cours des marées répond assez bien à la théorie. Il faut donc sçavoir par un grand nombre d'observations pour chaque endroit l'heure moyenne des hautes mers dans les syzygies, et ajouter cette heure au tems marqué dans la seconde et troisième colonne de notre table : c'est cette heure moyenne des hautes mers dans les syzygies, que les mariniers appellent *heures du port* : elles varient extrêmement dans les différens ports, comprenant tout le tems et durée d'une marée.

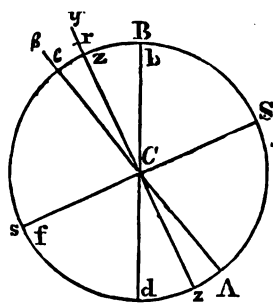
III.—Ce retard de l'heure moyenne des pleines mers dans les syzygies, à l'égard du midi, s'observe aussi dans la mer libre, ou plutôt dans les isles qui sont en pleine mer : mais il n'est pas si grand, et vient d'une autre cause, sçavoir de l'inertie des eaux, qui les empêche d'obéir assez promptement, à cause de la vitesse du mouvement journalier de la Terre. On peut appliquer ici tout le raisonnement que nous avons fait au VI. §. du Chap. III. pour expliquer la nutation de la Lune en longitude : on pourroit douter, si cette raison doit faire avancer ou retarder les marées : supposons donc, pour nous en éclaircir, que, tant les luminaires, que la haute marée, répondent à un même point dans cette figure : comme le mouvement des luminaires n'est pas sensible, par rapport au mouvement journalier de la Terre, nous les considérerons comme demeurant dans la ligne $d b$: l'équateur de la Terre changera sa figure naturelle $b g d h$ en $B G D H$; et cette figure $B G D H$ tournant autour du centre C de B vers G , le sommet B viendra quelque tems après en y : cela étant, si les eaux pouvoient se composer dans un instant dans un état d'équilibre, l'élevation $B b$ devrait se changer en $y z$, et la force qui devrait produire ce changement, seroit exprimée par $B b - y z$: mais cette force étant infiniment petite, si l'angle $B C y$



est infiniment petit, elle ne sçauroit produire tout son effet. On voit par-là, qu'il faut supposer l'angle $B C y$ d'une grandeur considérable, considérer ensuite le sommet B comme transporté en y , afin que la différence des pressions soit assez grande, pour conserver le sommet des eaux au point y , malgré la rotation du globe. Le vrai sommet étant do en y , l'angle $B C y$ sera l'angle horaire, qui marquera les retarde-

réels des hautes marées sur le passage de la Lune par le méridien. Là-dessus nous pourrions faire les remarques qui suivent.

1°. Si les luminaires ne sont pas en conjonction, et que le Soleil soit en *b*, et la Lune en *c*, on pourra considérer la chose, comme si les luminaires étoient en conjonction, mais dans la ligne *Cz*, déterminée de position au VIII. §. du Chap. V. et augmenter toujours l'angle *b Cz* de l'angle *BCy*, dont nous venons de parler : d'où il paroît que l'angle horaire *BCy* doit toujours être ajouté au tems marqué dans la troisième colonne de notre précédente table : car la hauteur des marées ne paroît pas devoir changer la chose, puisque les changemens de pression pour un petit tems donné, sont proportionnels aux baissemens des eaux, qui doivent se faire pour conserver le sommet des eaux dans un même point *y*.



2°. Si le mouvement journalier de la Terre étoit infiniment lent, l'angle *BCy* seroit nul : mais il doit être plus grand, d'autant qu'on suppose le mouvement journalier plus grand et plus prompt ; et la différence des hauteurs entre les hautes et basses marées, doit diminuer à proportion.

3°. Si la vitesse du mouvement journalier étoit comme infinie, la pleine mer répondroit presque au point *G* ; mais aussi la différence des hautes et basses mers seroit comme nulle. Il me semble après avoir bien considéré la chose, que les hauteurs des marées dans les syzygies doivent être censées proportionnelles aux sinus des angles *GCy* dans la mer libre, et que si la hauteur *Bb* sans le mouvement journalier de la Terre est = *c*, elle sera avec le mouvement journalier de la Terre $= \frac{C a}{C b} \times c$. Or, comme on a observé que dans la mer libre la haute marée suit environ de deux heures le midi dans les syzygies ; il faut supposer l'angle *BCy* de 30 degrés, et les forces absolues des luminaires doivent être supposées plus grandes en raison de $\sqrt{3}$ à *z* pour élever les eaux, autant qu'elles le seroient sans le mouvement journalier de la Terre.

IV.—Nous avons encore fait voir, que sans le concours des causes secondes, les plus grandes marées devroient se faire dans les syzygies, et les plus petites dans les quadratures. Cependant on a observé, que les

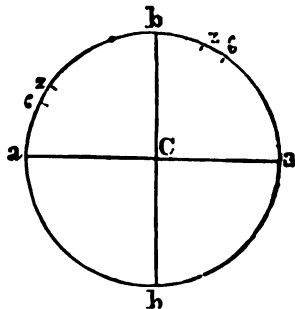
unes et les autres se font un ou deux jours plus tard. Ce retardement est encore produit, si non pour le tout, au moins en partie, par l'inertie des eaux, qui doivent être mises en mouvement, et qui ne sçauroient obéir assez promptement aux forces qui les sollicitent, pour leur faire suivre les loix que ces forces demanderoient. Il y a peut-être encore une autre cause, et M. Cassini me paroît le soupçonner de même, quoi qu'il ne se serve pas de nos principes, la voici : c'est qu'il se pourroit bien que cette cause, qui nous est encore si cachée, et qui donne une tendance mutuelle aux corps flottans et composans le système du monde, que cette cause, dis-je, ne se communiquât pas dans un instant d'un corps à l'autre, non plus que la lumière. S'il y avoit, par exemple, un torrent central de matière subtile, et d'une étendue infinie, vers le centre de la Terre, et un semblable vers le centre de la Lune, ces deux torrens pourroient produire la gravitation mutuelle de ces deux corps, et la vitesse du premier pourroit être telle, qu'il fallût un ou deux jours à la matière, pour parvenir depuis la Lune jusqu'à la Terre : en ce cas on voit bien que l'effet de la force lunaire sur notre océan, seroit le même, qu'il auroit été un ou deux jours auparavant dans la supposition que la gravitation se communique dans un instant. Quoi qu'il en soit, comme ce retardement a été observé le même à peu-près après les syzygies et après les quadratures, nous pouvons encore supposer, qu'il est le même, pendant toute la révolution de la Lune, c'est-à-dire, que les marées sont toujours telles, qu'elles devroient être, sans les dites causes, un ou deux jours auparavant.

Au reste je n'ai mis ici ce que je viens de dire sur la cause qui pourroit produire la gravitation mutuelle des corps du système du monde (gravitation, qu'il n'est plus permis de révoquer en doute) que comme un exemple : je ne prétens pas expliquer ce phénomène, j'avoue même qu'il m'est encore tout-à-fait incompréhensible : je ne crois pas non plus que l'Académie en ait voulu demander une explication ; je souhaiterois donc qu'on remarquât que ceux qui voudroient se servir d'autres principes, pour expliquer le flux et reflux de la mer, ne le feroient qu'en apparence, et que tout ce qu'ils pourroient alleguer ne seroient que des efforts d'expliquer mécaniquement la gravitation ou l'attraction mutuelle du Soleil, de la Lune et de la Terre, sans disconvenir pour cela de nos principes au fond, lesquels sont sûrs, et doivent être considérés comme des faits avérés par l'expérience.

V.—Je profiterai de cette occasion, pour parler d'un des principaux phénomènes, et pour répondre à une objection, qu'on pourroit nous faire

dans les quadratures : l'arc $b a$ est de 90 degrés ; le petit arc $a \alpha$ est d'environ 3 degrés, et l'arc αz^1 de 2 degrés ; et par conséquent l'arc $b a z^1$ de 95 degrés, qui donne un tems de 6 heures 20 minutes, qui devroit être *in abstracto* l'heure moyenne de la haute mer dans les quadratures, pendant que celle des syzygies est à midi. D'où vient donc, me demandera-t-on, que, suivant les observations, on ne trouve que 5 heures 12 minutes à la place de 6 heures 20 minutes. Je répons que c'est cette même anticipation des syzygies et des quadratures à l'égard des plus grandes et des plus petites marées, dont nous avons parlé dans le précédent article, qui en est la cause. Il est si vrai, que c'est ici la véritable raison, que la quantité de cette anticipation répond parfaitement bien à l'intervalle des heures moyennes des hautes mers pour les syzygies et les quadratures. Nous en pourrons même déterminer plus exactement la dite anticipation, sur laquelle on est encore bien divisé, les uns la faisant d'un jour, d'autres de deux, pendant qu'on a déterminé assez exactement, et d'un commun accord l'autre point.

Prenons d'abord le terme de deux jours, comme le plus généralement adopté, en considérant que les marées se reglent après les luminaires, tels qu'ils ont été deux jours auparavant : imaginons nous les syzygies se faire en b et les quadratures en b et a : l'effet des luminaires sera, en vertu de notre supposition, dans le tems des syzygies, comme si le Soleil étoit en b , et la Lune en c , en prenant l'arc $b c$ d'environ $25\frac{1}{4}$ degrés ; et le même effet dans les quadratures sera comme si le Soleil étant en b , la Lune se trouvoit en c^1 environ $64\frac{3}{4}$ degrés ; dans les syzygies, la haute mer répond au point z , et dans les quadratures au point z^1 . C'est donc l'arc $z b z^1$ qui exprime l'arc horaire entre l'heure moyenne de la haute mer des syzygies et celle des quadratures (substituant toutefois des heures lunaires à la place des heures ordinaires, à cause du mouvement de la Lune). Or la table mise à la fin du précédent Chapitre, fait voir par le moyen des interpolations, que la Lune étant avant les syzygies à $25\frac{1}{4}$ degrés du Soleil, l'heure de la haute mer est à 10 heures 46 minutes du matin ; et que la Lune étant après les syzygies à $64\frac{3}{4}$ degrés du Soleil, la haute mer se fait à 3 heures 35 minutes du soir : l'intervalle est donc de 4 heures 49 minutes, tems lunaire, ou d'environ 5 heures, tems ordinaire. Ce resultat



répond déjà assez bien à l'observation, qui le donne de 5 heures 12 minutes.

Mais si au lieu de deux jours on prend $\frac{3}{2}$ jours, ou environ 59 heures, qui répond à-peu-près à 20 degrés de distance de la Lune depuis les syzygies et les quadratures, l'heure moyenne de la haute mer le jour des syzygies, sera en vertu de la table, à 11 heures 2 minutes du matin, et le jour des quadratures, à 3 heures 59 $\frac{1}{2}$ minutes du soir; et l'intervalle de l'une à l'autre sera de 4 heures 57 $\frac{1}{2}$ minutes tems lunaire; qui fait à-peu-près 5 heures 8 minutes. Et enfin on trouve une conformité exacte entre les deux points en question, en donnant un jour et demi au retardement des marées, c'est-à-dire, en supposant que l'état des marées est tel qu'il devroit être naturellement, un jour et demi plutôt: c'est alors que l'intervalle de l'heure moyenne de la pleine mer aux syzygies à heures pareilles aux quadratures, devient de 5 heures 12 minutes, tel qu'un grand nombre d'observations l'a donné: aussi ce terme d'un jour et demi, est-ce celui qui est le plus conforme aux observations, et en consultant les tables qui sont dans les Memoires de l'Académie de l'année 1710. pag. 330. et 332. et prenant la différence moyenne, on trouve fort à-peu-près la même valeur. Toutes ces circonstances, l'explication naturelle de ce phénomène, sa conformité avec toutes les observations faites jusqu'ici, et son usage pour déterminer au juste un des points des plus essentiels, qu'on n'a connu encore que par tâtonnement, font bien voir la justesse et la supériorité de nos méthodes. *

VI.—Les autres corrections que l'on doit apporter aux formules et à la table du précédent Chapitre, regardent l'hypothese que nous avons faite, pour rendre d'abord la question et les calculs plus faciles; sçavoir *que les deux luminaires font des cercles parfaits autour de la Terre, et cela dans le plan de l'équateur.* Cette supposition entraîne celle d'une égalité parfaite dans les distances des luminaires à la Terre, aussi-bien que dans leur mouvement, et elle fait outre cela leur déclinaison, à l'égard de l'équateur, nulle. Voyons donc à présent ce que les différentes distances, l'inégalité des vitesses et l'obliquité des orbites peuvent faire sur l'heure des marées.

VII.—Les différentes distances des deux luminaires à l'égard de la Terre changent le rapport de leurs forces sur la mer; et c'est cependant de ce rapport que dépendent presque toutes les Propositions du précédent

* Je vois après avoir fini cette piece, que M. Cassini a déjà indiqué ce que nôtre remarque contient de physique. Voy. les Mem. de l'Ac. des Sc. de 1714. p. 252.

Chapitre. Nous avons supposé ce rapport pour les distances moyennes de la Lune et du Soleil, comme 5 à 2, fondés sur un grand nombre d'observations, qui doivent nous confirmer dans cette supposition, à l'égard des variations des distances, après avoir remarqué et démontré la Proposition qui suit :

Les forces de chaque lumineaire sur la mer sont en raison reciproque triplée de leurs distances à la Terre.

En voici la démonstration. Nous avons dit et démontré au Chapitre quatrième, que la force de chaque lumineaire est généralement $= \frac{n g b}{G a} \times b$

en entendant par n un nombre constant par $\frac{G}{g}$ le rapport de la pesanteur dans la région de la Terre vers le lumineaire à la pesanteur qui se fait vers le centre de la Terre, et par $\frac{b}{a}$ le rapport du rayon de la Terre b à la distance du lumineaire a : or comme les différentes distances ne changent que les quantités G et a , nous voyons que la force de chaque lumineaire est constamment proportionnelle à $\frac{G}{a}$, et la quantité g , qui exprime la pe-

santeur vers le centre du lumineaire, étant reciproquement proportionnelle aux quarrés des distances a , il s'ensuit que les forces de chaque lumineaire sur la mer, sont en raison reciproque triplée de leurs distances à la Terre.

M. Newton a déjà démontré cette Proposition, qui se confirme aussi par toutes les observations faites sur les marées, quand on en fait une juste estime, et une application bien ménagée. La Proposition que nous venons de démontrer, nous enseigne qu'à la place de notre equation fondamentale $\delta = \frac{5}{2} \epsilon$, employée dans le Chapitre précédent, il faut se servir de celle-ci plus générale

$$\delta = \frac{5}{2} \times \frac{l^3}{L^3} \times \frac{S^3}{s^3} \times \epsilon.$$

en dénotant par l et s les distances moyennes de la Lune et du Soleil à la Terre, et par L et S leurs distances données quelconques ; et là-dessus on pourra calculer toutes les questions traitées-ci-dessus pour des distances quelconques entre les luminaires et la Terre : mais nous ne considérerons que deux cas, 1°. Lorsque la Lune étant dans son périgée, et la Terre dans son aphelie, le rapport de δ à ϵ devient le plus grand ; et 2°. Lorsque la Lune étant au contraire dans son apogée, et la Terre dans son perihelie, le rapport de δ à ϵ devient le plus petit. Nous don-

nerons 1000 parties à la distance moyenne de la Lune, 1055 à sa plus grande distance, et 945 à sa plus petite distance; et pour le Soleil, nous poserons les pareilles distances être en raison de 1000, 1027 et 983; et nous aurons pour le *premier* cas $\delta = 3,115$ c; et dans le *second* cas $\delta = 2,022$ c.

Comme il ne s'agit ici que des petites corrections, nous supposerons, simplement pour le premier cas $\delta = 3$ c, et pour le second $\delta = 2$ c; et afin que nos règles soient d'autant plus faciles dans l'application, nous n'aurons point d'égard aux variations du Soleil, comme n'étant presque d'aucune importance par rapport à celles de la Lune. Disons donc simplement, que dans le perigée de la Lune, il faut mettre $\delta = 3$ c, et dans l'apogée $\delta = 2$ c. Cela étant, voici les conséquences que nous en tirons.

1°. Un jour et demi après les syzygies, l'intervalle de deux marées qui se suivent, est dans le perigée de 24 heures 27½ minutes; et dans l'apogée de 24 heures 33 minutes.

2°. Un jour et demi après les quadratures, le même intervalle est dans le perigée de 25 heures 15 minutes; et dans l'apogée de 25 heures 40 minutes. Voyez à l'égard de ces deux Propositions le §. VII. du Chap. VI.

3°. Le plus grand intervalle entre le passage de la Lune par le méridien et la haute mer (que nous avons vû au XVI. §. du Chap. VI. devoir se faire environ 2½ jours avant et après les quadratures, sans nos corrections, mais qui sera réellement environ 1½ jours avant, et 4½ après les quadratures) est de 39 minutes environ le perigée de la Lune, et d'une heure environ son apogée. Ce plus grand intervalle se fait aussi plutôt dans le perigée, et plus tard dans l'apogée; la différence est d'environ un demi jour.

4°. Pour calculer la table pareille à celle de ci-dessus, mais qui serve pour le perigée et pour l'apogée de la Lune, nous remarquerons que les sinus des petits arcs horaires, qui marquent les intervalles entre le passage de la Lune et la haute mer sont toujours

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}$$

et qu'à la place de cette quantité, on peut substituer la valeur fort approchante $\frac{1}{B} - \frac{3}{2B^3}$ (§. XVIII. Chap. VI.) et même qu'on peut négliger

ici, sans le moindre scrupule, le second terme, puisqu'il ne s'agit que de petites corrections. Nous considérerons donc ces petits arcs horaires, comme

reciproquement proportionnels aux quantités B, c'est-à-dire, aux quantités $-\frac{\delta b b}{c m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Et dans cette dernière quantité, nous pourrons encore rejeter sans peine les deux derniers termes pour notre present dessein, et dire par conséquent, que pour les différentes valeurs de $\frac{\delta}{c}$, tout le reste étant égal, les intervalles entre le passage de la Lune, et la haute marée sont reciproquement proportionnels aux valeurs de $\frac{\delta}{c}$, ou directement proportionnels aux valeurs de $\frac{c}{\delta}$. D'où il paroît que les nombres de

la seconde colonne de notre précédente table, doivent être multipliés par la fraction $\frac{1}{2}$ dans le perigée, et par $\frac{3}{4}$ dans l'apogée de la Lune, après quoi les nombres de la troisième colonne se déterminent comme dans la précédente table. Mais quant aux nombres de la première colonne, il faut les augmenter chacun d'environ 20 degrés, à cause du retard d'un jour et demi expliqué au long dans ce Chapitre, pendant lequel la Lune change de place à l'égard du Soleil d'environ 19 degrés, à la place desquels je mettrai un nombre rond de 20 degrés.

Voici donc à present une table corrigée à l'égard de toutes les circonstances exposées jusqu'ici. La première colonne marque la distance qui est entre le Soleil et la Lune, environ le tems de la haute mer, ou plutôt ici, environ le passage de la Lune par le méridien. Les trois colonnes suivantes marquent le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le méridien, et la haute mer pour le perigée, pour les distances moyennes et pour l'apogée de la Lune. Et les trois dernières marquent les heures absolues des hautes mers pour les perigées, les distances moyennes et les apogées de la Lune. Et pour se servir de cette table, il ne faudra plus qu'ajouter aux nombres des six dernières colonnes l'heure moyenne du port en vertu du III. §. La table n'a été calculée que de dix en dix degrés : les interpolations suppléeront avec assez de justesse à telle autre distance entre les deux luminaires, que les éphémérides indiqueront. La même méthode des interpolations peut aussi être employée, lorsque la Lune se trouve à une distance donnée de son apogée ou perigée.

TABLE PLUS GÉNÉRALE ET CORRIGÉE

Pour trouver l'heure des hautes Marées.

Distances entre les Lumi- naires au moment du passage de la Lune par le Mé- ridien.	Temps de la haute Mer avant et après le passage de la Lune par le Mé- ridien en minutes de temps.			Table approchant des heures de la haute Mer, dont on peut se servir au défaut des éphémérides, qui marquent le passage de la Lune par le Méridien.					
	Perigée de la Lune.	Distance moyenne de la Lune.	Apogée de la Lune.	Perigée de la Lune.	Distance moyenne de la Lune.	Apogée de la Lune.			
				H. M.	H. M.	H. M.			
0	18 après.	22 après.	27½ après.	0 18	0 22	0 27½			
10	9½ après.	11½ après.	14 après.	0 49½	0 51½	0 54			
20	0	0	0	1 20	1 20	1 20			
30	9½ avant.	11½ avant.	14 avant.	1 50½	1 48½	1 46			
40	18 avant.	22 avant.	27½ avant.	2 22	2 18	2 12½			
50	26 avant.	31½ avant.	39½ avant.	2 54	2 48½	2 40½			
60	33 avant.	40 avant.	50 avant.	3 27	3 20	3 10			
70	37½ avant.	45 avant.	56 avant.	4 2½	3 55	3 44			
80	38½ avant.	46½ avant.	58 avant.	4 41½	4 33½	4 22			
90	39½ avant.	40½ avant.	50½ avant.	5 26½	5 19½	5 9½			
100	21 avant.	25 avant.	31 avant.	6 19	6 15	6 9			
110	0	0	0	7 20	7 20	7 20			
120	21 après.	25 après.	31 après.	8 21	8 25	8 31			
130	33½ après.	40½ après.	50½ après.	9 13½	9 20½	9 30½			
140	38½ après.	46½ après.	58 après.	9 58½	10 6½	10 18			
150	37½ après.	45 après.	56 après.	10 37½	10 45	10 56			
160	33 après.	40 après.	50 après.	11 13	11 20	11 30			
170	26 après.	31½ après.	39½ après.	11 46	11 51½	11 59½			
180	18 après.	22 après.	27½ après.	0 18	0 22	0 27½			

reciproquement proportionnels aux quantités B, c'est-à-dire, aux quantités $-\frac{\delta b b}{c m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Et dans cette dernière quantité, nous pourrons encore rejeter sans peine les deux derniers termes pour notre present dessein, et dire par conséquent, que pour les différentes valeurs de $\frac{\delta}{c}$, tout le reste étant égal, les intervalles entre le passage de la Lune, et la haute marée sont reciproquement proportionnels aux valeurs de $\frac{\delta}{c}$, ou directement proportionnels aux valeurs de $\frac{c}{\delta}$. D'où il paroît que les nombres de

la seconde colonne de notre précédente table, doivent être multipliés par la fraction $\frac{1}{4}$ dans le perigée, et par $\frac{3}{4}$ dans l'apogée de la Lune, après quoi les nombres de la troisième colonne se déterminent comme dans la précédente table. Mais quant aux nombres de la première colonne, il faut les augmenter chacun d'environ 20 degrés, à cause du retard d'un jour et demi expliqué au long dans ce Chapitre, pendant lequel la Lune change de place à l'égard du Soleil d'environ 19 degrés, à la place desquels je mettrai un nombre rond de 20 degrés.

Voici donc à present une table corrigée à l'égard de toutes les circonstances exposées jusqu'ici. La première colonne marque la distance qui est entre le Soleil et la Lune, environ le tems de la haute mer, ou plutôt ici, environ le passage de la Lune par le méridien. Les trois colonnes suivantes marquent le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le méridien, et la haute mer pour le perigée, pour les distances moyennes et pour l'apogée de la Lune. Et les trois dernières marquent les heures absolues des hautes mers pour les perigées, les distances moyennes et les apogées de la Lune. Et pour se servir de cette table, il ne faudra plus qu'ajouter aux nombres des six dernières colonnes l'heure moyenne du port en vertu du III. §. La table n'a été calculée que de dix en dix degrés : les interpolations suppléeront avec assez de justesse à telle autre distance entre les deux luminaires, que les éphémérides indiqueront. La même méthode des interpolations peut aussi être employée, lorsque la Lune se trouve à une distance donnée de son apogée ou perigée.

TABLE PLUS GÉNÉRALE ET CORRIGÉE

Pour trouver l'heure des hautes Marées.

Distances entre les Lumi- naires au moment du passage de la Lune par le Mé- ridien.	Temps de la haute Mer avant et après le passage de la Lune par le Mé- ridien en minutes de temps.			Table approchant des heures de la haute Mer, dont on peut se servir au défaut des éphémérides, qui marquent le passage de la Lune par le Méridien.					
	Perigée de la Lune.	Distance moyenne de la Lune.	Apogée de la Lune.	Perigée de la Lune.	Distance moyenne de la Lune.	Apogée de la Lune.			
				H. M.	H. M.	H. M.			
0	18 après.	22 après.	27½ après.	0 18	0 22	0 27½			
10	9½ après.	11½ après.	14 après.	0 49½	0 51½	0 54			
20	0	0	0	1 20	1 20	1 20			
30	9½ avant.	11½ avant.	14 avant.	1 50½	1 48½	1 46			
40	18 avant.	22 avant.	27½ avant.	2 22	2 18	2 12½			
50	26 avant.	31½ avant.	39½ avant.	2 54	2 48½	2 40½			
60	33 avant.	40 avant.	50 avant.	3 27	3 20	3 10			
70	37½ avant.	45 avant.	56 avant.	4 2½	3 55	3 44			
80	38½ avant.	46½ avant.	58 avant.	4 41½	4 33½	4 22			
90	39½ avant.	40½ avant.	50½ avant.	5 26½	5 19½	5 9½			
100	21 avant.	25 avant.	31 avant.	6 19	6 15	6 9			
110	0	0	0	7 20	7 20	7 20			
120	21 après.	25 après.	31 après.	8 21	8 25	8 31			
130	33½ après.	40½ après.	50½ après.	9 13½	9 20½	9 30½			
140	38½ après.	46½ après.	58 après.	9 58½	10 6½	10 18			
150	37½ après.	45 après.	56 après.	10 37½	10 45	10 56			
160	33 après.	40 après.	50 après.	11 13	11 20	11 30			
170	26 après.	31½ après.	39½ après.	11 46	11 51½	11 59½			
180	18 après.	22 après.	27½ après.	0 18	0 22	0 27½			

Cette table suppose encore le plan des orbites de la Lune et du Soleil être le même que celui de l'équateur de la Terre, ce qu'il faut sur-tout remarquer à l'égard des trois dernières colonnes. Mais cette supposition n'a pas beaucoup d'influence sur les autres colonnes ; et les éphémérides, qui marquent le passage de la Lune par le méridien, suppléeront aux trois dernières.

VIII.—Après avoir exposé au long tout ce que les différentes distances des luminaires, et sur-tout de la Lune à la Terre, peuvent contribuer pour faire varier l'heure des marées, nous dirons aussi un mot sur l'inégalité du mouvement des luminaires.

Cette inégalité seroit d'une très-grande importance, s'il falloit construire une table pour les heures des marées, sans se rapporter aux tables et aux éphémérides : mais elle ne nous est d'aucune conséquence, puisque nous supposons l'heure du passage de la Lune par le méridien, aussi-bien que l'arc compris entre les deux luminaires, connus par les éphémérides. C'est la raison qui m'a engagé à rapporter l'heure des marées au passage de la Lune par le méridien, en donnant une table, qui marque, combien la première avance ou retarde sur l'autre.

IX.—Il nous reste à considérer les inclinaisons des orbites à l'égard de l'équateur : pour cet effet il faut concevoir un cercle qui passe par les centres du Soleil, de la Lune et de la Terre ; et c'est proprement ce cercle que doivent représenter toutes nos figures, que nous avons considérées jusqu'ici, comme représentant l'équateur de la Terre. On voit bien après cela, que tous les points resteront dans ce cercle aux mêmes endroits ; et que les arcs se conserveront tels, que nous les avons déterminés : mais les angles horaires formés sur l'équateur par ses arcs, en sont changés. On ne sauroit sans une théorie parfaite de la Lune déterminer au juste ces angles horaires, à cause de la variabilité de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'égard de l'équateur ; mais aussi ce changement n'est-il pas fort considérable, par rapport à l'arc horaire compris entre le passage de la Lune par le méridien, et le moment de la haute mer ; nous supposons, et nous pouvons le faire ici sans aucune erreur sensible, que les orbites de la Lune et du Soleil sont dans un même plan, ayant chacune une inclinaison avec l'équateur de $23^{\circ} 30''$. et nous considérerons là-dessus la Lune dans trois sortes de situation : 1^o. Lorsque sa déclinaison, à l'égard de l'équateur, est nulle ; et alors il faut multiplier les nombres de la seconde, troisième et quatrième colonnes de notre table par $\frac{28}{100}$, et ce qui proviendra marquera le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le méridien, et l'heure de la haute mer. 2^o. Lorsque la Lune se

trouve dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'équateur ; et alors il faut multiplier les dits nombres de notre table par $\frac{100}{98}$. Et enfin 3°. lorsque la Lune se trouve au milieu de ces deux situations ; auquel cas il faut se servir de notre table, sans y apporter aucun changement. Quant aux autres situations de la Lune en longitude, on peut se servir du principe de la proportionnalité de la différence des termes. Ces règles sont fondées sur la proportion qu'il y a entre les petits arcs de l'écliptique et de l'équateur, compris entre deux mêmes méridiens fort proches l'un de l'autre.

X.—Il suit de tout ce que nous venons de dire, que le plus grand intervalle possible entre le passage de la Lune par le méridien et la haute marée, est environ un jour avant les quadratures, et quatre jours après les quadratures, la Lune dans son apogée et dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'équateur de la Terre ; et que dans le concours de toutes ces circonstances, le dit plus grand intervalle peut aller jusqu'à 63 minutes de tems, que la haute marée avancera sur le passage de la Lune par le méridien un jour avant les quadratures, et qu'elle retardera quatre jours après les quadratures.

XI.—Voilà mes réflexions sur le tems des marées ; je me flatte qu'elles ont toute la précision qu'on peut esperer sur cette matière, du moins quant à la méthode. Toute l'incertitude qui y reste encore, est fondée sur le rapport moyen entre les forces de la Lune et du Soleil, que je crois pourtant avoir fort bien déterminé, puisque tous nos Théoremes conviennent si bien avec les observations. Un plus grand nombre d'observations nous donnera peut-être un jour plus de précision là-dessus. Il est vrai que nous n'avons déterminé l'heure et les intervalles des marées, que sous la ligne équinoctiale ; mais je ne crois pas que la latitude des lieux puisse changer sensiblement les intervalles des marées ; ainsi je n'ai pas jugé nécessaire d'en parler. La latitude des lieux a cependant beaucoup de liaison avec la hauteur des marées : c'est à quoi nous ferons attention dans la suite.

CHAPITRE VIII.

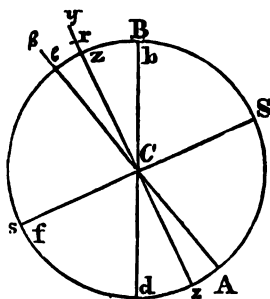
Sur les différentes hauteurs des Marées pour chaque jour de la Lune.

I.—**J** me propose à présent d'examiner les diversités des hauteurs des marées, non d'un endroit à l'autre, mais d'un même endroit, que nous supposerons d'abord pris sous l'équateur, pour toutes les diverses circonstances qui peuvent se rencontrer. Nous suivrons, pour cet effet, la même méthode que nous avons observée pour déterminer généralement l'heure des marées, c'est-à-dire, que nous commencerons nos recherches par les cas les plus simples, pour ne pas être arrêtés tout court en voulant surmonter trop de difficultés à la fois : nous nous servirons donc d'abord des mêmes hypothèses que nous avons employées dans le Chap. VI. et que nous avons exposées à la fin du Chap. IV. après quoi nous pousserons nos recherches dans le Chapitre suivant à tous les cas possibles, tout comme nous avons fait dans le Chapitre précédent pour déterminer généralement l'heure des marées.

II.—J'entens par la hauteur d'une marée toute la variation de la hauteur verticale des eaux, depuis la haute mer jusqu'à la basse mer suivante. Pour trouver cette hauteur, il faut d'abord faire attention aux §. XI. XII. et XIII. du Chap. V. qui déterminent l'équateur, les lieux de la Lune et du Soleil étant donnés, la position des deux points auxquels la mer est la plus haute et la plus basse; après quoi le VIII. Art. du même Chapitre donnera la hauteur cherchée, en cherchant premièrement la hauteur de la haute mer, et ensuite la hauteur de la basse mer.

III.—Remarquons d'abord, que les deux points de la circonférence, qui marquent la haute et la basse mer, sont éloignés entre eux de 90 degrés. On le voit par les expressions des §. XI. et XIII. et nous l'avons démontré dans la première Remarque du §. XII. Chap. V. Supposant donc le Soleil répondre au point b , la Lune au point c , et que la haute mer réponde au point z , il faut prendre l'arc $z s$ de 90 degrés, et le point s sera celui qui répond à la basse mer. Cherchez donc par le VIII. §. du Chap. V. la valeur de $y z$, qui marque l'élevation des eaux pour le point z ; et ensuite prenez de la même manière la valeur de $s x$, qui étant négative, marque la dépression des eaux; cela étant fait, on voit que la somme de $y z$ et de $s x$ marquera la hauteur de la marée, mais dans l'expression analytique de $s x$, il faut changer les signes. Il est vrai que cette méthode suppose

que pendant l'intervalle, depuis la haute mer jusqu'à la basse mer, la Lune ne change pas de place; et c'est à quoi on pourroit avoir égard, en augmentant d'environ trois degrés l'arc $b\epsilon$ dans le calcul de $s x$: mais ce seroit une exactitude hors de place, et qui augmenteroit beaucoup les peines du calcul, qui n'est déjà que trop embarrassé. On pourra même remédier à ce petit défaut, déjà insensible par sa nature, en prenant l'arc $b\epsilon$, tel qu'il est, non au moment de la haute marée, ni à celui de la basse mer, mais au milieu de leur intervalle; et c'est ce que nous supposerons dans la suite.



Soit donc comme dans le V. Chap. le sinus de l'arc $b\epsilon = m$; son cosinus $= n$; le sinus de l'angle $b C z = \sigma$; le sinus de l'angle $\epsilon C z = \rho$; le sinus total $= b$; et nous aurons en vertu du §. VIII. Chap. V.

$$y z = \frac{2 b b - 3 \sigma \sigma}{3 b b} \times \epsilon + \frac{2 b b - 3 \rho \rho}{3 b b} \times \delta.$$

De là on trouvera $s x$ en vertu du §. XII. Chap. V. en mettant $b b - \sigma \sigma$, et $b b - \rho \rho$ à la place de $\sigma \sigma$ et de $\rho \rho$: et de cette façon on aura

$$s x = \frac{3 \sigma \sigma - b b}{3 b b} \times \epsilon + \frac{3 \rho \rho - b b}{3 b b} \times \delta.$$

Changez à présent les signes dans la valeur de $s x$, et supposez la hauteur de la marée $= M$, et vous aurez

$$M = \frac{b b - 2 \sigma \sigma}{b b} \times \epsilon + \frac{b b - 2 \rho \rho}{b b} \times \delta.$$

Cette dernière expression marque généralement la hauteur des marées, puisqu'on peut toujours déterminer les valeurs de $\sigma \sigma$ et $\rho \rho$ par les §. XI. et XIII. du Chap. V. Mais les calculs ne laissent pas d'être assez pénibles, quoi-que les formules ne soient pas prolixes. Nous tâcherons donc de rendre ces calculs plus faciles, sans déroger beaucoup à l'exactitude des formules.

IV.—Voyons donc d'abord ce qui arriveroit, si la force lunaire étoit infiniment plus grande que la force solaire. On auroit en ce cas $\rho = 0$ et $\sigma = m$,

$$M = \epsilon + \delta - \frac{2 m m}{b b} \times \epsilon,$$

laquelle formule ne sçauroit manquer d'être assez approchante; elle donne même la juste valeur pour les syzygies et pour les quadratures.

V.—Pour déterminer les hauteurs des marées plus exactement encore, nous considérerons la valeur de ρ comme fort petite, au lieu de la supposer tout-à-fait nulle, comme nous l'avons fait dans l'Article précédent : mais nous pourrions supposer hardiment $\rho = \frac{c m n}{\delta}$, et on verra que cette

supposition ne sçauroit s'éloigner beaucoup de la vérité, si l'on consulte l'Article VII. du précédent Chapitre vers la fin, et le peu d'erreur qui pourroit s'y trouver n'est presque d'aucune conséquence pour notre présent sujet. On voit outre cela, que ρ étant fort petit, on peut supposer cette analogie

$$\rho : m - \sigma :: b : n;$$

puisque cette analogie seroit exactement vraie, si les quantités ρ et $m - \sigma$ étoient réellement et infiniment petites : de cette analogie on tire

$$\sigma = m - \frac{n\rho}{b} = m - \frac{m n n c}{b \delta};$$

substituant ces valeurs exposées pour les quantités ρ et σ , et faisant le sinus total $b = 1$, on obtient cette equation,

$$M = c + \delta - 2 m m c + \frac{2 m^2 n^2 c c}{\delta} - \frac{2 m^2 n^4 c^3}{\delta \delta}.$$

De cette maniere il paroît que les marées décroissent depuis les syzygies jusqu'aux quadratures, et qu'elles croissent avec la même loi depuis les quadratures jusqu'aux syzygies. Ceux qui voudront essayer la juste equation du §. III. et cette equation approchante, sur un même exemple, verront qu'elles ne different gueres.

VI.—Il nous sera facile à présent de calculer et de donner une table pour les hauteurs des marées, telle que nous en avons donné une à la fin du Chap. VI. pour les heures des marées, et pour laquelle nous tâcherons dans le Chapitre suivant de trouver les corrections nécessaires aux différentes circonstances, tout comme nous avons fait à l'égard de la dite table du VI. Chap. Nous supposerons encore le rapport moyen de δ à c être comme 5 à 2, tant que nous n'avons pas des observations qui puissent déterminer ce rapport au juste. Nous donnerons mille parties à la hauteur de la plus grande marée.

La première colonne marquera dans cette table de dix en dix degrés les arcs compris entre les deux luminaires, environ le milieu des jusan (§. III.) c'est-à-dire, environ trois heures après le passage de la Lune par le méridien ; la seconde colonne donnera les hauteurs cherchées des marées, pour les susdites hypotheses ; et la troisième en marquera les différences.

TABLE FONDAMENTALE

Pour trouver les Hauteurs des Marées, ou les Descentes, verticales des eaux pendant les Jusans.

<i>Distance entre les deux luminaires en degrés.</i>	<i>Hauteur des Marées.</i>	<i>Différence des Hauteurs.</i>
0 Degrés.	1000 Parties.	
10	987	— 13
20	949	— 38
30	887	— 62
40	806	— 81
50	715	— 91
60	610	— 105
70	518	— 92
80	453	— 65
90	429	— 24
100	453	+ 24
110	518	+ 65
120	610	+ 92
130	715	+ 105
140	806	+ 91
150	887	+ 81
160	949	+ 62
170	987	+ 38
180	1000	+ 13

VII.—Si on avoit voulu construire cette table conformément à l'équation finale du §. III. qui est la vraie equation, on auroit pu profiter de la table du VI. Chap. dans laquelle les nombres de la seconde colonne

divisés par 4, donnent les degrés de l'arc, dont le sinus est appelé β , après quoi on connoît aussi l'arc dont le sinus est appelé α . Connoissant ainsi par les tables les quantités β et α , on trouve sans beaucoup de peine la valeur de M du §. III.

VIII.—On voit aussi, que si la distance entre les deux luminaires est entre deux nombres de la première colonne, on peut sans aucune erreur sensible employer le principe général des interpolations, de sorte que cette table peut suffire pour tous les cas.

IX.—On remarquera au reste, qu'il est ici de grande importance d'avoir substitué la vraie valeur pour $\frac{\delta}{c}$, et qu'un assez petit changement dans cette valeur, a une grande influence sur le rapport des marées. On ne doit donc encore considérer cette table, que comme un exemple de nos formules générales : le Chapitre suivant fera voir les précautions que l'on doit prendre là-dessus.

X.—Nous voyons tant par les formules que nous avons données pour les hauteurs des marées, que par la précédente table, qu'elle est *in abstracto* la nature des variations des marées. On peut faire là-dessus les Remarques qui suivent.

1°. Que les changemens des marées sont fort petits, tant aux *syzygies* qu'aux *quadratures*, et ils seroient infiniment plus petits que les autres, si l'intervalle d'une marée à l'autre étoit aussi infiniment petit.

2°. Que les plus grands changemens ne se sont pas précisément au milieu, mais plus près des *quadratures* que des *syzygies* : c'est-à-dire, que la plus grande diminution des marées se fait dans nos suppositions, lorsque la Lune est environ à 60 degrés (80 avec la correction de 20 degrés expliquée au Chap. VII.) depuis les *syzygies* ; le plus grand décroissement se fait donc de la neuvième à la dixième marée (de la douzième à la treizième avec la correction) : de même le plus grand accroissement se fait à environ 30 degrés depuis les *quadratures* (50 degrés avec la correction) qui répond au changement de la quatrième à la cinquième marée (de la septième à la huitième avec la correction) depuis les *quadratures*. Je parle dans cette remarque de toutes les marées qui se font, tant celles du matin, que celles du soir, pour rendre leurs intervalles plus petits : on se souviendra cependant de ce que j'ai dit expressément, que je fais abstraction par-tout ailleurs des marées, qui répondent au passage inférieur de la Lune par le méridien, lorsqu'il s'agit de comparer les marées entre elles : car ces deux sortes de marées ont quelques inégalités entre elles, que je n'ai pas encore considérées.

3°. Que les petits changemens dans les syzygies, et ceux des quadratures, comparés entre eux, sont inégaux; puisque ceux-ci sont environ doubles de ceux-là. Dans l'application de cette remarque il faudra ajouter, de part et d'autre, trois marées, ou environ un jour et demi de tems.

4°. Que le plus grand changement de deux marées qui se suivent, entre celles qui répondent à la Lune de dessus (dont l'intervalle répond à environ 13 degrés de variation dans la distance de la Lune au Soleil) fait près du quart de la variation totale de la plus grande à la plus petite marée.

XI.—Je ne doute pas que les observations ne confirment en gros les remarques que je viens de faire, et toutes les regles précédentes. On ne sçauroit plus douter de la théorie que nous avons adoptée et établie; et la théorie posée, les calculs en sont sûrs. Mais comme nous ne sommes pas encore sûrs des hypotheses secondes, qu'on ne sçauroit éviter, telles que sont le juste rapport entre la force lunaire et solaire, que nous avons supposé comme 5 à 2; le retardement des effets de la Lune sur sa position, que nous avons supposé d'un jour et demi, ou de trois marées, ou de 20 degrés, que la Lune peut parcourir en longitude pendant ce retardement, &c. nous nous croyons en droit de demander quelque indulgence pour le resultat desdites remarques et regles. Cependant comme je n'ai fait aucune supposition sans un mûr examen fondé sur les plus justes observations choisies entre toutes celles qui peuvent les déterminer, j'oserois me flatter d'un assez bon succès, si Messieurs les Academiciens vouloient se donner la peine de confronter nos tables, nos regles et nos Théoremes nouveaux avec les observations, dont ils ont un grand trésor: mais ce succès, dont je me flatte par avance, se manifestera davantage, si ils veulent encore faire attention aux corrections que je vais donner dans le Chapitre suivant, à l'égard de diverses circonstances variables, et que nous avons supposées dans ce Chapitre comme constamment les mêmes.

CHAPITRE IX.

Sur les Hauteurs des Marées corrigées, suivant différentes circonstances variables.

I.—**N**ous suivrons dans cet examen la même route que nous avons tenuë dans le VII. Chap. à l'égard du tems des marées. Pour commencer donc par l'effet des vents et des courants, on voit bien qu'ils peuvent augmenter et diminuer les marées, et que ces variations ne sont pas d'une nature à pouvoir être aucunement déterminées. On pourra pourtant remarquer que lorsque ces causes conservent pendant un tems un peu considérable leur force et leur direction, leur effet consistera plutôt à hausser ou baisser la mer elle-même, qu'à augmenter ou diminuer les marées.

II.—Les circonstances attachées à chaque port ou autre endroit en particulier, telles que sont sa situation, la profondeur des eaux, la pente des fonds, la communication avec l'océan, &c., font extrêmement varier les marées. Ce sont ces causes qui font que les grandes marées ne sont que d'un petit nombre de pieds dans de certains endroits, de 8 ou 10 pieds dans d'autres, et de 50 à 60 pieds, et au-delà encore dans d'autres endroits. Ce qu'il y a de singulier, est que dans la mer libre les grandes marées ne sont que d'environ 8 pieds, pendant qu'elles vont au-delà de 50 pieds dans plusieurs ports et autres endroits, dont la communication avec la mer ouverte, est entrecoupée et empêchée de tous côtés ; et qui par conséquent devroient, selon les premières apparences, avoir les marées moins grandes, nous donnerons dans un autre Chapitre la raison hydrostatique de ce phénomène, pour ne point nous écarter de notre sujet présent. Cela fait d'abord voir, qu'on ne sçauroit rien déterminer sur les grandeurs absolües des marées, et que tout ce que la théorie pourroit encore faire, seroit d'en marquer le rapport : mais l'expérience nous enseigne encore, que ce rapport même n'est pas constant dans les différens endroits, quoi qu'il soit renfermé dans des bornes plus étroites.

La grande marée sera double de la petite marée dans un endroit ; et elle pourra être triple dans un autre : c'est que les causes qui font varier les hauteurs absolües des marées à l'égard de différens endroits, ne gardent pas une proportion tout-à-fait constante. Mais les marées moyennes entre la plus grande et la plus petite pendant une même revolution de la Lune, peuvent être censées observer les regles que nous leur avons pre-

scrites dans le Chapitre précédent. Il y a même apparence, que les changemens qui dépendent de la différente situation des luminaires observeront à-peu-près les loix que nous avons démontrées *in abstracto*. Ces réflexions m'ont déterminé à considérer la plus grande et la plus petite marée, non telles qu'elles devroient être dans la théorie pure, mais telles qu'on les observe, lorsque les luminaires se trouvent à-peu-près dans l'équateur, et dans leurs distances moyennes à la Terre, sans qu'aucune cause accidentelle les trouble. Nous avons démontré au III. §. du Chap. VIII. que la hauteur de la grande marée doit être exprimée par $\delta + \zeta$, et la hauteur de la petite marée par $\delta - \zeta$; mais si l'on suppose la hauteur moyenne réelle de la grande marée A et de la petite marée B, il faudra suivant cette correction faire

$$\delta + \zeta = A, \text{ et } \delta - \zeta = B:$$

c'est-à dire,
$$\delta = \frac{A+B}{2}, \text{ et } \zeta = \frac{A-B}{2};$$

et ces valeurs doivent être substituées dans les equations et formules du Chapitre précédent. En supposant $\frac{\delta}{\zeta} = \frac{5}{2}$ comme nous avons fait, on

obtient $\frac{A}{B} = \frac{7}{3}$, et si cette raison étoit confirmée par les observations, il n'y auroit aucun changement à faire. On pourroit se servir de la table, telle qu'elle est, en donnant toujours 1000 parties à la hauteur de la grande marée. Mais si $\frac{A}{B}$ avoit réellement une autre valeur considérable-

ment différente de celle que nous venons de lui assigner, il ne faudroit pas négliger la correction que nous venons d'indiquer.

L'on voit aussi après ces considérations, qu'on ne doit pas s'attendre à pouvoir déterminer avec la dernière précision les hauteurs des marées. Nous pourrons donc sans scrupule, pour rendre nos Propositions plus nettes et plus sensibles, nous servir de l'équation du §. IV. Chap. VIII. qui aussi-bien approche beaucoup de la vraie équation de l'Article qui précède l'autre. Nous supposerons donc la hauteur des marées, toujours exprimée par $\delta + \zeta - 2 m m \zeta$, et employant la correction indiquée, nous aurons à présent

$$M = A - m m A + m m B, \text{ ou plus simplement,}$$

$$M = n n A + m m B:$$

C'est donc de cette dernière équation, que nous nous servirons dans la suite de cette dissertation.

III.—Cette correction pourra en même tems remédier à un autre in-

convenient, qui provient de l'inertie et de la masse des eaux. Nous avons déjà dit ailleurs que les marées sont une espèce d'oscillations qui tâchent naturellement à se conserver telles qu'elles sont : on sent bien que cette raison doit empêcher les grandes marées d'atteindre toute leur hauteur, et les petites de diminuer autant qu'elles devraient faire naturellement : qu'elle ne doit pas changer sensiblement la marée moyenne entre la plus grande et la plus petite, et qu'elle change les autres d'autant plus qu'elles sont plus éloignées de cette marée moyenne. Et on voit que notre correction satisfait à toutes ces trois conditions.

IV.—Après la dite correction qui regarde immédiatement les hauteurs des marées, il faut encore employer celle qui regarde les tems, que nous déterminons par les phases de la Lune, ou par les distances, qui sont entre les luminaires. Nous avons expliqué au long aux §. §. IV. et V. du Chap. VII. que les phases de la Lune qui répondent aux marées en question, ne doivent pas être prises telles qu'elles sont, mais telles qu'elles seroient environ un jour et demi après, c'est-à-dire, que les distances entre les luminaires doivent être augmentées d'environ 20 degrés, et moyennant cette correction, la théorie ne sauroit manquer de satisfaire au juste aux observations.

V.—Nous n'avons considéré jusqu'ici les luminaires, que dans leurs distances moyennes à la Terre, et c'est pour ce cas que nous avons appelé la hauteur de la plus grande marée A, et celle de la plus petite marée B. Pour déterminer donc ce que les différentes distances peuvent faire sur les hauteurs des marées, il faudra se rappeler tout l'Art. VII. du Chap. VII. Nous y avons démontré, que la force lunaire doit être supposée généralement $= \frac{l^3}{L^3} \times \delta$, et la force solaire $= \frac{s^3}{S^3} \times \zeta$. Or comme la somme de ces forces exprime toujours la hauteur de la grande marée et que la différence des mêmes forces exprime la hauteur de la petite marée, il faudra faire ces deux analogies :

$$\delta + \zeta : \frac{l^3}{L^3} \times \delta + \frac{s^3}{S^3} \times \zeta :: A : \frac{l^3 S^3 \delta + L^3 s^3 \zeta}{L^3 S^3 (\delta + \zeta)} \times A$$

$$\delta - \zeta : \frac{l^3}{L^3} \times \delta - \frac{s^3}{S^3} \times \zeta :: B : \frac{l^3 S^3 \delta - L^3 s^3 \zeta}{L^3 S^3 (\delta - \zeta)} \times B.$$

La première de ces quatrièmes proportionnelles marquera donc la hauteur corrigée de la grande marée, et la seconde, la hauteur corrigée de la petite marée. Par conséquent l'équation finale du II. §. sera celle après sa correction :

$$M = \frac{1^s S^3 \delta + L^3 s^3 c}{L^3 S^3 (\delta + c)} \times n n A + \frac{1^s S^3 \delta - L^3 s^3 c}{L^3 S^3 (\delta - c)} \times m m B.$$

Je m'assure que cette équation donnera toujours les hauteurs des marées avec toute la justesse qu'on peut attendre sur cette matière, pour les suppositions auxquelles notre théorie est encore assujettie. Mais comme il est presque impossible qu'il n'y ait absolument aucune cause étrangère, qui trouble les marées, nous ne devons pas être trop scrupuleux sur ces corrections, qui sont elles-mêmes médiocres. Ainsi pour rendre nos règles plus sensibles et plus faciles, nous ne ferons point d'attention aux changemens dans les distances du Soleil à la Terre; ces changemens sont beaucoup plus petits que dans la Lune, et ils sont en même tems de beaucoup moindre conséquence: nous supposons donc S constamment = s . Quant à la Lune, nous la considérerons, tout comme nous avons fait au VII. §. du Chap. VII. dans son périégée, dans sa distance moyenne et dans son apogée; et nous retiendrons les suppositions que nous avons faites au dit Article, pour les distances de la Lune, et pour les conséquences que nous en avons tirées. Nous ferons donc pour le premier cas $\delta = 3^\circ$, et $\frac{L^3}{1^3} = 0,8439$: pour le second cas $\delta = \frac{1}{2}^\circ$, et $\frac{L^3}{1^3} = 1,000$, et enfin pour le troisième $\delta = 2^\circ$, et $\frac{L^3}{1^3} = 1,174$. De cette façon nous aurons les trois équations qui suivent, exprimées en nombres décimaux.

1°. Pour le périégée de la Lune,

$$M = 1.138 n n A + 1.277 m m B.$$

2°. Pour les distances moyennes de la Lune,

$$M = n n A + m m B.$$

3°. Pour l'apogée de la Lune

$$M = 0.901 n n A + 0.703 m m B.$$

On remarquera dans ces équations, que A marque la hauteur de la grande marée, et B la hauteur de la petite marée dans les distances moyennes des luminaires à la Terre, ces luminaires étant supposés l'un et l'autre se trouver dans l'équateur: que m marque le sinus de l'arc compris entre les luminaires diminué de 20 degrés, et n le cosinus de cet arc.

On remarquera après cela, que les grandes marées sont comprises en vertu de la première et de la troisième équation dans les termes de 1138 à 901, et les marées bâtarde dans les termes de 1277 à 703; d'où l'on voit que la différence entre les grandes marées n'est pas à beaucoup près

si grande, qu'elle l'est entre les marées bâtarde, si on compare cette différence à la hauteur de la marée qui lui répond. Cela se confirme par l'expérience, et c'est une nouvelle source des irrégularités des petites marées comparées entre elles, dont nous avons déjà parlé ailleurs, et que M. Cassini n'a pas manqué d'observer.

VI.—J'ajouterai ci-dessous une table fondée et calculée sur les trois dites équations, mais qui se rapporte aux quantités A et B, qu'il faut donc connoître par expérience pour le port ou autre endroit, dont il est question. On pourra déterminer ces quantités A et B, sur un grand nombre d'observations, tant des hautes que des petites marées, en prenant des unes et des autres le milieu arithmétique.

VII.—On remarquera, quant à la construction de la table que nous allons donner, que les arcs compris entre les luminaires ont été augmentés de 20 degrés à l'égard de la table précédente, dans laquelle on n'a pas eu égard aux causes secondes et aux corrections à faire. Ces 20 degrés sont déterminés par le retard d'un jour et demi des marées, par rapport aux phases de la Lune, expliqué ci-dessus : il est vrai que cet intervalle d'un jour et demi ne demande pas tout-à-fait 20 degrés de correction : mais comme il faudroit estimer les distances entre les luminaires, telles qu'elles sont, non au moment de la haute-mer (qui doit être supposée se faire au moment du passage de la Lune par le méridien) mais au milieu du jusan, en vertu du III. §. du Chap. VIII. et que l'intervalle depuis la haute mer jusqu'au milieu du jusan, demande encore une correction d'environ un degré et demi, la somme de ces corrections peut être supposée de 20 degrés, en estimant les distances des luminaires au moment du passage de la Lune par le méridien, que les ephémérides indiquent.

VIII.—Voici donc à présent la table. La première colonne y marque les distances entre la Lune et le Soleil dans le moment du passage de la Lune par le méridien : les trois autres colonnes marquent les hauteurs des marées pour le périgée de la Lune, pour les distances moyennes de la Lune à la Terre, et pour l'apogée de la Lune.

TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGÉE

Pour trouver les Hauteurs des Marées.

<i>Distances entre les Lumières.</i>	<i>Hauteurs des Marées au Périgée de la Lune.</i>	<i>Hauteurs des Marées aux distances moyennes de la Lune à la Terre.</i>	<i>Hauteurs des Marées à l'Apogée de la Lune.</i>
0 Degrés.	0,995A + 0,149B	0,883A + 0,117B	0,795A + 0,082B
10	1,104A + 0,038B	0,970A + 0,030B	0,874A + 0,021B
20	1,138A + 0,000B	1,000A + 0,000B	0,901A + 0,000B
30	1,104A + 0,038B	0,970A + 0,030B	0,874A + 0,021B
40	0,995A + 0,149B	0,883A + 0,117B	0,795A + 0,082B
50	0,853A + 0,319B	0,750A + 0,250B	0,676A + 0,176B
60	0,668A + 0,527B	0,587A + 0,413B	0,529A + 0,290B
70	0,460A + 0,749B	0,413A + 0,587B	0,372A + 0,412B
80	0,284A + 0,958B	0,250A + 0,750B	0,225A + 0,527B
90	0,133A + 1,127B	0,117A + 0,883B	0,105A + 0,621B
100	0,034A + 1,238B	0,030A + 0,970B	0,027A + 0,682B
110	0,000A + 1,277B	0,000A + 1,000B	0,000A + 0,703B
120	0,034A + 1,238B	0,030A + 0,970B	0,027A + 0,682B
130	0,133A + 1,127B	0,117A + 0,883B	0,105A + 0,621B
140	0,284A + 0,958B	0,250A + 0,750B	0,225A + 0,527B
150	0,460A + 0,749B	0,413A + 0,587B	0,372A + 0,412B
160	0,668A + 0,527B	0,587A + 0,413B	0,529A + 0,290B
170	0,853A + 0,319B	0,750A + 0,250B	0,676A + 0,176B
180	0,995A + 0,149B	0,883A + 0,117B	0,795A + 0,082B

IX.—Il nous reste à considérer les déclinaisons des luminaires et les latitudes des lieux sur la Terre, pour lesquels on cherche la nature des marées. Nous avons supposé les unes et les autres nulle dans ce Chapitre. Mais cette matière est si riche et si remarquable par plusieurs

propriétés très singulières et elle demande d'ailleurs tant d'attention, que j'ai cru devoir la traiter à part. Ce sera donc le sujet du Chapitre suivant.



CHAPITRE X.

Dans lequel on examine toutes les propriétés des Marées, qui dépendent des différentes Déclinaisons des Luminaires et des différentes latitudes des Lieux.

I.—LES déclinaisons des luminaires à l'égard de l'équateur, et les distances des lieux sur la Terre du même équateur, ont tant de rapport entre elles, qu'on ne sauroit bien traiter cette matière, qui est une des plus importantes de notre sujet, sans les considérer les unes et les autres en même tems. Mais pour ne pas rendre la question trop embarrassante dès le commencement, nous ne ferons d'abord attention qu'à la Lune, tout comme si les marées étoient uniquement produites par l'action lunaire. Nous considérerons aussi la chose d'abord suivant la pure théorie, et nous verrons ensuite quelles corrections on y pourra employer.

II.—Ressouvenons-nous de tout ce que nous avons dit dans quelques-uns des premiers Chapitres, et sur-tout dans le cinquième, sur le changement de la figure de la Terre produit par l'action de l'un des luminaires. Nous avons considéré la Terre d'abord comme parfaitement sphérique: nous avons démontré ensuite que cette figure est changée par l'action de l'un des luminaires en ellipsoïde, dont l'axe prolongé passe par le centre du luminaire agissant; et enfin que la rotation diurne de la Terre fait que chaque point dans la surface de la Terre, doit tantôt se baisser, tantôt s'élever, afin que sa figure ellipsoïde soit conservée; mais nous n'avons calculé ces baissemens et haussemens, que pour les points pris dans l'équateur même, dans le plan duquel nous avons supposé en même tems se trouver l'axe de l'ellipsoïde. C'est pour ces cas, que nous avons démontré, (§. V. Chap. V.) que les baissemens des eaux sont proportionnels aux quarrés des sinus des angles horaires, qui commencent du moment de la haute mer; et l'on remarquera que ces angles horaires sont proportion-

nels alors aux arcs compris entre le pôle de l'ellipsoïde et le point en question.

III.—Voici à présent comment il faut s'y prendre, pour trouver les mêmes baissemens et haussemens, qui se font pendant le mouvement diurne de la Terre dans un point quelconque, et la Lune ayant aussi une déclinaison quelconque. On voit qu'on aura toujours le même ellipsoïde, quelle que soit la déclinaison de la Lune; mais qu'il sera obliquement posé à l'égard de l'équateur: on voit aussi qu'il faut s'imaginer dans ce sphéroïde allongé une section parallèle à l'équateur, qui passe par le point en question: cette section ne sera pas un cercle parfait, et sa circonférence n'aura pas tous ses points également éloignés du centre de l'ellipsoïde: c'est les différences de ses distances, qui forment la nature des marées. Il s'agit donc de déterminer ces différences.

IV.—Pour cet effet il faudra commencer par chercher les distances de chaque point du parallèle au *pôle de l'ellipsoïde* (j'appelle ainsi l'extrémité de l'ellipsoïde, qui prolongé, passe par le centre de la Lune) et ces distances étant connues, il est facile de trouver la distance du même point au centre de l'ellipsoïde, et les différences de ces distances. Car si le cosinus de la distance d'un point pris dans le parallèle au pôle de l'ellipsoïde étoit ξ , le sinus total = 1, et si le demi axe de l'ellipsoïde est nommé $b + \delta$, et le plus petit demi-diamètre b , la distance du point pris par le parallèle jusqu'au centre de l'ellipsoïde sera généralement = $b + \xi \delta$; nous avons démontré cette Proposition au §. V. Chap. V.

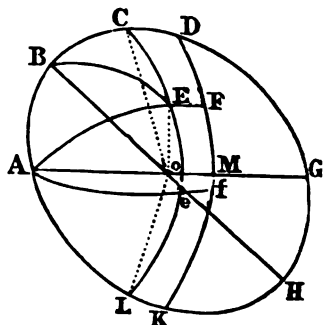
V.—Nous montrerons donc d'abord, comment il faudra déterminer la distance d'un point quelconque, pris dans un parallèle donné au pôle de l'ellipsoïde. La voye de la trigonometrie sphérique ordinaire nous seroit assez inutile ici, puisqu'il nous faut des expressions analytiques, applicables à tous les cas, et traitables aux calculs. Si l'on vouloit tirer de telles expressions des règles de la dite trigonometrie, les formules qui en proviendroient seroient beaucoup trop prolixes. M. Mayers nous a donné là-dessus un beau Mémoire inséré dans les Commentaires de l'Académie Impériale des Sciences de Petersbourg Tom. II. p. 12. Il y a dans ce Mémoire au XVIII. §. un Théoreme général, par le moyen duquel on pourra toujours de trois choses données dans un triangle sphérique, trouver le reste par des expressions analytiques extrêmement simples. Voici le cas que notre sujet demande.

Soit dans un triangle sphérique, le sinus total = 1; le sinus d'un des côtés = S; le cosinus du même côté = C; le sinus d'un autre côté = s; le cosinus de cet autre côté = c; le cosinus de l'angle compris entre les

deux côtés donnés = y ; le cosinus du troisième côté opposé à l'angle donné, que j'appellerai q , sera exprimé par cette équation

$$q = S s y + C c.$$

VI.—Soit à present $A D G K$ le méridien de la Terre, qui passe par le centre de la Lune, et que la Lune réponde au point B , qui deviendra ainsi le pôle de l'ellipsoïde, et la droite $B H$, qui passe par le centre O , son axe. Soit l'axe de rotation de la Terre $A G$, les poles A et G , $D F K$ l'équateur; $C E L$ un parallèle, dans lequel nous prendrons un point quelconque E , et qu'on tire enfin par ce point E , et par le pôle A l'arc $A E F$.



De cette maniere, l'arc $A B$ sera le complément de la déclinaison de la Lune; l'arc $A E$ sera le complément de la latitude du point E , et l'arc $D F$ sera l'arc horaire depuis le passage du point E par le méridien, qui passe par la Lune; de sorte qu'on connoît dans le triangle $B A E$, les côtés $B A$ et $E A$, avec l'angle compris $B A E$, et de là on tirera par le moyen du Théoreme exposé au précédent Article, l'arc $B E$, qui est la distance du point E au pôle de l'ellipsoïde.

Nous nommerons donc encore le sinus total 1, le sinus du côté $A B = S$; son cosinus = C ; le sinus du côté $A E = s$, son cosinus = c ; le cosinus de l'arc $D F$, qui est la mesure de l'angle $B A E$, = y ; le cosinus de l'arc $B E = q$: nous aurons $q = S s y + C c$.

VII.—Ayant ainsi trouvé l'arc $B E$, il est facile d'exprimer la droite $E O$, qui est la distance du point E jusqu'au centre de l'ellipsoïde, par le moyen du 4^e. Art. qui nous marque que cette distance est toujours égale au plus petit demi-diametre, augmenté par le produit du quarré du cosinus de cet arc trouvé, et de l'excès du demi-axe $B O$ sur le plus petit demi-diametre: c'est-à-dire, si nous retenons les dénominations, dont nous nous sommes servis depuis le IV. §. jusqu'ici, que nous aurons

$$E O = b + (S s y + C c)^2 a.$$

C'est cette équation de laquelle nous devons tirer toutes les variations des marées, que la déclinaison de la Lune et la latitude du lieu peuvent produire.

VIII.—Nous voyons d'abord, que n'y ayant que la lettre y de variable, la quantité $E O$ est toujours d'autant plus grande, que l'on prend y plus

grande. Pour avoir donc la plus grande $E O$, il faut faire $y = 1$. La haute mer répond donc encore au passage de la Lune par le méridien ; et on aura alors la droite $CO = b + (Ss + Cc)^2 \delta$.

IX.—Mais pour trouver la plus petite $E O$ ou $e O$, il ne faut pas faire $y = 0$; mais $y = -\frac{Cc}{Ss}$ et alors la hauteur $e O$ est simplement $= b$.

nous ferons là-dessus les remarques suivantes :

1. La différence entre la plus grande CO et la plus petite $e O$, faisant la hauteur de la marée, entant quelle est produite par la seule action de la Lune, il s'ensuit que cette hauteur est $= (Ss + Cc)^2 \delta$. Cette formule nous apprend bien de nouvelles propriétés sur les marées, et nous sert en même tems à décider plusieurs questions, sur lesquelles les auteurs ne sont pas encore convenus.

(a) Nous voyons d'abord, que la plus grande marée se fait, lorsque la déclinaison de la Lune est égale à la latitude du lieu. Cette règle suppose toute la Terre inondée ; et c'est à quoi il faut avoir égard, lorsqu'il est question de la hauteur d'un lieu. Ce n'est pas par exemple immédiatement aux ports de Picardie, de Flandre, &c. que les eaux sont élevées par la Lune : la cause principale des marées dans tous ces endroits doit être attribuée plutôt à l'élevation et descente des eaux, qui se font dans la mer du Nord, à environ 35 degrés de latitude septentrionale, autant que j'en ai pu juger par l'inspection des cartes marines. J'avoué pourtant que ce n'est ici qu'une estime fort incertaine ; il est impossible de rien dire de positif là-dessus.

On remarquera aussi que je parle ici de la hauteur de la marée, qui répond au passage supérieur de la Lune par le méridien : j'appellerai cette classe de marées, *marées de dessus*, et la classe de celles qui répondent au passage inférieur de la Lune par le méridien, *marées de dessous*.

(c) Si la déclinaison de la Lune est nulle, nous aurons $S = 1$ et $C = 0$, et la hauteur de la marée de dessus sera $= ss \delta$. Nous voyons de-là, que si la Terre étoit toute inondée, et que les luminaires restassent dans le plan de l'équateur, les hauteurs des marées pour les endroits de différentes latitudes seroient en raison quarrée des sinus des distances au pôle.

(7) Si pour nos païs septentrionaux, la déclinaison de la Lune devient méridionale, les marées de dessus deviennent encore plus petites à cet égard, et cette diminution seroit très-considérable, s'il n'y avoit pas une cause hydrostatique que je marquerai ci-dessous, qui lui est un obstacle ;

sans la considération de cette cause, on pourroit croire facilement que notre théorie ne répond pas assez aux observations.

(δ) Nous éclaircirons cette matiere par un exemple, en supposant la latitude du lieu de 35 degrés. En ce cas la hauteur des marées de dessus, tout le reste étant égal, devoit être,

Dans la plus grande déclinaison septentrionale de	
la Lune,	= 0,963 δ.
Lorsque la déclinaison de la Lune est nulle,	= 0,671 δ.
Dans la plus grande déclinaison méridionale de la	
Lune,	= 0,265 δ.

La différence de ces marées est énorme, et surpasse de beaucoup toutes les inégalités qu'on peut soupçonner avoir quelque rapport à la déclinaison de la Lune. Nous en dirons bientôt la raison.

(α) Si on supposoit la latitude telle que Ss fût = Cc , ou $Ss = \sqrt{1 - SS} \times \sqrt{1 - ss}$, ou enfin $s = \sqrt{1 - SS} = C$, le point E qui répondroit à la plus petite EO , seroit précisément au point L . En ce cas, il n'y auroit qu'une marée de dessus dans l'espace d'un jour lunaire, et la marée de dessous s'évanouiroit entièrement. Cela arriveroit donc, par exemple, si la Lune ayant 20 degrés de déclinaison septentrionale, l'élevation du pole étoit de 70 degrés: mais en même tems la marée seroit bien petite, puisqu'elle ne monteroit qu'à environ la cinquième partie, qu'elle seroit sous l'équateur.

(ζ) Si s est plus petit que C , la quantité du §. VII. $(Ss + Cc)^2 \delta$, ne sçauroit plus devenir égale 0; c'est pourquoi la mer décroitra alors continuellement depuis le passage supérieur de la Lune par le méridien, jusqu'à son passage inférieur. Il n'y aura donc plus qu'une marée par jour depuis la parallele, qui fait $s = C$, jusqu'au pole; et pour sçavoir la hauteur de ces marées, il faut dans cette formule, premierement supposer $y = 1$; et ensuite $y = -1$, et prendre la différence des formules: la hauteur des marées sera donc dans ces cas = $(Ss + Cc)^2 \delta - (-Ss + Cc)^2 \delta$, ou bien = $4 Ss Cc \delta$. Elle ne sçauroit donc être qu'extrêmement petite.

Nous aurions un grand nombre de réflexions à faire encore sur cette matiere, s'il ne falloit pas se contenir dans de certaines bornes; et quoique tous ces Théoremes ne soient vrais que dans la théorie, où l'on suppose les eaux être constamment dans leur état d'équilibre, et toute la Terre inondée (car avec ces suppositions, ces Théorèmes seroient exactement vrais) et que diverses circonstances peuvent leur donner quelquefois une

toute autre face, ils ne laissent pas d'être très-utiles, pour expliquer en gros un grand nombre de phénomènes observés sur les marées, et pour pénétrer à fond cette matière.

2. Nous avons démontré qu'il n'y a des marées de dessous, que tant que s est plus grand que C , lorsque la déclinaison de la Lune est septentrionale (si cette déclinaison est méridionale, il n'y aura point alors de marées de dessous dans les pays septentrionaux). Nous disposerons donc s plus grand que C , et nous chercherons là-dessus la hauteur de la marée de dessous, de la même façon que nous l'avons trouvée pour celles de dessus.

Nous avons vu que la hauteur EO est la plus petite possible, lorsqu'on prend $y = -\frac{C c}{S s}$, et qu'alors elle devient $= b$; après cela les hauteurs

EO croîtront jusqu'au point L , qui fait $y = -1$. La différence de ces hauteurs fera donc la hauteur de la marée de dessous, qui sera par conséquent $= (-S s + C c)^2 \delta$, pendant que celle de la marée de dessus étoit $= (S s + C c)^2 \delta$. On pourra faire là-dessus les remarques suivantes.

(a) Les marées de dessus sont égales à celles de dessous, lorsque la déclinaison de la Lune est nulle.

(b) Dans les pays septentrionaux, les marées de dessus sont plus grandes que celles de dessous, lorsque la déclinaison de la Lune est septentrionale, et plus petites lorsque cette déclinaison est méridionale, et généralement les déclinaisons de la Lune étant égales, mais de différens côtés, les marées de dessus deviennent les mêmes qu'étoient celles de dessous, et réciproquement.

(c) La différence des deux marées d'un même jour lunaire est $= 4 C c S s \delta$; si l'on applique ces formules à des cas particuliers, on verra que les marées de dessus devoient différer considérablement de celles de dessous, s'il n'y avoit pas une autre raison qui doit les rendre à peu près égales. Nous exposerons cette raison ci-dessous, après que nous aurons examiné tout ce que la théorie dit sur cette matière *in abstracto*.

3. Nous voyons aussi que les durées de deux marées d'un même jour doivent être selon la pure théorie fort différentes. Voici comme on peut déterminer ces durées. Si dans le parallèle CL on suppose e être le point, la distance duquel au centre de l'ellipsoïde soit la plus petite et égale à b , et qu'on tire ensuite par ce point un arc de méridien Aef , l'arc Df sera la mesure du tems depuis la haute mer de dessus jusqu'à

la basse mer suivante, et l'arc fK la mesure du tems, depuis cette basse mer jusqu'à la haute mer de dessous. Or nous avons vû au IX. §. que

le cosinus de l'arc $Df(y)$ est $= -\frac{C c}{S s}$,

ou bien si DM est de 90 degrés, le sinus de l'arc Mf vers le point $K = \frac{C c}{S s}$. Là-

dessus nous pourrons faire ces remarques.

(1) Dans les païs septentrionaux la déclinaison septentrionale de la Lune rend les jusan des marées de dessus plus longs, et les flots des marées de dessous plus courts; et la déclinaison méridionale fait le contraire avec les mêmes mesures; et lorsque la déclinaison est nulle, la durée du jusan est égale à celle du flot suivant.

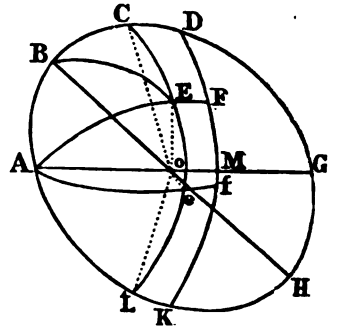
(2) Si la déclinaison de la Lune est égale au cosinus de la latitude du lieu, le jusan durera 12 heures lunaires, et il n'y a point de flot pour l'autre marée, parce qu'il n'y a point du tout de marée de dessous.

(3) En général, la différence du tems, entre le jusan de la marée de dessus, et le flot de la marée de dessous, se détermine par le double de l'arc horaire Mf , et la différence des durées des deux marées entières, est exprimée par le quadruple de l'arc Mf , dont le sinus est $= \frac{C c}{S s}$.

D'où l'on voit que plus la déclinaison de la Lune est grande, plus cette différence est grande aussi.

Soit, par exemple, la latitude du lieu de 35 degrés, la déclinaison de la Lune de 25 degrés, l'arc Mf sera de 15 degrés, qui répond à une heure lunaire; le jusan durera donc 7 heures lunaires, et le flot suivant 5 heures lunaires, et la différence sera de deux heures, et toute la marée de dessus durera 4 heures plus que celle de dessous.

X.—Voilà donc comme la chose seroit, si la Terre étoit toute inondée, et si les eaux étoient constamment dans une situation d'équilibre parfait. Nous avons exposé toutes les variations des marées qui sont dues à l'action de la Lune, par rapport aux différentes déclinaisons et latitudes, et par le moyen de nos remarques on connoit les différences entre les marées d'un même jour, entre celles qui se font dans différentes saisons, &c. tant à l'égard des hauteurs des marées, que de leurs durées. Il est vrai que les deux hypotheses indiquées sont bien éloignées de la vérité,



et que cela change extrêmement les mesures des variations ; mais je suis pourtant sûr qu'il doit y avoir des variations, et qu'elles seront de la nature que nous avons trouvée.

Quant aux irrégularités de la surface de la Terre, il n'est pas possible d'en deviner les effets, que fort superficiellement, et comme chaque endroit demanderoit à cet égard des réflexions différentes, nous n'entreprendrons point cet examen. Nous ne considérerons donc que ce qui regarde le défaut de l'équilibre des eaux, et les mouvemens reciproques ou oscillatoires qui en résultent.

XI.—La Lune change la surface de la Terre de sphérique en ellipsoïdique, et l'axe de l'ellipsoïde passe par la Lune. Cet axe étant différent de l'axe de rotation, la figure de la Terre change continuellement, quoique toujours la même à l'égard de l'axe de l'ellipsoïde ; et s'il n'y avoit pas quelques causes secondes, les dits changemens consisteroient simplement en ce que chaque goutte montât et descendit alternativement et directement vers le centre.

Il est remarquable encore, que si les eaux se mouvoient librement, sans souffrir aucune resistance, ces oscillations augmenteroient continuellement à l'infini, parce qu'à chaque demi-tour de la Terre, les eaux doivent être censées avoir reçu quelque nouvelle impulsion : c'est une propriété qu'on peut démontrer par plusieurs exemples semblables, tirés de la mécanique et de l'hydrodynamique. Mais le grand nombre de resistances qui s'opposent aux mouvemens des eaux, font que celles-ci prennent bien vite leur plus grand degré d'oscillations. Ces derniers degrés d'oscillations peuvent cependant être censés proportionnels aux forces que la Lune exerce sous différentes circonstances, pourvu que les changemens qui se font dans la Lune, se fassent assez lentement, pour donner aux eaux le tems qu'il leur faut pour changer leur mouvement. On peut donc dire à cet égard, que les changemens qui se font dans la Lune, par rapport à ses déclinaisons, doivent produire dans les marées à peu-près les phénomènes que nous avons indiqués, et à beaucoup plus forte raison les changemens de déclinaisons dans l'autre luminaire. Mais les changemens qui sont dûs à la rotation de la Terre sont trop vites, pour que les marées puissent s'y accommoder, car elles tâchent de conserver leur mouvement reciproque comme un pendule simple. Cette seule raison fait que si les deux marées d'un même jour doivent être suivant les différens effets de la Lune fort différentes, la plus grande augmente la plus petite, et celle-ci diminue l'autre, de sorte qu'elles sont beaucoup moins inégales qu'elles ne devraient être sans cette raison. Tout ce qu'on peut

donc dire à cet égard, est que nos Théorèmes sont vrais, quant à leur nature; mais non pas suivant les mesures que nous en avons données. On peut pourtant, moyennant une autre réflexion, réparer en quelque façon cet inconvénient: c'est en supposant que la plus grande marée donne à la plus petite, qui est sa compagne, autant qu'elle en perd, et les supposer l'une et l'autre à peu-près égales, ce que l'expérience confirme, et de là on tirera la hauteur absolue de chacune, en prenant le milieu arithmétique des deux marées, qui conviennent à un même jour lunaire. En corrigeant de cette façon les précédentes Propositions, nous aurons les Théorèmes suivans, qui ne sçauroient plus manquer d'être assez conformes aux observations.

XII.—La hauteur de la marée de dessus est $= (S s + C c)^2 \delta$ (§. Remarque I.) et la hauteur de la marée de dessous $= (-S s + C c)^2 \delta$ (§. IX. Remarque II.) en prenant donc la moitié de la somme de ces deux hauteurs, nous aurons la hauteur moyenne de la marée, qui convient aux déclinaisons de la Lune, et latitudes du lieu données, $(S S s s + C C c c) \delta$. De cette formule, que je crois fort juste pour la supposition de l'entière inondation de la Terre, on pourra tirer les Corollaires suivans.

(1.) Les déclinaisons septentrionales et méridionales de la Lune font le même effet sur les marées, à l'égard de leur hauteur moyenne.

Cette propriété est confirmée par les observations. Mais il sera toujours vrai, que dans les païs septentrionaux la déclinaison septentrionale de la Lune augmente un peu les marées de dessus, et diminue celles de dessous; et que la déclinaison méridionale fait le contraire: et c'est ce que l'expérience confirme aussi. On se souviendra donc que nous parlons de la hauteur moyenne des deux marées d'un même jour lunaire.

(2.) A la hauteur de 45 degrés la hauteur moyenne de la marée est $= (\frac{1}{2} S S + \frac{1}{2} C C) \delta = \frac{1}{2} \delta$, et par conséquent constamment la même.

C'est ici une propriété bien singulière, que quelles que soient les déclinaisons des luminaires, les hauteurs moyennes des marées n'en soient point changées, et cette propriété nous fait voir, pourquoi dans nos païs on s'aperçoit de si peu de changement dans les marées, à l'égard des dites déclinaisons.

(3.) Si la latitude du lieu est moins de 45°. la plus grande marée moyenne se fait lorsque les déclinaisons des luminaires sont nulles, et les marées diminuent, si les déclinaisons augmentent.

L'expérience confirme encore cette propriété, et tout le monde convient que dans nos païs (dont les marées dépendent de la mer du nord, à en-

viron 35 degrés de latitude) les plus grandes marées, tout le reste étant égal, se font environ les équinoxes.

Si la latitude du lieu est plus grande de 45 degrés, c'est le contraire.

(4.) Sous l'équateur, la hauteur de la marée est = $SS\delta$, et les variations qui dépendent des différentes déclinaisons de la Lune, y seront le plus sensibles : si la déclinaison est nulle, la hauteur de la marée y est exprimée par δ ; et si la déclinaison est supposée de 15 degrés (elle peut aller jusqu'à près de 29 degrés) la hauteur de la marée moyenne sera de $0,82\delta$. La différence des hauteurs est de $\frac{18}{100}\delta$.

(5.) Les variations sont moins grandes à cet égard sur les côtes de la France, baignées par l'océan, si les marées y sont causées par la mer du Nord à la hauteur d'environ 35 degrés, la hauteur de la marée, la déclinaison de la Lune étant nulle, y sera exprimée par $0,671\delta$, et si la Lune avoit 25 degrés de déclinaison, la hauteur moyenne y sera exprimée alors par $0,610\delta$. La plus grande marée est donc à la plus petite à cet égard, comme 671 à 610, et la différence sera comme 61, qui fait l'onzième partie de la grande marée.

Nous voyons par ces exemples, que les variations qui dépendent de la déclinaison de la Lune, sont toujours beaucoup plus petites, que celles qui dépendent des différentes distances de la Lune, et qui peuvent aller jusqu'au tiers de la grande marée. C'est pourquoi on a eu beaucoup de peine à s'apercevoir des variations qui répondent aux différentes déclinaisons.

(6.) Enfin nous remarquerons que cette formule ($SSss + CCcc$) δ pour les hauteurs moyennes des marées ne doit pas être poussée au-delà du terme des doubles marées, qui est lorsque la latitude du lieu est égale à la déclinaison de la Lune : car, passé ce terme, nous avons démontré qu'il ne doit y avoir qu'une marée par jour, dont la hauteur est exprimée par $4SsCc\delta$, en vertu de la Remarque (2) de l'Art. IX. Il faudra aussi donner à ce terme une certaine latitude ; car il y a apparence que ce n'est qu'à une certaine distance depuis ce terme vers l'équateur, que les marées commencent à être doubles, et à une autre distance vers le pôle, qu'elles commenceroient à être simples, si la mer libre s'étendoit jusque-là ; et que dans la zone, qui est entre deux, les marées seront mêlées de l'une et l'autre espèce avec beaucoup d'irrégularité.

XIII.—Nous venons d'exposer au long, et avec toute la précision possible, le rapport réel des hauteurs des marées : nous n'avons qu'un mot à dire sur l'heure des hautes marées. Comme c'est toujours au moment du passage supérieur de la Lune par le méridien, que la mer devrait être

la plus haute, quelle que soit la déclinaison de la Lune, et la latitude du lieu : nous voyons que si les marées dépendoient uniquement de la Lune, ces deux sortes de variations ne devroient point apporter de changement à l'heure de la haute mer, et si l'on veut avoir égard aux forces du Soleil, nous avons déjà montré au IX. Art. du Chap. VII. les variations qui peuvent provenir à cet égard.

Mais si la déclinaison de la Lune et la latitude du lieu n'ont pas d'influence directement sur l'heure de la haute mer, et si elles n'en ont que très-peu, lorsque l'action de la Lune est combinée avec celle du Soleil, il est remarquable, que tant la déclinaison de la Lune, que la latitude du lieu, feroient extrêmement varier l'heure des basses mers, sans cette cause seconde, que j'ai exposée au long dans le XI. Art. et qui fait que les deux marées d'un même jour lunaire sont beaucoup moins inégales, qu'elles ne devroient être. Cependant cette raison ne sauroit rendre les deux marées tout-à-fait égales, et il sera toujours vrai, ce que j'ai dit dans la Remarque (1.) de la III. Partie du §. IX. que c'est tantôt le jusan d'une marée, qui surpasse en durée le flot de la marée suivante, tantôt celui-ci qui surpasse l'autre. C'est une propriété qui n'est point échappée aux observateurs des marées ; mais on n'avoit pas remarqué les circonstances de ces inégalités, sçavoir que dans les pays septentrionaux, la déclinaison septentrionale de la Lune rend les marées de dessus plus longues, et les marées de dessous plus courtes, et que la déclinaison méridionale fait le contraire.

On voit donc qu'à cet égard le jusan peut être différent du flot suivant, mais non pas du flot antécédent ; et si l'on remarque quelque différence entre le flot et le jusan d'une même marée, ou cette différence sera constante pendant tout le cours de l'année, et alors il faut l'attribuer à la configuration des côtes ; ou elle n'aura point de loix, et ne sera que tout-à-fait accidentelle, et causée par des vents ou courants accidentels.

XIV.—Les différences que nous avons exposées dans ce Chapitre entre les deux marées d'un même jour, tant pour leur hauteur, que pour leur durée, nous donnent un moyen de reconnoître ces deux classes de marées, et de distinguer l'une d'avec l'autre, ce qui seroit impossible sans cela sur les côtes irrégulières de l'Europe, où nous sçavons que les diverses heures du port comprennent toute l'étendue d'une marée, ou d'un demi-jour lunaire.

La classe des marées de dessus comprendra celles qui sont plus grandes et plus longues, la déclinaison de la Lune étant septentrionale, ou qui

sont petites et plus courtes, cette déclinaison étant méridionale, et l'autre classe sera reciproque.

XV.—Nous avons examiné avec toute l'attention requise les effets des différentes déclinaisons de la Lune, qui sont la source de tant de propriétés très-remarquables des marées. Il ne nous reste donc plus qu'à considérer encore les déclinaisons du Soleil. Cet examen nous sera très-facile, après celui que nous venons de faire sur la Lune.

Nous nommerons la force du Soleil, sa déclinaison étant nulle, ζ , comme nous avons fait toujours dans le corps de ce traité, et nous retiendrons les dénominations du V. §. Si nous appliquons donc au Soleil tout le raisonnement que nous avons fait sur la Lune, nous voyons qu'on n'a qu'à substituer dans toutes les formules de ce Chapitre ζ à la place de δ , pour trouver les variations qui proviennent des différentes déclinaisons du Soleil dans tous les lieux de la Terre, et de cette manière tout ce que nous avons dit sur la Lune, sera aussi vrai à l'égard du Soleil. Si donc la hauteur de la marée, entant qu'elle est produite sous l'équateur par la seule action du Soleil au tems des équinoxes, est appelée ζ , la hauteur de la marée sera pour telle déclinaison du Soleil, et telle latitude du lieu entre les deux cercles polaires qu'on voudra = $(T T s s + E E c c) \zeta$, entendant par T le sinus de la distance du Soleil au pôle, et par E son cosinus.

XVI.—Pour tirer tout l'avantage, qui est possible, de nos méthodes, et leur donner la dernière perfection, nous tâcherons enfin de donner une formule générale pour tous les cas possibles. Souvenons-nous pour cet effet, que nous avons nommé au IX. Chapitre A la hauteur des marées qui se font sous la ligne dans les syzygies (ou plutôt un jour et demi après) les distances des luminaires étant moyennes, et leurs déclinaisons nulles; et que pour les mêmes circonstances nous avons nommé B la hauteur des marées bâtarde: voyons à présent, comment il faut changer ces quantités A et B , lorsque les déclinaisons des luminaires, et les latitudes des lieux sont d'une grandeur quelconque.

(1.) Quant à la quantité A , comme elle a été exprimée par la somme des forces entières des deux luminaires, c'est-à-dire, par $\delta + \zeta$, on voit qu'il faut mettre ici à la place de δ sa quantité corrigée $(S S s s + C C c c) \delta$, et à la place de ζ sa quantité corrigée $(T T s s + E E c c) \zeta$, et ensuite faire cette analogie

$$\delta + \zeta : A :: (S S s s + C C c c) \delta + (T T s s + E E c c) \zeta : \\ \frac{(S S s s + C C c c) \delta + (T T s s + E E c c) \zeta}{\delta + \zeta} A.$$

Cette quatrième proportionnelle marque la hauteur des marées dans les syzygies, lorsque les déclinaisons des luminaires, et la latitude du lieu sont quelconques, et si la déclinaison de l'un et l'autre lunaire est nulle, cette quantité devient simplement $= ssA$. Si l'on nomme donc F la hauteur de la marée dans les syzygies, les déclinaisons des luminaires étant nulles pour un lieu quelconque, il faut supposer $ssA = F$, et de cette manière la dite quatrième proportionnelle devient

$$= \frac{(SSss + C C c c) \delta + (T T s s + E E c c) \zeta}{ss(\delta + \zeta)} F.$$

C'est cette quantité qu'il faut substituer dans les équations du §. V. Chap. IX. pour A .

(2.) La quantité qu'il faudra substituer pour B dans ces équations, que nous venons de citer, se trouve à-peu-près de la même façon; il n'y a qu'à prendre au lieu de la somme $\delta + \zeta$ leur différence $\delta - \zeta$, qui exprimoit la hauteur des marées bâtarde. Si l'on appelle donc G la hauteur de la marée dans les quadratures, les déclinaisons des luminaires étant nulles, on trouvera la quantité à substituer pour

$$B = \frac{(SSss + C C c c) \delta - (T T s s + E E c c) \zeta}{ss(\delta - \zeta)} \times G.$$

Nous substituerons encore dans l'équation générale du §. V. Chap. IX. à la place des lettres S et s (qui y marquent le rapport des distances du Soleil à la Terre sous diverses circonstances, et qui se trouvent employées dans ce Chapitre dans un autre sens) ces autres lettres D et d .

Après ces réflexions préliminaires nous considérerons le Problème général des hauteurs des marées sous telles circonstances, qui pourront concourir, et qui servira à déterminer ces hauteurs avec toute la précision possible. Je m'assure que tous ceux qui jetteront les yeux sur cette solution, verront sans peine, combien j'ai été attentif à examiner et éprouver toutes les circonstances qui peuvent faire varier les marées.

PROBLEME GENERAL.

Trouver généralement la hauteur des Marées, en supposant connues toutes les circonstances qui peuvent les faire varier.

SOLUTION.

XVII.—Il faut connoître d'abord par observations les quantités F et G , qui marquent les hauteurs moyennes des grandes marées, et des marées

bâtardes, qui se font un jour et demi après les syzygies et les quadratures, les déclinaisons des luminaires étant nulles, et leurs distances à la Terre étant moyennes. Dans la théorie, deux observations suffisent pour cet effet; mais il vaut mieux dans l'application de nos méthodes observer un grand nombre de fois, comme on a déjà fait presque dans tous les ports de la France, la hauteur des grandes marées, et celles des petites marées, les luminaires se trouvant à peu-près dans l'équateur, et prendre des unes et des autres le milieu arithmétique, que j'appelle F pour les grandes marées, et G pour les petites marées.

Il faut ensuite connoître le rapport moyen, qu'il y a entre les forces de la Lune et du Soleil. Nous avons donné plusieurs moyens pour cela dans le corps de cette dissertation, et nous nous croyons bien fondés de le supposer comme 5 à 2. Quoi qu'il en soit, nous nommons ce rapport $\delta : \epsilon$.

Il faut après cela faire attention aux phases de la Lune, ou à l'arc compris entre les deux luminaires dans le moment du passage de la Lune par le méridien: cet arc doit être diminué de 20 degrés (§. VII. Chap. IX.). Nous nommons le sinus de l'arc résultant m, et le cosinus n, et le sinus total 1.

Il faut aussi connoître les distances des luminaires à la Terre: j'appelle d la distance moyenne du Soleil; D sa distance au tems de la marée cherchée; l la distance moyenne de la Lune; L sa distance au tems de la marée cherchée.

Il faut sçavoir encore les déclinaisons des luminaires à l'égard de l'équateur: j'appelle S le sinus de la distance de la Lune au pôle, C son cosinus; T le sinus de la distance du Soleil au pôle; E son cosinus.

Enfin, il faut faire attention à la latitude du lieu, et à la Remarque (a) du IX. Art. que nous avons faite pour l'estimation des latitudes. Nous appellons le sinus de la distance au pôle s et le cosinus c. Toutes ces dénominations faites, je dis que la hauteur de la marée sera

$$\frac{l^3 D^3 \delta + L^3 d^3 \epsilon}{L^3 D^3 (\delta + \epsilon)} \times \frac{n n}{s s} \times \frac{(SSss + CCcc) \delta + (TTss + EEcc) \epsilon}{\delta + \epsilon} \times F.$$

$$+ \frac{l^3 D^3 \delta - L^3 d^3 \epsilon}{L^3 D^3 (\delta - \epsilon)} \times \frac{m m}{s s} \times \frac{(SSss + CCcc) \delta - TTss + EEcc}{\delta - \epsilon} \times G.$$

XVIII.—Je n'ai mis ici cette grande formule, que pour faire voir toute l'étendue et toute l'exactitude de notre théorie et de nos calculs, car les mesures et la table que nous avons donnés au Chapitre IX. ont assez de précision dans une question aussi sujette que celle-ci aux variations accidentelles, qui n'admettent aucune détermination.

Je ne dis rien des marées et de leurs changemens extraordinaires, qui se font dans la zone glaciale, pour ne point grossir trop ce traité, et pour ne point l'embarrasser de choses fort abstraites et assez difficiles. J'ai d'ailleurs déjà exposé en gros et même assez au long ce qui en est.

Quant enfin à l'heure des hautes mers, j'ai fait voir qu'elle n'est point changée par les déclinaisons des luminaires, ni par la latitude du lieu; nous avons donc déjà donné toute la perfection possible dans les Chapitres précédens à cette autre grande question. Pour l'heure des basses mers, qui dépendent beaucoup des déclinaisons des luminaires, et de la latitude du lieu, nous en avons fait voir toutes les variations et propriétés dans ce Chapitre.



CHAPITRE XI.

Qui contient l'Explication et Solution de quelques Phénomènes et Questions, dont on n'a pas eu occasion de parler dans le corps de ce Traité, sur-tout à l'égard des Mers détachées, soit en partie, soit pour le tout, de l'Océan.

I.—SUIVANT quelle progression les eaux montent et descendent dans une même marée, par rapport aux tems donnés.

Cette question dépend de toutes les circonstances que nous avons considérées dans ce traité; mais les variations à l'égard du changement de ces circonstances, ne font pas varier beaucoup la loi, suivant laquelle les eaux montent et descendent; je ne parlerai donc que du cas le plus simple, qui est lorsque la latitude du lieu, et les déclinaisons des luminaires sont nulles, et lorsqu'en même tems les luminaires sont dans leurs syzygies, ou dans leurs quadratures. Que l'on exprime donc tout le tems depuis la haute mer jusqu'à la basse mer par un quart de cercle, dont le rayon est égal à l'unité: je dis que les descentes verticales des eaux depuis la haute mer doivent être exprimées par les quarrés des sinus des arcs, qui représentent les tems donnés. Si l'on considère les marées depuis le commencement du flot, il faudra dire que les élévations verticales des eaux, sont en raison quarrée des sinus, qui répondent aux tems donnés §. III. Chap. V. Ceux qui voudront rendre cette Proposition plus générale, pourront consulter 1: §. VIII. Chap. V. et si on y ajoute enfin les §. VI.

et VII. du Chap. X. on verra facilement, ce qu'il faudroit faire pour tous les cas possibles. Mais la loi générale ne différera pas beaucoup de celle que nous venons d'exposer; et cela d'autant moins que les deux marées d'un même jour, qui devroient être souvent fort inégales, ne laissent pas de se composer à une égalité mutuelle par la raison exposée au long au §. XI. Chap. X. On peut donc se tenir sans peine à la règle que nous venons d'établir.

Il s'ensuit de cette règle, que les baissemens ou élévations des eaux, qui se font dans de petits tems égaux, sont proportionnels aux produits des sinus par les cosinus répondans des arcs horaires; de sorte que si on partage tout le tems du flux ou du reflux également, les variations également éloignées en deçà et en delà de ce terme, sont égales: ces variations sont les plus sensibles au milieu du flux ou du reflux, et la variation totale depuis le commencement du flux ou du reflux jusqu'au milieu, fait précisément la moitié de toute la variation d'une marée. On voit enfin que les variations doivent être insensibles au commencement et à la fin de chaque flux et reflux.

Toutes ces Propositions sont confirmées entièrement par les observations qu'on a faites sur cette matiere, rapportées par M. Cassini dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1720. pag. 360. Il semble seulement qu'il y a une erreur de quelques minutes dans la détermination de l'heure de la basse mer, erreur presque inévitable dans cette sorte d'observations. Mais il faut remarquer, pour voir plus parfaitement l'accord de notre règle avec les observations, que tout le tems du flux et reflux est de six heures lunaires, pendant que les observations ont été prises sur des heures solaires.

II.—Pourquoi il n'y a point de marées sensibles dans la mer Caspienne, ni selon quelques-uns dans la mer Noire, et pourquoi elles sont très-petites dans la mer Méditerranée, et de quelle nature sont ces marées.

On ne sçauroit bien répondre à ces questions, sans considérer auparavant le Problème principal, qui est de sçavoir les marées, lorsque la mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, et c'est un Problème pénible pour le calcul, et assez délicat pour la méthode. Pour le rendre d'abord plus simple, nous supposerons les luminaires en conjonction et dans le plan de l'équateur, et que c'est aussi sous l'équateur, que l'on cherche les marées.

Ressouvenons-nous que sans l'action des luminaires, l'équateur seroit parfaitement circulaire, comme $b g d h$, et que les luminaires se trouvant

comme dans l'océan, ni 6 heures lunaires après, mais au milieu, si la mer a peu d'étendue en longitude. 2°. Que les marées sont les plus grandes aux extrémités orientales et occidentales z et x , et qu'elles sont incomparablement plus petites au milieu t . 3°. Que la haute mer dans l'une des extrémités se fait au même moment que la basse mer dans l'autre extrémité. Voilà en gros les propriétés des marées dans ces mers : le calcul en fera connoître le détail.

Pour ne point ennuyer le lecteur par une trop longue suite de raisonnemens purement géométriques, et dans plusieurs circonstances assez compliquées et chargées de calcul, je ne mettrai ici que le plus précis.

Soit $Bb + Gg = \zeta$, qui marque la variation pour la mer libre de tous côtés : soit l'arc zx , qui marque l'étendue de la mer en longitude $= A$. Le rayon de la Terre que nous prenons pour le sinus total $= 1$; qu'on tire xn perpendiculaire à CB , et soit l'espace $z\alpha nxz = S$. Cela posé, on trouvera d'abord $yzxs = \frac{1}{2} A \zeta$. Cet espace devant être égal à l'espace $yors$, qui est égal à la petite sr multiplié par A , on en tire $sr = \frac{1}{2} \zeta - \frac{S}{A} \zeta$.

Si on suppose après cela $Cn = n$ et $C\alpha = s$, on en aura $sx = n\zeta - \frac{1}{2} \zeta$, et par conséquent $rx = n n \zeta - \zeta + \frac{S}{A} \zeta$, et ce sont les différentes valeurs de rx , en considérant n et S comme variables, qui marquent les différentes hauteurs de la mer au point x , qui est à l'extrémité occidentale de la mer.

De cette valeur rx on peut tirer géométriquement toutes les propriétés des marées, quelque étendue qu'on suppose à la mer, et tout ce que nous avons trouvé pour le point x , peut être déterminé de la même façon pour tel autre point dans l'arc zx qu'on voudra ; mais on remarquera sur-tout une propriété générale, qui est que l'arc horaire compris entre la haute et la basse mer, c'est-à-dire l'arc compris entre la plus grande et la plus petite rx , est toujours de 90 degrés. Pour le démontrer, il faut supposer la différentielle $rx = 0$, et faire $-dS = \frac{nn - ss}{\sqrt{1 - nn}} dn$, à cause de la

valeur constante de A , d'où l'on tirera cette équation $2An\sqrt{1 - nn} + ss = 0$, qui marque déjà la propriété générale que nous venons d'indiquer. Cette propriété donne ensuite la hauteur de la marée, exprimée par la différence de la plus grande et de la plus petite valeur de $rx = \left(2nn - 1 + \frac{n\sqrt{1 - nn} - s\sqrt{1 - ss}}{A} \right) \zeta$, et on remarquera que dans

toutes ces formules, s est donnée en n et en constantes, à cause de l'arc A donné.

Nous appliquerons ces équations générales à deux sortes de cas particuliers ; premierement, lorsque A est de 90 degrés ; et en second lieu, lorsque cet arc est fort petit.

1. Si A est de 90 degrés, on aura $s = \sqrt{1 - nn}$, et le lieu de la haute ou de la basse mer à l'égard du point fixe B sera déterminé par cette equation

$$-2An\sqrt{1-nn} + 2nn - 1 = 0, \text{ qui donne}$$

$$Cn, \text{ ou } n = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{AA+1}}\right)} = 0,9602,$$

qui marque que l'arc xb est d'environ 16 degrés 13 minutes et que la hauteur de la marée sera de 0,844 c. Nous voyons donc que si la mer avoit 90 degrés d'étendue en longitude, la haute mer se feroit dans les syzygies 1 heure 5 minutes plus tard que si toute la Terre étoit inondée, et que la hauteur de la marée seroit de 156 millièmes parties plus petite.

2. Supposons à présent que l'étendue de la mer en longitude soit très-petite, c'est-à-dire, que A exprime un arc circulaire fort petit, et soit la corde de cet arc $= B$: la géométrie commune donne

$$s = n - \frac{1}{2}nBB + \frac{1}{2}\sqrt{4BB - 4nnBB + nnB^2 - B^4}.$$

Et B étant supposée fort petite, on changera la quantité radicale en suite, et l'on négligera les quantités affectées de B^3 (le calcul fait voir à la fin, qu'il faut retenir les termes affectés de BB) et de cette maniere on trouvera

$$s = n - B\sqrt{1-nn} - \frac{1}{2}nBB.$$

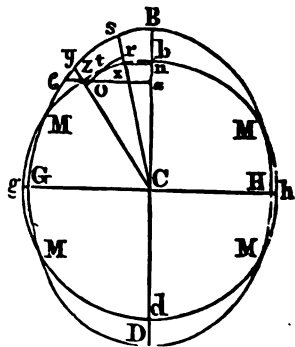
On remarquera après cela, que la différence entre l'arc A et sa corde B , convertie en suite commence par le terme $\frac{1}{2}B^3$, lequel pouvant être négligé pour notre dessein, on mettra A à la place de B , et on aura

$$s = n - A\sqrt{1-nn} - \frac{1}{2}nAA.$$

En substituant dans l'équation exposée ci-dessus

$$2An\sqrt{1-nn} - nn + ss = 0$$

la valeur trouvée pour s , et négligeant toujours les termes affectés de A^3 et de A^4 , nous aurons simplement $n = \sqrt{\frac{1}{2}}$.



L'arc x b est donc pour ce dernier cas de 45 degrés, et la haute mer, si elle étoit sensible, ne se feroit par conséquent que trois heures lunaires après le passage de la Lune par le méridien. La hauteur de la marée étant généralement exprimée, comme nous avons vû ci-dessus, par

$$\left(2nn - 1 + \frac{n\sqrt{1-nn} - s\sqrt{1-s s}}{A} \right) \times \zeta,$$

il faudra substituer dans cette expression les valeurs trouvées pour n et s ; ce que faisant avec les mêmes précautions, que nous avons employées en cherchant la valeur de s , on trouvera à la fin simplement la hauteur de la marée $= A \zeta$.

Cette expression fait voir que dans les petites mers, les hauteurs des marées sont proportionnelles aux étendues que ces mers ont en longitude, et les marées se trouveront par cette analogie. Comme le sinus total est à l'arc longitudinal, que la mer renferme, ainsi la hauteur de marée dans la mer qui est supposée inonder toute la Terre, exprimée par ζ , sera à la hauteur de la marée en question.

Appliquons maintenant tout ce que nous avons trouvé pour en tirer les propriétés des marées dans la Mer Caspienne. Supposons pour cet effet, que dans les conjonctions et oppositions des luminaires, la hauteur des marées grandissimes dans la Mer du Sud (dans laquelle les marées ne sçauroient manquer d'atteindre presque toute la hauteur, qu'elles auroient, si toute la Terre étoit inondée) est sous l'équateur de 8 pieds : c'est la hauteur que les relations de voyages m'ont fait adopter pour la mer libre, et que je crois qu'on remarquera sur les côtes escarpées des petites Isles situées près de l'équateur dans ladite Mer du Sud : cela étant, j'ai démontré dans la Proposition (II.) du XII. §. du Chapitre précédent, que les grandes marées ne seront plus que de 4 pieds à la hauteur de 45 degrés, où je suppose le milieu de la Mer Caspienne. Si nous donnons après cela à cette mer dix degrés d'étendue en longitude, cet arc fait environ la sixième partie du rayon, et la hauteur des grandissimes marées devroit être par conséquent aux extrémités orientale et occidentale de la Mer Caspienne d'environ huit pouces : mais elles seront nulles au milieu de la mer. Je suppose cette agitation de la mer trop petite pour avoir pû être remarquée par les gens qui ont été sur les lieux, et qui sans doute m'ont pas fait un examen fort scrupuleux là-dessus, et qui n'auroient pas manqué de l'attribuer à des causes accidentelles, s'ils avoient remarqué quelque petite élévation et baissement des eaux. J'espère que des observations plus exactes confirmeront un jour ce que je viens d'indiquer sur les marées de la Mer Caspienne.

On doit faire le même raisonnement sur la Mer Noire, qui peut être

considérée comme détachée de la mer Méditerranée, à cause du peu de largeur du Détroit qui est entre deux. Il est à remarquer qu'on a observé dans cette mer des marées, quoique très-petites.

On voit aussi que les marées dans la mer Méditerranée doivent être beaucoup plus petites, que dans l'océan, sur-tout si l'on fait attention que cette mer n'est tout-à-fait ouverte que depuis l'Isle de Chypre jusqu'à celle de Sicile.

III.—Comment les marées peuvent être beaucoup plus grandes sur les côtes, dans les Bayes, dans les Golfes, &c. que dans la Mer Libre de tous côtés.

Pour répondre à cette question, il faut encore faire réflexion à ce que j'ai déjà dit, que si les luminaires restoient à un même lieu, et que le mouvement journalier de la Terre se fit avec une lenteur infinie, les eaux qui inondent la Terre, ne pourroient point manquer d'être dans un parfait équilibre, et les marées auroient par-tout les hauteurs qu'on leur a prescrites dans cet ouvrage, sans que la configuration des côtes ou autres causes semblables les pût déranger, pourvu que l'endroit en question communiquât avec l'océan : d'ailleurs les eaux ne feroient que monter et descendre verticalement, excepté aux côtes, qui alternativement sont baignées, et restent à sec, et auxquelles les eaux auroient quelque mouvement horizontal, quoi qu'infiniment lent, et la direction de ce mouvement des eaux dépendroit dans ce cas, aussi bien que dans les autres, de la direction de la pente des côtes. Mais la vitesse du mouvement journalier de la Terre, qui fait que dans le tems d'un jour tout l'océan doit faire quatre mouvemens et agitations reciproques, rend ces mouvemens fort sensibles. Comme outre cela la mer n'inonde pas toute la Terre, et qu'il y a de grands golfes, canaux, &c. qui par l'élévation et baissement des eaux, sont tantôt plus, tantôt moins pleins, il faut que ceux-ci reçoivent les eaux et les renvoient alternativement vers des endroits qui s'emplieront, pendant que les autres se videront, et de là doivent provenir des mouvemens horizontaux, qu'on appelle communément flux et reflux. Ce sont ces mouvemens horizontaux, qui se faisant vers des endroits plus serrés, peuvent produire les grandes marées, qui vont dans de certains endroits au-delà de 60 pieds ; c'est aussi cette raison qui rend les marées plus grandes dans le Golfe de Venise, qu'elles ne sont dans la mer Méditerranée. C'est ici qu'on peut faire un grand usage de ce que divers auteurs ont donné sur le mouvement des eaux, et je m'assure que moyennant les connoissances qu'on a déjà sur cette matière, on pourroit rendre exactement raison de tous les différens phénomènes, qui s'observent sur les

marées aux endroits différemment situés. Mais un tel examen demanderoit des volumes, et des années pour les faire.

IV.—Quelle est en gros la nature des marées au Détroit de Gibraltar.

Les marées doivent sans doute être beaucoup plus compliquées, et paroître plus irrégulières au Détroit de Gibraltar, que dans d'autres endroits, parce qu'il s'y fait un concours de deux sortes de marées, dont l'une vient de l'océan, et l'autre de la Méditerranée ; et on voit facilement, que si les marées consistoient simplement à élever et baisser les eaux, sans causer des courans, il y auroit sur ces côtes quatre marées par jour, c'est-à-dire, que les eaux monteroient et descendroient quatre fois, parce que les marées des deux mers ne se font pas en même tems : mais comme il se forme des courans reciproques, chaque courant tâche à se conserver, et de là il se forme des lisieres, qui ont chacune des mouvemens différens : celles qui sont sur les côtes de chaque côté, paroissent devoir être attribuées aux marées de la Méditerranée, et deux autres qui les touchent, aux marées de l'océan : on remarque même au milieu une cinquième lisiere, dont le mouvement n'est pas si irrégulier que celui des quatre autres, et qui ne fait voir presque aucun rapport avec la Lune : il semble que ce courant ne doit sa source, qu'à un défaut d'équilibre entre les deux mers.

Je dirai à cette occasion, qu'il peut arriver de même, que les marées sont formées dans un certain port par le mouvement des eaux, qui viennent de deux différens côtés et à divers tems : il semble qu'il faut tirer de là qu'il peut y avoir des endroits où le flot dure constamment plus long-tems que le jusan, et qu'il y en a d'autres où il arrive le contraire. Cette même cause peut encore produire plusieurs sortes de phénomènes particuliers à de certains endroits.

V.—Pourquoi les petites marées sont beaucoup plus inégales, par rapport à leur grandeur, que les grandes marées.

Nous avons déjà vu que les petites marées qui suivent les quadratures, doivent être fort susceptibles de plusieurs irrégularités, tant par rapport au moment de la haute et basse mer, que par rapport à la hauteur de la marée.

Il me semble qu'on doit outre cela remarquer les grandes inégalités qui régnent parmi les petites marées, quoique tout-à-fait régulières ; pouvant sous diverses circonstances croître jusqu'au double, pendant que les grandes marées ne croissent que d'environ un quart. Pour rendre raison de cette observation qu'on a faite, il faut se ressouvenir des circonstances essentielles et fondées dans la nature des marées, qui peuvent les

rendre, tantôt plus grandes, tantôt plus petites dans un même lieu, quoique l'âge de la Lune ne diffère point.

Nous avons vû que ce sont les diverses distances des luminaires à la Terre, et leurs différentes déclinaisons, qui peuvent encore changer les hauteurs des marées, lorsque l'âge de la Lune, et la latitude du lieu sont les mêmes. Le calcul nous a enseigné aussi, que l'effet de la diversité des déclinaisons des luminaires est beaucoup plus petit que celui de la diversité des distances : comme donc la diversité des distances est beaucoup plus grande dans la Lune, que dans le Soleil, et que le Soleil a en même tems beaucoup moins de force que la Lune, on peut pour estimer en gros les variations des petites marées, et les variations des grandes marées, simplement faire attention aux distances de la Lune : nous avons trouvé que la diversité des distances peut faire varier l'action de la Lune depuis 2 à 3, l'action du Soleil que nous considérons comme constante, étant exprimée par l'unité. Cela étant, et les hauteurs des petites marées étant aussi proportionnelles aux différences des actions des deux luminaires, nous voyons que les hauteurs de ces petites marées doivent être contenues dans les termes de $2 - 1$, et $3 - 1$, ou 1 et 2, pendant que les hauteurs des grandes marées, qui sont proportionnelles aux sommes des actions des luminaires, seront renfermées dans les termes de $2 + 1$ et $3 + 1$, c'est-à-dire, de 3 et 4.

Les dits termes sont confirmés par les observations, comme par exemple, par celles qui sont exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1713. pag. 287. et 288. Nous voyons de cette raison, que les variations absolues doivent être à peu-près les mêmes dans les petites marées et dans les grandes marées, et c'est ce que les observations citées confirment aussi; et comme ces variations sont par conséquent plus sensibles dans les petites marées que dans les grandes marées, il faudra peut-être se servir plutôt des premières, que des autres, pour examiner par des observations ce que les diverses circonstances peuvent contribuer pour faire varier les hauteurs des marées.

VI.—Pourquoi les marées étant montées plus haut, et ayant inondé plus de terrain pendant le flot, descendent en même tems davantage, et laissent plus de terrain à sec pendant le jusan, et quelle proportion il y a entre les montées et descentes.

Nous voyons la première question indiquée, comme fort remarquable dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1712. pag. 94. La raison en est que les marées font une espèce de mouvement oscillatoire, ou de balancement; car il y a dans ces balancemens un point d'équilibre,

qui doit passer pour fixe, et au-dessus duquel l'eau doit être censée s'élever dans la haute mer, et se baisser dans la basse mer. On pourroit croire d'abord que les élévations et descentes de l'eau à l'égard du point fixe, sont constamment proportionnelles, et en ce cas notre Problème seroit résolu dans toute son étendue avec beaucoup de facilité. Mais il y a une toute autre proportion bien plus variable et bien plus compliquée, que nous allons rechercher, d'autant que ce n'est pas proprement la hauteur des marées dans le sens que nous lui avons donné jusqu'ici, qu'il importe davantage de connoître dans la navigation pour l'entrée et sortie des vaisseaux dans les ports ou les rades : il s'y agit plutôt de connoître la hauteur absolue des eaux, lorsqu'elles sont arrivées à leur plus grande ou leur plus petite hauteur ; et pour cet effet, il faut sçavoir dans chaque marée, tant l'élévation des eaux à l'égard du point fixe, que leur baissement : jusqu'ici nous n'avons déterminé que la somme de ces variations sous le nom de hauteur de la marée.

Voyons d'abord comment il faudra déterminer le point fixe : il est vrai qu'il est en quelque façon arbitraire, cependant il paroît le plus convenable de le placer là, où atteindroit la surface de la mer, si les marées étoient nulles. Un tel point doit être considéré comme demeurant constamment à la même hauteur ; car les causes qui peuvent le hausser ou le baisser, telles que sont les vents, les courans inégaux, &c. ne sont que passagères et purement accidentelles. Il s'agit donc à présent de sçavoir, combien les eaux montent au-dessus de ce point fixe dans la haute mer, et combien elles descendent au-dessous du même point dans la basse mer. Cette question dépend de toutes les circonstances qui concourent pour former la hauteur absolue des marées, et que nous avons examinées au long avec tout le soin possible. Ce seroit donc se jeter de nouveau dans les mêmes difficultés, si nous voulions traiter la présente question avec la même rigueur, et aussi scrupuleusement, que nous avons fait l'autre ; c'est pourquoi nous ne considérerons que les circonstances fondamentales et principales, qui sont que la Terre est toute inondée, que les luminaires sont dans le plan de l'équateur, et que la latitude du lieu est nulle, faisant abstraction de toutes les causes secondes : ceux qui voudront ensuite une solution plus exacte, n'auront qu'à consulter les Chapitres VIII. et IX. pour y arriver.

Soit donc encore (comme nous avons supposé au Chap. V., b c s d b l'équateur, et que b marque le lieu du Soleil, c celui de la Lune, et z le point de la plus grande élévation des eaux, exprimée par y z ; si l'on prend un arc de 40 degrés z s, le point s marquera l'endroit du plus

grand baissement des eaux, exprimé par $s x$: nous avons démontré là-dessus au VIII. §. du Chap. V. qu'on a généralement

$$y z = \frac{2 b b - 3 \epsilon \epsilon}{3 b b} \times \epsilon + \frac{2 b b - 3 \delta \delta}{3 b b} \times \delta.$$

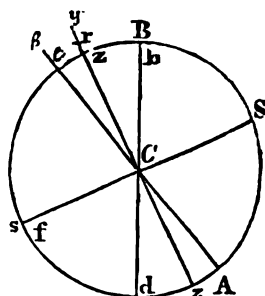
dans laquelle équation b marque le sinus total, ϵ le sinus de l'angle $b C z$, déterminé au §. XI. Chap. V. δ le sinus de l'angle $c C z$, exprimé au §. XIII. Chap. V. c la hauteur des marées entant qu'elles seroient produites par la seule action de la Lune. Nous avons démontré pareillement au III. §. Chap. VIII. qu'en regardant $s x$ comme positive, de negative qu'elle est par rapport à $y z$, on a généralement

$$s x = \frac{b b - 3 \epsilon \epsilon}{3 b b} \times \epsilon + \frac{b b - 3 \delta \delta}{3 b b} \times \delta.$$

Or comme les points z et s , qui sont de niveau, marquent le point fixe dans le sens que nous venons de lui donner, on voit que ces quantités $y z$ et $s x$ marquent précisément l'élévation des eaux au dessus du point fixe, et leur baissement au-dessous du même point, tels que nous sommes proposés de les déterminer. Des valeurs que nous venons de trouver, on pourra tirer les Corollaires suivans.

(a) La différence entre chaque élévation au-dessus du point fixe, et la descente au-dessous du même point, est toujours $= \frac{1}{3} \epsilon + \frac{1}{3} \delta$: d'où nous voyons déjà que l'une croissant ou diminuant, l'autre doit croître ou diminuer aussi, qui est le phénomène observé par M. Cassini. Cette différence fait *environ* le tiers de la plus grande hauteur de marée: je dis *environ*, parce que les quantités ϵ et δ sont variables, quoique leurs variations soient beaucoup plus petites que celles qui résultent des différens âges de la Lune, et à cet égard on peut dire que la différence dont il s'agit ici, est presque constante.

(b) Dans les syzygies (ou plutôt un jour et demi après) les quantités ϵ et δ doivent être supposées $= 0$, et ainsi on a $y z = \frac{2}{3} \epsilon + \frac{2}{3} \delta$, et $s x = \frac{1}{3} \epsilon + \frac{1}{3} \delta$, la montée est donc dans les grandes marées toujours double de la descente. Cette propriété servira à déterminer commodément le point fixe dans chaque port, et elle le donne de 5 pieds 3 pouces plus haut pour Brest, qu'il n'a été choisi par les observateurs, si on la compare avec l'observation, qui est au milieu de la page 94 des Mém. de l'Acad. des Scienc. de 1712.



(c) Dans les quadratures (ou un jour et demi après) il faut faire $\varphi = 0$, et $\sigma = b$, ce qui donne $yz = \frac{2}{3} \delta - \frac{1}{3} \zeta$, et $sx = \frac{1}{3} \delta - \frac{2}{3} \zeta$: d'où l'on voit que la montée et descente des eaux à l'égard de notre point fixe, ont une raison variable dans les petites marées, qui dépend du rapport qui se trouve alors entre la force lunaire δ , et la force solaire ζ . Nous avons supposé dans cet ouvrage ce rapport moyen comme 5 à 2, et ce rapport posé, il faut dire que dans les petites marées, l'élévation des eaux au-dessus de notre point fixe, est 8 fois plus grande que leur baissement au-dessous du même point. Dans les marées minimales nous avons supposé $\delta = 2 \zeta$, et dans les plus grandes des petites marées $\delta = 3 \zeta$.

(d) Nous avons fait voir, que le point z n'est jamais éloigné beaucoup du point ζ , cela étant et faisant le sinus de l'angle $b c \zeta$ (qui marque l'âge de la Lune) $= m$, on pourra supposer $\varphi = 0$ et $\sigma = m$, ce qui donne

$$yz = \frac{2}{3} \zeta + \frac{2}{3} \delta - \frac{m m}{b b} \zeta, \text{ et } sx = \frac{1}{3} \zeta + \frac{1}{3} \delta - \frac{m m}{b b} \zeta.$$

Si l'on applique toutes ces règles aux observations faites en différens tems et lieux, on y trouvera un grand accord, si l'on choisit bien la juste proportion entre les quantités δ et ζ . Mais on remarquera dans cet examen, que les vents et les courans peuvent faire varier le point fixe que nous avons adopté.

CONCLUSION.

Je finirai ce discours par quelques réflexions sur notre théorie. Elle suppose avant toutes choses une pesanteur vers les centres du Soleil et de la Lune, pareille à celle qui se fait vers le centre de la Terre, et que cette pesanteur s'étend au-delà de la région de la Terre. C'est le seul principe qui nous soit absolument nécessaire, et il n'y a personne qui le conteste. La rondeur des luminaires prouve suffisamment la pesanteur qui se fait vers le centre; et quelle raison pourroit-on avoir pour donner des limites à cette pesanteur? Aussi a-t-elle été reconnue depuis les siècles les plus reculés; mais on n'en a connu toute l'évidence et toutes les loix, que depuis la philosophie immortelle de M. Newton. Les premières conséquences que nous avons tirées de ce principe pour l'explication des marées, sont purement géométriques. Nous pouvons donc être assurés de connoître la vraie cause des marées, quoique nous en ignorions encore la cause première, qui est la cause générale et physique de la pesanteur. S'il y avoit quelqu'un qui eût deviné cette première cause, il

méritoit d'autant plus la préférence, que son système renfermeroit nécessairement la vraie cause universelle de la pesanteur : cette conséquence sera la pierre de touche pour prouver la vérité d'un tel système sur les marées. Il en est de ceci, comme si l'on demandoit, par exemple, pourquoi la surface de l'eau dans un reservoir se met toujours horizontalement : on voit qu'on ne sçauroit en dire la première cause, sans qu'elle renferme la vraie théorie sur la pesanteur et sur la fluidité, qui seules peuvent être la vraie cause du phénomène en question. Cette seule réflexion m'a fait quitter quelques conjectures qui se présentoient à mon esprit sur la cause matérielle des marées, quoi qu'elles me parussent d'ailleurs assez plausibles. Je n'ai fait au reste en employant ce principe, que ce que Kepler a déjà fait. M. Newton est allé beaucoup plus loin sur cette matière, après avoir démontré auparavant que la pesanteur vers chaque corps dans le système du monde diminue en raison quarrée reciproque des distances : d'où il a tiré plusieurs nouvelles propriétés sur les marées, lesquelles s'accordant avec les observations, pourroient confirmer davantage son principe sur la diminution de la pesanteur, s'il avoit besoin d'autres preuves. Ce principe n'a pourtant pas beaucoup d'influence, si je me souviens bien, sur les variations des marées, qui dépendent des phases de la Lune, des déclinaisons des luminaires et de la latitude des lieux, soit à l'égard des hauteurs des marées, soit à l'égard des marées. Il ne sert principalement qu'à déterminer au juste les variations qui dépendent des différentes distances des luminaires à la Terre, et que les observations n'ont pû déterminer avec assez de précision ; il n'y en a cependant aucune qui lui soit contraire, et plusieurs observations bien détaillées, sont tout-à-fait conformes aux résultats que ce principe donne. On remarquera enfin que ce que j'ai dit sur la pesanteur terrestre, que j'ai considérée comme formée par l'attraction universelle de la matière, n'a absolument aucun rapport avec aucune variation des marées ; ces marées pourront subsister telles qu'elles sont, quelle que soit la nature de la pesanteur à cet égard : tout cet examen ne nous a servi que par rapport à la question, quelle devoit être la hauteur absolue de la hauteur des marées, sans le concours d'une infinité de causes secondes, qui peuvent augmenter et diminuer ces hauteurs absolues, de sorte que quel qu'eût été le résultat de ces recherches, notre théorie n'en eût pû souffrir, aucune atteinte. J'espère avec tout cela, qu'on n'aura pas trouvé ces recherches inutiles à l'égard de plusieurs circonstances qui en ont été éclaircies, outre que nos déterminations donnent, en choisissant les hypothèses les plus vraisemblables, des nombres tels que la nature de la chose

paroît exiger. Nous pouvons donc être tout-à-fait sûrs de n'avoir rien admis d'essentiel dans toutes nos recherches, qui ne soit au-dessus de toute contestation.

Quant à l'application de nos principes, à l'usage que j'en ai fait, et au succès de mon travail, ce n'est pas à moi à faire cet examen, sur-tout ne pouvant le faire, sans entrer dans un certain parallele avec un aussi grand homme qu'étoit M. Newton. Si j'ai eu quelques succès, je dois avouer à l'honneur de ce sçavant philosophe, que c'est lui qui nous a mis en état de raisonner solidement sur ces sortes de matieres ; et si j'ose me flatter de quelque mérite, c'est celui d'avoir traité notre sujet avec une attention et une exactitude conforme aux grande vûës de l'Academie, et au respect qu'on doit à cet illustre corps.

DE

CAUSA PHYSICA

FLUXUS ET REFLUXUS MARIS.

A D.D. MAC-LAURIN MATHEMATICARUM PROFESSORE,

E SOCIETATE ACADEMIÆ EDINBURGENSIS.

Opinionum commenta delet dies, naturæ judicia confirmat.

SECTIO I.

PHÆNOMENA.

PHILOSOPHI motum maris triplicem olim agnoverunt *, diurnum, menstruum et annuum; motu diurno mare bis singulis diebus intumescit defluitque, menstruo æstus in syzygiis luminarium augentur, in quadraturis minuuntur, annuo denique æstus hyeme quàm æstate fiunt majores: verùm phænomena hæc sunt paulò accuratiùs proponenda.

I. Motus maris diurnus absolvitur horis circiter solaribus 24 minutisque primis 48, intervallo scilicet temporis quo Luna motu apparente a meridiano loci cujusvis digressa ad eundem revertitur. Hinc altitudo maris maxima contingit Lunâ appellente ad datum situm respectu meridiani loci dati; verùm hora solaris in quam incidit æstus singulis diebus retardatur, eodem ferè intervallo quo Lunæ appulsus ad meridianum loci. Atque hic motus adeò accuratè ad motum Lunæ componitur, ut, secundùm observationes a celeb. D. Cassini allatas, ratio sit habenda horæ in quam incidit vera conjunctio vel oppositio Solis, et æquatio a

* Plin. Lib. II. Cap. XCIX.

motu Lunæ desumpta adhibenda, ut tempus quo mare ad maximam assurgat altitudinem die novilunii vel plenilunii accuratiùs definiatur. In æstuariis autem diversi existunt æstus tempore, ut loquitur Plinius, non ratione discordes. Duo æstus qui singulis diebus producuntur, non sunt semper æquales; matutini enim majores sunt vespertinis tempore hyberno, minores tempore æstivo, præsertim in syzygiis luminarium. (*)

II. De motu maris menstruo tria præcipuè sunt observanda. 1. Æstus fiunt maximi singulis mensibus paulò post syzygias Solis et Lunæ, decrescunt in transitu Lunæ ad quadraturas, et sunt paulò post minimi. Differentia tanta est, ut ascensus totius aquæ maximus sit ad minimum ejusdem mensis, secundùm quasdam observationes, ut 9 ad 5, et in nonnullis casibus differentia observatur adhuc major. 2. Æstus sunt majores, cæteris paribus, quò minor est distantia Lunæ a Terra, idque in majori ratione quàm inversa duplicata distantiarum, ut ex variis observationibus colligitur. Ex. gr. anno 1713. ascensus aquæ in Portu Bristonico, (b) referente eodem cl. viro, 26^o Febr. fuit pedum 22 digitorum 5. et Martii 1^o pedum 18. digit. 2. Declinatio Lunæ in utroque casu ferè eadem; in priori distantia Lunæ partium 953, in posteriori partium 1032, quarum distantia mediocris est 1000. Est autem quadratum numeri 1032 ad quadratum numeri 953, ut 22 pedes 5 digit. ad 19 pedes 1 $\frac{1}{2}$ digitos; ascensus autem aquæ in posteriori casu fuit tantùm 18 ped. cum 2 digitis. 3. Æstus sunt, cæteris paribus, majores, cùm Luna versatur in circulo æquinociali, et minuuntur crescente Lunæ declinatione ab hoc circulo.

III. Æstus fiunt, cæteris paribus, majores, quò minor est distantia Solis a Terra; adeoque majores hyeme cæteris paribus, quàm æstate. Differentia verò longè minor est quàm quæ ex diversis Lunæ distantis oritur. Ex. gr. distantia Lunæ perigeæ fuerunt æquales Junii 19, 1711. et Decembri. 28, 1712. ascensus aquæ priore die pedum 18 digit. 4. posteriori pedum 19. digit. 2.; declinatio autem Lunæ fuit paulò minor in hac quàm in illa observatione. (c)

Porro in diversis locis æstus sunt diversi, pro varia locorum latitudine, eorumque situ respectu oceani unde propagantur, pro ipsius oceani amplitudine, et littorum fretorumque indole, aliisque variis de causis.

(*) Mém. de l'Acad. Royale, 1710. 1712. et 1713. (c) Mém. de l'Acad. Royale, 1710. 1712. et 1713.

(b) Ibid.

SECTIO II.

PRINCIPIA.

Phænomenis æstus maris insignioribus breviter recensitis, progredimur ad principia, unde horum ratio est reddenda. Liceat tamen præfari nobilissimam quidem, sed simul difficillimam esse hanc philosophiæ partem, quæ phænomenorum causas investigat et explicat. Ea est naturæ subtilitas, ut non sit mirum causas primarias, solertiam philosophorum plerumque effugere. Qui omnium phænomenorum rationes, exponere, integramque causarum seriem nobis exhibere in se susceperunt, illi certè magnis suis ausis hucusque exciderunt. Philosophiam quidem perfectissimam viri clarissimi sibi proposuerunt exstruendam, qualem tamen humanæ sorti competere fas est dubitare. Præstat igitur tantorum virorum successu minùs felici edoctos, ipsius naturæ vestigia cautè et lentè sequi. Quòd si phænomena ad generalia quædam principia reducere possimus, horumque vires calculo subjicere, hisce gradibus aliquam veræ philosophiæ partem assequemur; quæ quidem manca seu imperfecta erit, si ipsorum principiorum causæ lateant; tanta tamen inest rerum naturæ venustas, ut ea pars longè præstet subtilissimis virorum acutissimorum commentis.

Motus maris cuivis vel leviter perpendenti manifestum est luminarium, Lunæ præsertim, motibus affines esse et analogos. Eadem est periodus motûs maris diurni ac Lunæ ad meridianum loci, eadem motûs menstrui ac Lunæ ad Solem; utriusque luminaris vis in motu maris generando hinc elucet, quòd æstus sint majores quò minores utriusque distantiae a Terra; adeò ut nullus sit dubitandi locus, motum maris esse aliquâ ratione ad motum Lunæ et Solis compositum. Quales autem dicemus illas esse vires quæ a Luna et Sole propagatæ (aut ab his aliquo modo pendentes) aquam bis singulis diebus tollunt et deprimunt; quæ in syzygiis luminarium conspirant, quadraturis pugnant; in minoribus utriusque distantii augentur, in majoribus minuuntur; quæ in minori Lunæ declinatione fortiores, in majori debiliores sunt; et nonnunquam majorem motum cient cùm Sol et Luna infra horizontem deprimuntur, quàm cùm in meridianis superiori ambo dominantur. Fuerunt viri celeberrimi qui æstum maris pressione quâdam Lunæ cieri putarunt. Verùm causam et mensuram hujus pressionis non ostenderunt, nec quo pacto motus maris varii hinc oriri possint satis clarè indicarunt, multò minùs motus illos (hoc principio posito) ad calculum revocare docuerunt.

Sagacissimus Keplerus mare versùs Lunam gravitare, æstumque maris hinc cieri olim monuit. Newtonus, postquàm leges gravitatis detexisset, invenit æquilibrium maris non tam turbari ipsius, gravitate versùs Lunam, quàm ex inæqualitate vis quâ particulæ maris tendunt ad Lunam et Solem pro diversis suis distantiiis ab horum centris, primusque motum maris ad certas leges, et ad calculum revocare docuit. Fattendum quidem est gravitatis causam ignotam esse vel saltem obscuram; corpora tamen non sunt ideò minùs gravia. Sint qui asserant corpora nullo impulsu aut vi externâ, sed vi quâdam innatâ se mutuò appetere; verùm non æquum est horum somnia veritati afficere. Alii statim confugiant ad immediatum Supremi Auctoris imperium, ast neque horum nimia festinatio probanda est; neque illorum fastidium qui tot naturæ testimoniis non attendunt quoniam causa gravitatis est obscura. Vis gravitatis est nobis adeò familiaris, ejusque mensura adeò pro comperto habetur, ut hâc ad alias vires æstimandas ferè semper utamur; quàm in Cœlis, non minùs quàm in Terris dominari, et secundùm certam legem augeri et minui demonstravit vir eximius tanta cum evidentia ut majorem frustra desideres in ardua et difficili hâc philosophiæ parte, quæ de rerum causis agit.

Newtonus argumento singulari ostendit, Lunam urgeri versùs centrum Terræ vi quæ (habitâ ratione distantiarum) cum gravitate corporum terrestrium planè congruit; quali Terram versùs Lunam pariter urgeri æquo jure censendum est. Cùm corpus aliquod versùs aliud pellitur, inde quidem haud sequitur hoc versùs illud simul urgeri. Verùm quid de gravitate corporum cœlestium sentiendum sit, ex iis quæ comperta sunt de gravitate corporum terrestrium (aliisque viribus similibus) optimè dignoscitur; cùm per hanc ad illam agnoscendam ducamur, sintque phænomena omninò similia. Mons gravitat in Terram, et si Terra non urgeret montem vi æquali et contrariâ, Terra a monte pulsa pergeret cum motu accelerato in infinitum. Porrò status cujusvis systematis corporum (i. e. motus centri gravitatis) necessariò turbatur ab omni actione cui non æqualis et contraria est aliqua reactio, ita ut vix quidquam perenne aut constans dici possit in systemate si hæc lex locum non habeat. Cùmque Terræ partes ita semper in se mutuò agent, ut motus centri gravitatis Terræ nullâtenus turbetur a mutuis corporum aut agentium quorumcunque conflictibus, sive intra sive extra superficiem sitorum; eademque lex obtineat in viribus magneticis, electricis aliisque, teste experienciâ, jure concludit Newtonus Lunam non tantùm in Terram, sed hanc quoque in illam gravitare, et utramque circa commune

centrum gravitatis moveri, dum hoc centrum circa totius systematis centrum gravitatis (*) continuò revolvitur.

Gravitatem, cæteris paribus, proportionalem esse quantitati materiæ solidæ corporis, accuratissima docent experimenta; idemque, e calculo gravitatis corporum cœlestium comprobatur; quin gravitatem quoque sequi rationem materiæ corporis versùs quod dirigitur, ex principio memorato aliisque argumentis colligitur. Similis est ratio aliarum virium quæ in naturâ dominantur. Lucis radii ex. gr. magis refringuntur, cæteris paribus, quò densiora sunt corpora quæ subintran. Terræ partes versùs se mutuò gravitant, non versùs illud punctum fictum quod centrum Terræ appellamus; quod cùm rationi et analogiæ naturæ sit maxime consentaneum, tum pulcherrimè confirmatur accuratissimis experimentis quæ in boreali Europæ parte nuper instituerunt viri clarissimi ex Academiâ Regiâ Parisiensi. Causa gravitatis (quæcumque demum sit) latè dominatur; cùmque sit diversa in diversis distantiiis, non est mirandum, ejus vim pendere quoque a magnitudine illius corporis, versùs quod alia impellit. Fatemur vim hanc corpori centrali improprie tribui; expedit quidem brevitate gratiâ sic loqui, id autem sensu vulgari, non philosophico est intelligendum.

Hæc breviter tantùm hîc attingimus. Newtonus postquàm definivisset vim Solis ad aquas turbandas ex differentiâ diametri æquatoris et axis Terræ (quam approximatione quâdam suâ investigaverat) per regulam auream quærit breviter ascensum aquæ ex vi Solis oriundum. Verùm quamvis elevatio aquæ, quæ sic prodit, parum a verâ differat, cùm tamen Problemata hæc sint diversi generis, quorum prius pendet a quadraturâ circuli, posterius autem a quadraturâ hyperbolæ seu logarithmis, ut postea videbimus; sitque dubitandi locus an a priori ad posteriorem elevationem determinandam, transitus adeò brevis sit omni ex parte legitimus, vel etiam an methodus quâ figuram Terræ definiverat sit satis accurata; cùmque vires subtilissimæ motum maris producant, quæ nullos alios sensibiles edunt effectus, adeò ut levissima quæque in hac disquisitione aliqujus momenti esse possint; propterea existimavi me facturum operæ prætium, si aliam aperirem viam quâ calculus in hisce Problematibus ex genuinis principiis accuratissimè institui poterit.

Repetenda imprimis sunt pauca ex Newtono, postea viam diversam sequemur. Sit L Luna, T centrum Terræ, B b planum rectæ L T

(*) Suspiciari licet aliquam obliquitatis eclipticæ variationem, de quâ sermo est apud astronomos, ex motu Solis circa centrum systematis oriri: indicio erit hanc esse phænomeni causam, si constiterit illam variationem analogiam servare cum motu Jovis planetarum maximâ.

quidem exiguae; cum autem vires quibus Luna et Sol in aquas agunt, in experimentis pendulorum et staticis nullos producant effectus sensibiles, tantos autem motus in aquis oceani generent, suspicari licet vires tantillas ad aquae motus augendos aliquam ex parte conducere.

SECTIO III.

De figurâ quam Terra fluida æqualiter densa indueret ex inæquali particularum gravitate, versùs Lunam aut Solem.

Expositis phænomenis æstûs maris et principiis generalibus unde celeberrimi phænomeni ratio petenda videtur, progredimur nunc ad figuram determinandam quam Terra fluida viribus Lunæ vel Solis suprâ explicatis, agitata assumeret; præmittenda autem sunt quædam Lemmata quibus hæc disquisitio aliàs difficillima faciliè perfici poterit.

(+) LEMMA I.

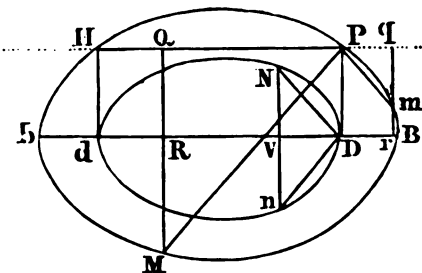
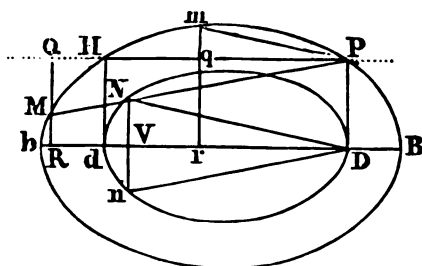
(†) Hoc Lemma ad demonstrandum Corol. 4. proponitur, quod Corollarium ad Propositionem sequentem reducit, quæ facillimè analyticè demonstrari potest.

THEOREMA.

A puncto quovis ellipseos, ducantur ad ellipsim tres lineæ P H, P M, P m, prior quidem P H sit axi parallela, reliquæ P M, P m faciant cum ipsâ æquales quosvis angulos M P H, m P H; a punctis P, H, M et m ducantur perpendiculares ad P H et ad axim P D, H d, Q M R, m q r et super D d describatur ellipsis similis priori, ducanturque a puncto D ad eam ellipsim lineæ D N, D n lineis P m, P M parallelæ, denique ducatur N n quæ secet axim in V, dico quod $2 D V = P Q + P q = D R + D r$, si puncta Q et q cadant ab eadem parte puncti P, vel quod $2 D V = P Q - P q = D R - D r$ si puncta Q et q cadant ad partes diversas puncti P.

Primò, quoniam ex constructione, lineæ D N, D n æquales faciunt angulos cum axe D d, facile deducitur lineam N V n esse axi perpendicularem, ideòque si radius sit ad tangentem anguli Q P M, ut I ad t, et D V dicatur z, erit $N V = t z$; et pariter si P Q aut P q vel eorum æquales D R aut D r dicantur x, M Q vel m q dicentur t x.

Axiæ major sit ad minorem in utraque ellipsi ut a ad b, dicaturque B D, f, D b = g, D P = h, et D d = g - f = l, erit per naturam ellipseos $a^2 : b^2 = f g : h^2$, et pariter erit $a^2 : b^2 =$



$$= 1 - z : z \text{ et componendo } \frac{t^2 a^2 + b^2}{t^2} : \frac{b^2}{t^2} \\ = a^2 t^2 + b^2 : b^2 = 1 : z = \frac{b^2 l}{a^2 t^2 + b^2} \\ = D V.$$

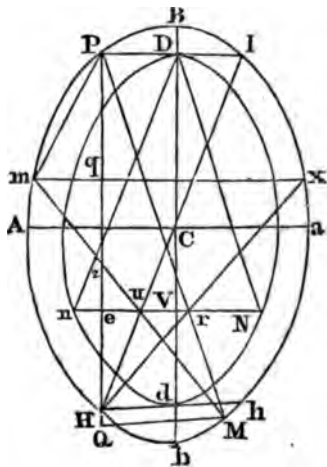
In primo autem casu in quo Q et q sunt ab eadem parte puncti P, erit $R M = h - t z$

$M m$, erit $q z : z m :: G E : C G$. Unde $M z \times q z : H z \times z P :: C G \times G E : C B^2$. Verùm $H z \times z P : z u \times z P :: H z : z u :: G g : C G$. Quare ex æquo $M z \times z q : z u \times z P :: G g \times G E : C B^2$. Est autem rectangulum sub $G g$ et $G E$ æquale quadrato ex semi-diametro $C B$ per notam proprietatem ellipseos, cùm $C I$ sit conjugata semi-diametro $C G$, et $C B$ ipsi $C A$. Proinde $M z \times z q = z u \times z P$, et $z q : z u :: z P : z M$, adeoque $q u$ parallela rectæ $P M$. Q. e. d.

Cor. 1. Recta $P Q$ dividitur harmonicè in q et z vel $P Q : P q :: Q z : q z$. Quippe ducatur $u e$ parallela ipsi $m x$, occurratque rectæ $H P$ in e , tum erit $P z : q z :: P M : q u$ (ob parallelas $P M$, $q u$) :: $P Q : q e$. Unde $P q : q z :: P e : q e :: q e : e z :: P e + q e : q e + e z ::$ (quoniam $Q e$, $e q$ sunt æquales) $P Q : Q z$.

Cor. 2. Occurrat recta $m x$ ellipsi in x , jungatur $H x$ quæ occurrat rectæ $P M$ in r , juncta $u r$ erit parallela $m x$. Quippe sit $I h$ parallela rectæ $H P$ et occurrat ipsi $m x$ in o ; tum $o x$ erit æqualis rectæ $q m$ et $I o : o x :: P q : q m :: P Q : Q M$; adeoque $I x$ erit parallela ipsi $P M$. Verùm cùm $I H$ sit diameter ellipseos et ad x punctum in ellipsi situm ductæ sint rectæ $I x$, $H x$ ab extremitatibus diametri $I H$, erunt hæ parallelæ duabus diametris conjugatis, ex naturâ ellipseos. Quare cùm ex punctis H et M eductæ sint duæ rectæ $H x$ et $P M$ respectivè parallelæ duabus diametris conjugatis, quæ sibi mutuò occurrunt in r , juncta $u r$ erit parallela rectæ $x m$ per hoc Lemma.

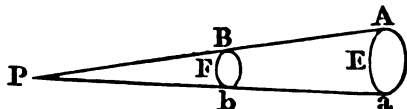
Cor. 3. Sit recta $H P$ nunc parallela axi ellipseos, eritque angulus $H P M$ æqualis angulo $H P m$, quoniam $Q M : q m :: Q z : q z :: P Q : P q$ per *Cor. I.* Ducantur porrò $H h$ et $P I$ parallelæ alteri axi $A a$ et occurrant axi $B b$ in D et d ; super axem $D d$ describatur ellipsis similis ellipsi $A B a b$ et similiter posita cui occurrat recta $u r$ producta in N et n ; occurrat $u r$ axi $D d$ in V , eritque $V N$ vel $V n$ æqualis rectæ $e r$, et si jungantur $D n$, $D N$, erunt hæ rectæ respectivè parallelæ rectis



$P M$, $P m$. Nam $P e : e r :: P q : q m$ et $H e : e r :: H q : q x$, unde $H e \times P e : e r^2 :: H q \times q P : m q \times q x :: C B^2 : C A^2$. Sed rectangulum $D V \times V d : V N^2 :: C B^2 : C A^2$; $d V = H e$, $D V = P e$, adeoque $D V \times V d = H e \times P e$, unde $V N^2 = e r^2$,

LEMMA III.

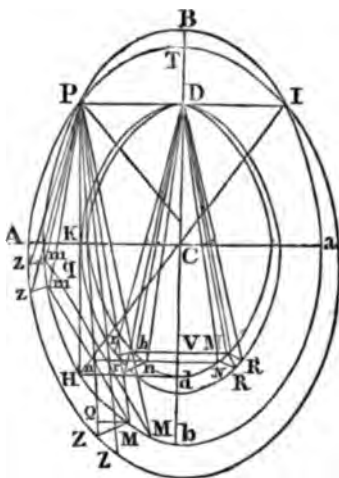
Ponamus particulas corporum versùs se mutuò gravitare viribus decrescentibus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum a se invicem, sintque $PAEa$, $PBFb$ similes pyramides vel conî ex materiâ hujusmodi homogeneâ compositi, eritque gravitas particulæ P in solidum $PAEa$ ad gravitatem ejusdem particulæ in solidum $PBFb$ ut PA ad PB , vel ut homologa quævis latera horum solidorum.



Gravitas enim particulæ P in superficiem quamvis AE a A puncto P concentricam est ut superficies hæc directè et quadratum radii PA inversè, adeoque est semper eadem in quâvis distantîâ PA . Quare gravitas particulæ P versùs totum solidum $PAEa$ erit ad gravitatem ejusdem particulæ versùs totum solidum $PBFb$ ut PA ad PB .

Cor. 1. Hinc gravitates quibus particulæ similiter sitæ respectu solidorum similium et homogeneorum versùs hæc solida urgentur, sunt ut distantie particularum a punctis similiter sitis in ipsis solidis, vel ut latera quævis solidorum homologa. Quippe hæc solida resolvi possunt in similes conos vel pyramides, vel similia horum frusta, quæ vertices habebunt in particulis gravitantibus.

Cor. 2. Hinc etiam facilè sequitur (*) quòd si annulus ellipticus, figuris similibus $DBa b$, $Dn d N$ terminatus, circà axem alterutrum revolvatur, gravitatem particulæ intra solidum sic genitum sitæ, vel in interiori ejus superficie positæ, versùs hoc solidum evanescere; quoniam si recta quævis ellipsis hisce similibus et similiter positis occurrat, æqualia semper erunt rectæ segmenta extrema quæ ab ellipsis intercipiuntur (ut facilè ostenditur ex naturâ harum figurarum) adeoque vires æquales et oppositæ in hoc casu se mutuò destruent. Hinc verò sequitur quòd si $ABa b$ sit sphærois genita

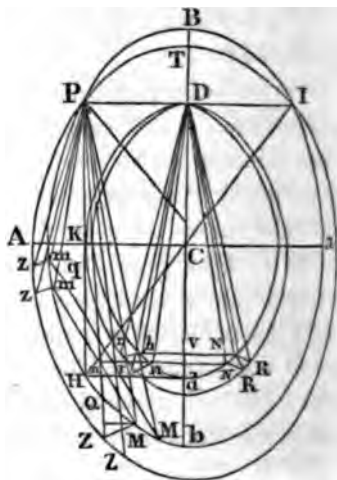


(*) Vid. Newt. Lib. I. Prop. XCI. Cor. 3.

motu ellipseos circà alterutrum axem, sintque B et D particulæ quævis in eodem semi-diametro sitæ, gravitatem particulæ B versùs sphæroidem fore ad gravitatem particulæ D ut distantia C B ad distantiam C D, per Corollarium præcedens.

LEMMA IV.

Sit A B a b sphærois genita motu semi-ellipseos A B a circà axem A a, P particula quævis in superficie solidi, sit P K axis normalis in K; et P D axi parallela occurrat plano B b (quod axi supponitur normale) in D. Resolvatur vis quâ particula P gravitat versùs sphæroidem in duas vires, alteram axi parallelam, alteram eidem perpendiculararem, eritque prior æqualis vi quâ particula K in axi sita tendit ad centrum solidi, posterior autem æqualis vi quâ particula D urgetur versùs idem centrum.



Producatur P K donec rursùs occurrat ellipsi generatrici in H, ducatur H d parallela axi A a quæ occurrat axi B b in d, concipiamus solidum D n d N simile ipsi B A b a et similiter positum describi super axem D d. Horum solidorum sectiones ab eodem plano resectæ erunt semper ellipses similes et similiter positæ, uti notum est et facillè ostenditur. Sint igitur B A b a, D n d N hujusmodi figuræ a plano P A b I B P, quod semper transire ponatur per datam rectam P D I resectæ ex similibus hisce solidis. Continueat planum P z Z I T cum plano priori angulum quàmminimum et faciat sectiones similes P z Z I T, D r R D et similiter positas in prædictorum solidorum superficiebus. Hisce positis, imprimis ostendemus vi quâ particula P urgetur versùs duo frusta quæ planis P b I, P Z I planis P B I, P T I continentur, si reducatur ad directionem P K, æqualem fore vi quâ particula D urgetur versùs frustum planis D n N D r R D terminatum.

Sint enim N n, N' n' duæ ordinatæ ex interiori ellipsi ad axem D d sint (*) P M, P m, P M' et P m' respectivè parallelæ rectis D N, D n.

(*) In hac figurâ describendâ rectas N R, perspectivæ, sed eâ ratione quâ facillimè dig-
N' R', &c. non duximus secundùm regulas nosci possint.

$D N'$ et $D n'$; sint porro plana $D N R$, $D N' R'$, $D n r$, $D n' r'$, $P M Z$, $P M' Z'$, $P m z$, $P m' z'$ plano $P b I B$ perpendicularia quæ alteri plano, $P z Z I T$ occurrant in rectis $D R$, $D R'$, $D r$, $D r'$, $P Z$, $P Z'$, $P z$, $P z'$, respectivè. His positis, quoniam anguli $N D N'$ et $M P M'$, $n D n'$ et $m P m'$, ponuntur semper æquales; et rectæ $P M$ et $D N$, $P m$ et $D n$, æqualiter semper inclinantur ad $P I$ communem planorum sectionem; si angulus $N D N'$ et inclinatio planorum $P b I B$, $P Z I T$ ad se invicem continuò minui supponantur donec evanescant, erunt gravitates particulæ D , in pyramides $D N N' R' R$, $D n n' r' r$ et particulæ P in pyramides $P M M' Z' Z$, $P m m' z' z$ ultimo in ratione rectarum $D N$, $D n$, $P M$ et $P m$ respectivè per Lemma III. Eædemque vires secundùm rectas axi $A a$, perpendiculares æstimatæ erunt ut rectæ $D V$, $D v$, $P Q$, $P q$ respectivè. Unde cùm $P Q \mp P q = 2 D V$ per Corol. 4. Lem. I. sequitur vim quâ particula P urgetur versùs axem $A a$, gravitate suâ in pyramides $P M M' Z' Z$, $P m m' z' z$ æqualem esse vi, quâ particula D urgetur gravitate suâ versùs pyramides $D N N' R' R$, $D n n' r' r$. Quare si plana $D N R$, $P M Z$ sibi mutuò semper parallela et plano $P b I B$ perpendicularia moveantur semper circà puncta D et P (rectis scilicet $D N$, $P M$ procedentibus semper in plano $P b I B$, et rectis $D R$, $P z$ in plano $P Z I T$) erunt vires quibus particula P urgetur versùs axem ex gravitate suâ in frusta motu planorum $P M Z$, $P m z$ sic descripta, æquales semper viribus, quibus particula D urgetur versùs eundem axem gravitate suâ in frusta motu planorum $D N R$, $D n r$ descripta; unde sequitur particulam P urgeri eâdem vi secundùm rectam $P K$, gravitate suâ in frusta planis $P b I$, $P z I$, et planis $P B I$, $P T I$ contenta, quâ particula D tendit versùs frusta planis $D n N D$, $D r R D$ terminata. Proinde cùm hæ vires secundùm rectas axi totius solidi perpendiculares æstimatæ sint etiam æquales, et par sit ratio virium quibus particulæ P et D urgentur versùs frusta quævis alia similiter ex solidis resecta, sequitur particulam P æqualiter urgeri versùs axem gravitate suâ in solidum exterius, et particulam D gravitate suâ in solidum simile interius, vel etiam in solidum exterius, cùm hæ vires sint eædem per Corol. 2. Lem. III.

Simili planè ratione colligitur vim, quâ particula P urgetur secundùm rectam axi parallelam, æqualem esse vi, quâ particula K in axe sita urgetur versùs centrum solidi.

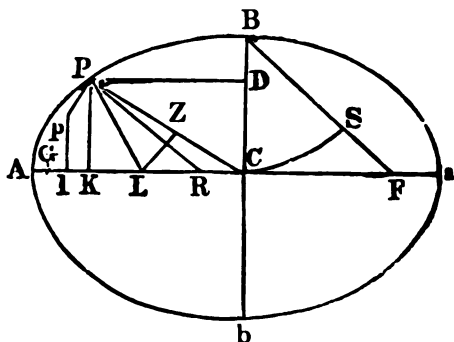
Cor. 1. Particulæ igitur quævis sphæroidis æqualiter ab axe vel æquatore solidi distantes æqualiter versùs axem vel æquatorem urgentur. Viresque quibus particulæ quævis urgentur versùs axem sunt ut illarum

distantiæ ab axe, et vires quibus urgentur versùs planum æquatoris, sunt ad se invicem, ut illarum distantiæ ab hoc plano.

Cor. 2. Repræsentet *A* vim quâ sphærois urget particulam in axis termino *A* sitam, *B* vim quâ idem solidum urget particulam *B* in circumferentiâ circuli medii inter *A* et *a* positam; sumatur *K R* ad

K C, ut $\frac{A}{C A}$ est ad $\frac{B}{C B}$, jun-

gatur *P R*, et particula *P* tendet versùs sphæroidem in recta *P R*, vi quæ huic rectæ semper est proportionalis. Vis enim quâ particula *D* urgetur versùs centrum solidi, est ad *B*, ut *C D* ad *C B*, per *Cor.*



2. *Lem. III.* Similiter vis quâ particula *K* urgetur versùs solidi centrum est ad *A*, ut *C K* ad *C A*. Quare per *Lemma IV.* vis quâ particula *P* urgetur secundùm rectam *P K* axi normalem est ad vim, quâ urgetur secundùm rectam *P D* axi parallelam, ut $\frac{P K \times B}{C B}$ ad $\frac{C K \times A}{C A}$;

adeoque ut $P K \times K C$ ad $C K \times K R$. i. e. ut *P L* ad *K R* ex constructione. Quare particula *P* urgetur secundùm rectam *P R*, his viribus conjunctis, et vis composita est ad *B*, ut *P R* ad *B C*. Quo verò pacto vires *A* et *B* computari possint, postea ostendemus.

PROPOSITIO I.—THEOREMA FUNDAMENTALE.

Constet sphærois *A B a b* materia fluida, cujus particulæ versùs se mutuò urgeantur viribus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum decrescentibus; agantque simul duæ vires extraneæ in singulas fluidi particularas, quarum altera tendat versùs centrum sphæroidis, sitque semper proportionalis distantii particularum ab hoc centro; altera agat secundùm rectas axi solidi parallelas, sitque semper proportionalis distantii particularum a plano *B b* axi normali; et si semi-axes *C A*, *C B* ellipseos generatricis sint inversæ proportionales viribus totis, quæ agunt in particularas æquales in extremis axium punctis *A* et *B* sitas, erit totum fluidum in æquilibrio.

Ut hæc Propositio nostra primaria clarissimè demonstretur, ostendemus imprimis vim compositam ex gravitate particulæ cujusvis *P* et duabus viribus extraneis, semper agere in rectâ *P L*, quæ est ad superficiem

sphæroidis semper normalis. 2. Fluidum in rectâ quâvis P C a superficie ad centrum ductâ, ejusdem ubique esse ponderis. 3. Fluidum in canalibus quibusvis a superficie ad datam quamvis particulam intra solidum ductis, eâdem semper vi particulam illam urgere.

1. Vires totæ quæ agunt in particulas A et B dicantur M et N, quæ ex hypothesi sunt in ratione axium C B et C A. Resolvatur vis prior extranea quæ agit secundum rectam P C in vires duas, alteram axi parallelam, alteram eidem perpendicularem; eruntque hæ vires semper ut rectæ P K et K C. Unde cum vis quâ gravitas particulæ P urget eam secundum rectam P K sit etiam ut P K, per Lemma superius, sequitur vim totam quâ particula P urgetur secundum rectam P K, esse ad N, ut P K ad C B. Vires tres agunt in particulam P secundum rectam P D axi parallelam, particulæ scilicet gravitas et duæ vires extraneæ, quæ singulæ variantur in ratione rectæ P D vel K C; adeoque vis ex his tribus resultans erit ad M ut C K ad C A. Vis igitur quâ particula P urgetur secundum rectam P K est ad vim quâ urgetur secundum rectam P D ut $\frac{N \times P K}{C B}$ ad $\frac{M \times K C}{C A}$ sive (cum $M : N :: C B : C A$) ut

$P K \times C A^2$ ad $C K \times C B^2$. i. e. (quoniam si P L ellipsi generatrici perpendicularis occurrat axi A a in L, erit K C ad K L, ut $C A^2$ ad $C B^2$, ex notâ ellipsis proprietate) ut $P K \times K C$ ad $K C \times K L$, adeoque ut P K ad K L. Unde vis composita particulam urget in rectâ P L, quæ ad superficiem fluidi ponitur perpendicularis; estque semper ut recta hæc P L, cum vires secundum rectas P K sint semper ut P K.

2. Sit L Z normalis in semi-diametrum C P, et vis quâ particula P urgetur versùs centrum, erit ut recta P Z per vulgaria mechanicæ principia, et pondus fluidi in rectâ P C ut rectangulum C P \times P Z, quod semper est æquale quadrato ex semi-axi C B per Lemma II. Centrum igitur æqualiter undique urgetur, estque fluidum in æquilibrio in C.

3. Sit p particula quævis in solido ubicunque sita, P p recta quævis a superficie ad particulam p ducta; sint P K, p l normales in axem A a, et vis quâ particula p urgetur pondere fluidi in rectâ quâvis P p secundum hanc rectam, facili calculo quem brevitatis gratiâ omitto, invenietur

$$\begin{aligned} \text{æqualis } \frac{N}{2 C B} \times P K^2 - p l^2 - \frac{M}{2 C A} \times C l^2 - C K^2 &= (\text{cum } M : N :: \\ C B : C A) \frac{M \times C A^2 \times P K^2 + M \times C K^2 \times C B^2 - M \times C A^2 \times p l^2}{2 C B^2 \times C A} \\ - \frac{M \times C B^2 \times C l^2}{2 C B^2 \times C A} &= (\text{cum } P K^2 : C A^2 - C K^2 :: C B^2 : C A^2 \end{aligned}$$

et si C G sit semi-axis ellipseos per p ductæ similis ellipsi A B a b, et similiter sitæ, $p l^2 : C G^2 - C l^2 :: C B^2 : C A^2$) $\frac{M \times C A - M \times C G}{2}$ adeò

que cùm hæc quantitas a situ puncti P non pendeat, vis hæc est æmper eadem, si detur locus particulæ p; quæ proinde cùm undique æqualiter urgeatur, fluidum erit ubique in æquilibrio.

Cor. 1. Sit ut in Cor. 2. Lemmatis IV. A vis gravitatis in sphæroidem in loco A, B vis gravitatis in eadem in loco B, V vis K G in mediocri sui quantitate in superiore Sectione expositâ, quâ Luna vel Sol aquam sphæroidis deprimit in distantia d, quæ ponitur mediocris inter C A et C B. Sit C A = a, C B = b, eritque vis N, quâ particula B versùs C urgetur, æqualis $B + \frac{b V}{d}$, et $M = A + \frac{a V}{d} - \frac{3 a V}{d} = A - \frac{2 a V}{d}$. Unde per hanc Propositionem si $a : b :: B + \frac{b V}{d} : A - \frac{2 a V}{d}$, erit fluidum in æquilibrio. Atque hinc ex datis A, B et V in terminis a et b species figuræ innotescet. Est $A a - B b = \frac{2 a^2 V}{d} + \frac{b^2 V}{d}$.

Cor. 2. Cùm vis V (sive ex inæquali gravitate particularum versùs Lunam, vel versùs Solem oriatur) sit exigua admodum respectu virium A et B, et differentia inter a et b admodum parva, ducatur $a = d + x$ et $b = d - x$, eritque $B d - B x + V \times \frac{d - x}{d} = A d + A x - 2 V x$ $\frac{d + x}{d}$, et neglectis terminis ubi x x reperitur $B d - B x + V d - 2 V x = A d + A x - 2 V d - 4 V x$, unde $B d - A d + 3 V d = A x + B x - 2 V x$; adeoque $x : d :: B - A + 3 V : B + A - 2 V$; et differentia altitudinis aquæ in A et B (seu 2 x) ad semi-diametrum medicrem d ut $2 B - 2 A + 6 V$ ad $B + A - 2 V$, vel quàm proximè ut $B - A + 3 V$ ad gravitatem versùs sphæroidem medicrem.

Cor. 3. In præcedentibus Corollariis supposuimus $d = \frac{1}{2} C A + \frac{1}{2} C B$ verùm si d denotet aliam quamvis distantiam ubi vis K G ponatur æquali ipsi V, sitque $e = \frac{1}{2} C A + \frac{1}{2} C B$, erit $x : e :: B - A + \frac{3 e V}{d} : B + A - \frac{2 e V}{d}$.

Cor. 4. Per vim V in his Corollariis intelleximus vim vel Solis vel Lunæ, et figuram consideravimus, quam Terra fluida homogenea indueret si hæ vires seorsùm in eam agerent. Sit nunc Luna Soli conjuncta

vel opposita, et simul agant in Terram. In hoc casu vires luminarium conspirant ad aquam tollendam in A et a, eamque deprimendam in B et b, et easdem ubique servant leges. Unde erit etiam in hoc casu fluidum in æquilibrio, si vis tota quæ agit in loco A, sit ad vim totam quæ agit in loco B ut CB ad CA; adeoque si V nunc designet summam virium, quibus Sol et Luna aquam deprimit in rectis Tb, TB ad mediocrem distantiam fluidum erit in æquilibrio, si $b : a :: A - \frac{2aV}{d} : B + \frac{bV}{d}$, vel x ad d ut $B - A + 3V$ ad $B + A - 2V$ quàm

proximè, ut priùs.

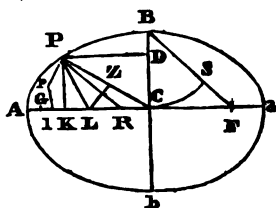
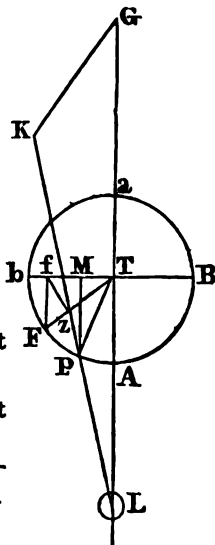
Cor. 5. Sit nunc Luna in rectâ Aa, Sol in rectâ Bb; et quoniam Lunæ vis potior est, axis transversus figuræ generatricis transeat per Lunam, conjugatus per Solem; et si vis tota quæ agit in loco A sit ad vim totam quæ agit in loco B ut CB ad CA, erit sphærois fluida in æquilibrio etiam in hoc casu. Sit s vis quâ Sol deprimit aquam in rectis TA, Ta ad mediocrem a centro C distantiam, l vis quâ Luna aquam deprimit in rectis TB, Tb ad æqualem distantiam; eritque vis tota quæ agit in loco A æqualis $A - \frac{2al}{d} - \frac{as}{d}$, vis tota quæ agit

in loco B æqualis $B + \frac{bl}{d} - \frac{2bs}{d}$. Unde colligitur ut

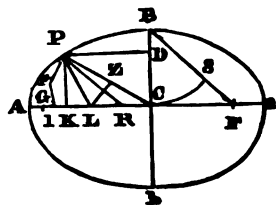
in Corol. 2. $x : d :: B - A + 3l - 3s : B + A - 2l + 2s ::$ (si $l - s$ nunc dicatur V) $B - A + 3V, B + A - 2V$, ut priùs.

Schol. Eâdem planè ratione ostenditur quòd si

Ba bA sit sphærois fluida oblata genita motu semi-ellipsis BAb circa axem minorem Bb; et vertatur hæc sphærois circa eundem axem tali motu ut gravitas versùs sphæroidem hanc in polo A sit ad excessum quo gravitas in loco B superat vim centrifugam in B ex motu sphæroidis circa axem oriundam ut CB ad CA, fluidum fore ubique in æquilibrio. Unde sequitur figuram Terræ, quâtenus ex vi centrifugâ a motu diurno oriunda immuta-

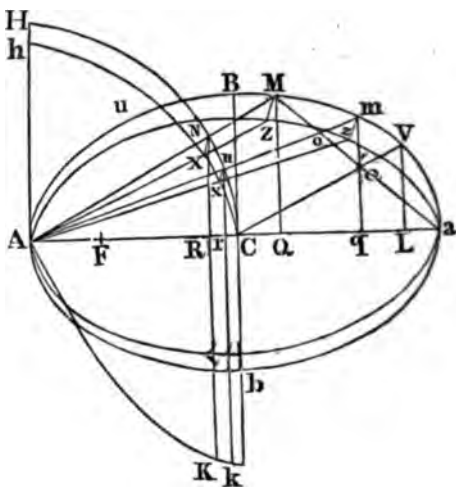


tur, esse sphæroidem oblatam qualis gignitur motu semi-ellipsis $B a b$ circa axem minorem (si materia Terræ pro æqualiter densâ habeatur) semi-diametrum æquatoris esse ad semi-axem ut gravitas sub polis in Terram est ad excessum gravitatis supra vim centrifugam sub æquatore, corpus in loco quovis P tendere versùs Terram vi quæ est semper ut recta $P L$ perpendicularis ellipsi generatrici et axi majori occurrens in L , et mensuram denique gradûs in meridiano esse semper ut cubus ejusdem rectæ $P L$. Hæc omnia accuratè demonstrantur ex hac Propositione; quæ quamvis in disquisitione de figurâ Terræ eximii usûs sint, hic obiter tantum monere convenit.



LEMMA V.

Sit figura quævis $A B a$: describatur circulus $C N H$ centro A , radio quovis dato $A C$; ex A educatur recta quævis $A M$ occurrens figuræ $A B a$ in M , et circulo in N ; sint $M Q$ et $N R$ perpendiculares in axem datum $A a$, sit $K R$ semper æqualis abscissæ $A Q$, et vis quâ particula A urgetur versùs solidum motu figuræ $A B a$ circa axem $A a$ genitum, erit ut area quam generat ordinata $K R$ directè et radius $A C$ inversè.



Occurrat alia recta ex A educta figuræ in m et circulo in n , sintque $m q$ et $n r$ normales in axem $A a$. Sit $A Z z a$ alia sectio solidi per axem, cui occurrant plana $A M Z$, $A m z$ ipsi $A M a$ normalia in rectis $A Z$, $A z$, quæ circulum radio $A C$ in plano $A Z z a$ descriptum secant in X et x ; denique arcus $M o$ circularis centro A descriptus occurrat $A m$ in o . His positis, minuatur angulus contentus planis $A M a$, $A Z a$, et simul angulus $M A m$ donec evanescant, et ultima ratio vis quâ particula A tendit

ad piramidem $A M Z z m$ ad vim quâ urgetur versùs piramidem $A N X x n$ erit rectæ $A M$ ad $A N$, vel $A Q$ ad $A R$, per Lem. II. vis hujus piramidis est ut vis superficiei $N X x n$ in rectam $A N$, adeoque ut $\frac{N X \times N n}{A N^2} \times$

$A N = \frac{N X \times N n}{A N}$, vel ut $\frac{N R \times N n}{A N}$ (quoniam $N X$ est ut $N R$) i. e. ut

$R r$; ejusdemque vis ad directionem axis reducta ut $R r \times \frac{A R}{A N}$; quare vis

piramidis $A M Z z m$ ad eandem directionem reducta $R r \times \frac{A Q}{A C} =$

$\frac{R r \times K R}{A C}$. Vis igitur quâ particula A urgetur versùs frustum solidi

planis $A M a$, $A z a$ contenti, est ut area quam generat ordinata $K R$ directè et radius $A C$ inversè; cùmque solidum sit rotundum, motu scilicet figuræ circa axem $A a$ genitum, par erit ratio vis quâ particula urgetur versùs integrum solidum.

Cor. Vis quâ particula A urgetur in solidum est ad vim quâ urgetur versùs sphæram super diametrum $A a$ descriptam ut area quam generat ordinata $K R$ ad $\frac{2}{3} C A^2$. Quippe si $A M a$ sit circulus, erit $A Q$ ad $A a$ ut $A Q^2$ ad $A M^2$, vel $A R^2$ ad $A N^2$. Unde in hoc casu erit $K R = \frac{2 A R^2}{A C}$, et area $A R K$ (quam generat ordinata $K R$) = $\frac{2 A R^3}{3 A C}$, adeoque area tota motu ordinatæ $R K$ genita erit $\frac{2}{3} C A^2$.

PROPOSITIO II.—PROBLEMA.

Invenire gravitatem particulæ A in extremitate axis transversi sitæ versùs sphæroidem oblongam.

Cæteris manentibus ut in Lemmate præcedenti sit $A M a$ ellipsis, $A a$ axis transversus, C centrum, $B b$ axis conjugatus, F focus; educatur recta quævis $A M$ ex A ellipsi occurrens in M , cui parallela $C V$ occurrat ellipsi in V ; unde ducatur ordinata ad axem $V L$, juncta a M rectæ $C V$ occurrat in e , eritque $A M = 2 C e$: cùmque $A Q : C L :: A M (2 C e) : C V :: 2 C L : C a$, erunt $\frac{1}{2} A Q$, $C L$ et $C A$ continuè proportionales. Sit $C A = a$, $C B = b$, $C F = c$, $A R = x$, $C L = l$,

cùmque $A R^2 : N R^2 :: C L^2 : V L^2$ erit $x^2 : a^2 - x^2 :: l^2 : a^2 - l^2 \times \frac{b^2}{a^2}$; adeoque $l^2 = \frac{a^2 b^2 x^2}{a^4 - c^2 x^2}$ et $A Q$ vel $K R = \frac{2 a b^2 x^2}{a^4 - c^2 x^2}$, area $A R K =$

$$\int \frac{2 a b^2 x^2 dx}{a^4 - c^2 x^2} = (\text{si } z : x :: c : a) \int \frac{2 a^2 b^2}{c^2} \times \frac{z^2 dz}{a^2 - z^2} \quad \text{Quare sit a}$$

quantitas cujus logarithmus evanescit, sive systematis logarithmici modulus, l logarithmus

quantitatis $a \sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$,

eritque $A R K = \frac{2 a^2 b^2}{c^2} \times$

$\overline{1-z}$. Unde vis quâ particula

A gravitat versùs solidum genitum motu segmenti elliptici $A u M A$ circa axem $A a$, erit ad vim quâ eadem particula gravitat versùs solidum genitum motu segmenti circularis ex circulo supra diametrum $A a$ descripti eadem recta $A M$

abscissi circa eundem axem ut $\frac{2 a^2 b^2}{c^2} \times \overline{1-z}$ ad $\frac{2 x^3}{3 a}$, et si L sit lo-

garithmus quantitatis $a \sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ (vel $\frac{a}{b} \times a + c$) erit vis quâ particula

A tendit versùs totam sphæroidem ad vim quâ tendit versùs totam sphæram ut $3 b^2 \times \overline{1-c}$ ad c^3 .

Schol. Eadem ratione invenitur gravitas particulæ in polo sitæ versùs sphæroidem oblatam, quærendo aream cujus ordinata est $\frac{2 b^2 a^2}{c^2} \times$

$\frac{z^2}{b^2 + z^2}$. Sit $B A b$ a sphærois oblata motu ellipsis $B A b$ circa axem

minorem genita, centro B , radio $B C$ describatur arcus circuli $C S$,

rectæ $B F$ occurrens in S , eritque gravitas in hanc sphæroidem in polo

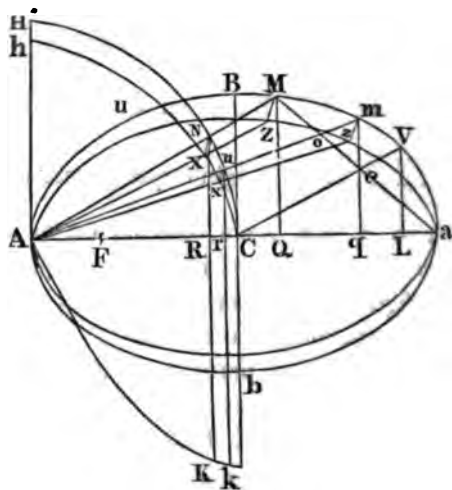
B ad gravitatem in eodem loco versùs sphæram super diametrum $B b$

descriptam ut $3 C A^2 \times \overline{C F - C S}$ ad $C F^3$. Methodus verò quâ

gravitas particulæ in æquatore sitæ versùs sphæroidem oblongam vel

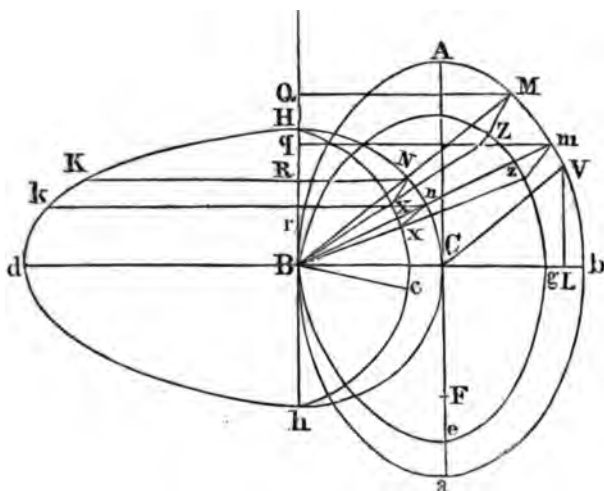
oblata computatur, est minùs obvia, facilis tamen evadit ope sequenti

Lemmatis.



LEMMA VI.

Duo plana $B M b a$ & $B, B Z g e$ & B se mutuò secant in recta $H B h$ communi figurarum tangente, auferantque ex solido frustum $B M b a B z g e B$; sint semi-circuli $H C h$, $H c h$ sectiones horum planorum et superficiei sphæræ centro B , radio $B C$ descriptæ. Ex puncto B educatur recta quævis $B M$ in priori plano figuræ $B M b a$ occurrens in M , et semi-circulo $H C h$ in N ; sintque $M Q$ et $N R$ normales in $H h$, et ordinata $K R$ semper æqualis rectæ $M Q$. His positis, si angulus $C B c$ planis hisce contentus minuatur in infinitum, erit gravitas particulæ B versùs frustum $B M b a B Z g e B$ ultimò ad gravitatem ejusdem particulæ ver-



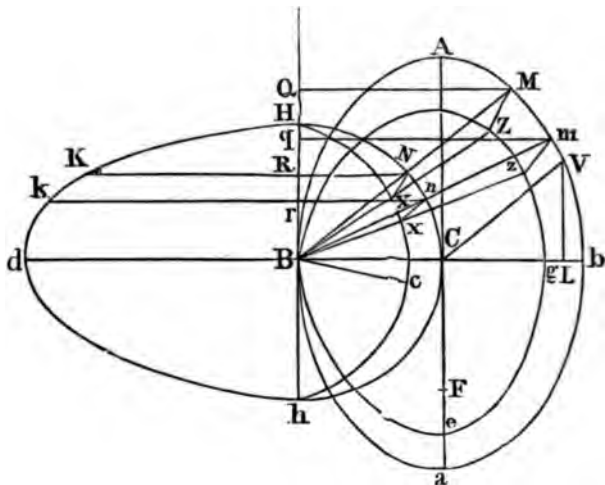
sùs frustum sphæræ semi-circulis $H C h$, $H c h$ contentum, ut area $H K d h$ genita motu ordinatæ $K R$ ad semi-circulum $H C h$.

Sit punctum in figurâ $B M B$, ipsi M quàm proximum jungatur $B m$ quæ circulo $H C h$ occurrat in n ; sitque $n r$ normalis in $H h$. Ad hæc sint plana $B M Z$, $B m z$ perpendicularia plano $B M b a$, secantque planum alterum $B Z g e$ in rectis $B Z$, $B z$ circumferentiæ $H c h$ occurrentibus in X et x . His positis, vis quâ particula B gravitat in pyramidem $B M Z z m$ erit ad vim quâ eadem particula gravitat in pyramidem $B N X x n$ ultimò ut recta $B M$ ad $B N$, vel $M a$ ad $N R$ per Lem. III.

Gravitas autem in hanc pyramidem est ut $\frac{N X \times N n}{B N^2} \times B N$, vel (quo-

niam $N X$ est ut $N R$) ut $\frac{N R \times N n}{B C}$, i. e. ut $R r$; atque hæc gravitas

agit secundùm rectam B b vi quæ est $\frac{B r \times R N}{B C}$; unde gravitas in pyramidem B M Z z m agit secundùm rectam B b vi quæ est ut $\frac{R r \times M Q}{B C}$, vel $\frac{R r \times K R}{B C}$. Proinde ultima ratio virium quibus particula B urgetur versùs integra frusta solidi et sphæræ B C, est ratio areæ H K d h (quam generat ordinata K R) ad semi-circulum H C h.



Cor. Gravitas in frustum planis B M b a, B Z g e terminatum, est ad gravitatem in frustum sphæricum contentum circulis super diametros B b, B g descriptis, ut area H K d h ad $\frac{2}{3} C B^2$. Sit enim B M B b circulus, eritque M Q ad B b, ut R N² ad B C², et $K R = \frac{2 R N^2}{C B} = 2 B C^2 - \frac{2 B R^2}{C B}$, et area H K d B = $\frac{2}{3} C B^2$ adeoque area tota H K d h = $\frac{2}{3} C B^2$.

PROPOSITIO III.—PROBLEMA.

Invenire gravitatem particulæ in æquatore sitæ versùs sphæroidem oblongam.

Per æquatorem intelligimus circulum ab axe conjugato genitum dum figura circa alterum axem revolvitur. Representet B M b a in figurâ

præcedentis Lemmatis, sectionem quamvis sphæroidis æquatoris plano normalem, eritque hæc figura semper similis sectioni per polos solidi, seu figuræ cujus revolutione solidum genitum esse supponimus. Hujus demonstrationem ut facilem et ab aliis traditam brevitatis gratiâ omitto. Sit igitur CA sectionis hujus semi-axis transversus, CB semi-axis conjugatus, F focus; sit $CB = b$, $CA = a$, $CF = c$, $BR = x$, CV semi-diameter parallela rectæ BM , VL ordinata ad axem Bb , $CL = l$. Tunc $CB : CL :: CL : \frac{1}{2} MQ$ ut in Proposition. præcedenti, et $MQ = \frac{2l^2}{b}$.

Verùm $NR^2 : BR^2 :: CL^2 : VL^2$ i. e. $b^2 - x^2 : x^2 :: l^2 : b^2 - l^2$
 $\times \frac{a^2}{b^2}$, vel $a^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2} : x^2 :: l^2 : b^2 - l^2$, et $l^2 = \frac{a^2 b^2 \times b^2 - x^2}{a^2 b^2 - c^2 x^2} =$
 $(si\ z : x :: c : b) \frac{b^2 a^2}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$ et $KR = MQ = \frac{2l^2}{b} = \frac{2a^2 b}{c^2} \times$
 $\frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, et area $BdKR$ æqualis $\int \frac{2a^2 b^2 dz}{c^3} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2} = \frac{2a^2 b^2 z}{c^3}$
 $-\int \frac{2a^2 b^2}{c^3} \times \frac{b^2 dz}{a^2 - z^2}$. Sit igitur l (ut in priore Propositione) lo-
 garithmus quantitatis $a \sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, et area $BdKR$ erit $\frac{2a^2 b^2 z}{c^3} - \frac{2a^2 b^2}{c^3}$
 $\times \frac{b^2 l}{a^2} = \frac{2b^2}{c^3} \times \overline{a^2 z - b^2 l}$.

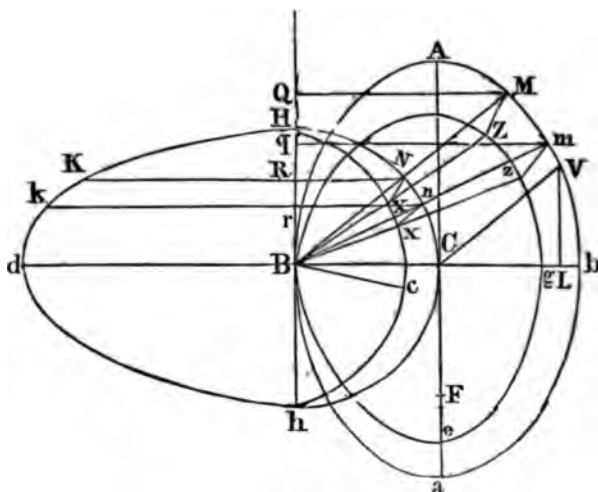
Supponantur nunc $x = b$, adeoque $z = c$; sitque L logarithmus quan-
 titatis $a \sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, ut prius, eritque area tota $HKdH$, motu ordinatæ

KR genita, æqualis $\frac{4b^2}{c^3} \times \overline{a^2 c - b^2 L}$. Quare gravitas particulæ B
 versùs frustum planis ellipticis BMb , BZg e terminatum erit ultimò
 ad gravitatem in frustum iisdem planis contentum a sphærà centro C
 radio CB descriptâ resectum, ut $a^2 c - b^2 L$ ad $\frac{1}{2} c^3$ per Cor. Lem.
VI. Sit circulus BPp æquator sphæroidis, BP et Bp duæ quævis
 chordæ hujus circuli; sectiones sphæroidis circulo BPp perpendiculares
 erunt ellipses similes sectioni quæ per polos solidi transit, quarum BP et
 Bp erunt axes transversi; sectiones autem sphære super diametrum Bb
 descriptæ per eadem plana erunt circuli quorum diametri erunt chordæ
 BP , Pp . Proinde eadem semper erit ratio gravitatis particulæ B in
 frusta elliptica et sphærica his planis terminata; eritque gravitas versùs
 integram sphæroidem ad gravitatem versùs sphæram, ut $a^2 c - b^2 L$ ad
 $\frac{1}{2} c^3$, a denotante semi-axem transversum figuræ cujus motu gignitur soli-

dum, b semi-axem conjugatum, c distantiam foci a centro, et L , logarithmum ipsius $a \sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ vel $a \times \frac{a+c}{b}$. Q. e. f.

Cor. Eadem semper est ratio gravitatis versùs frustum quodvis sphæroidis et frustum sphærae eodem plano ad æquatorem normali abscissum ab eâdem parte plani; vel gravitas in portionem a sphæroide hoc plano abscissam est ad gravitatem in integram sphæroidem, ut gravitas in frustum sphærae eodem plano ex eâdem parte abscissum ad gravitatem in integram sphæram.

Schol. Eâdem ratione si $B A b a$ sit sphærois oblata motu figuræ $B A b$ circa axem minorem $B b$ genita, erit gravitas in sphæroidem hanc in loco



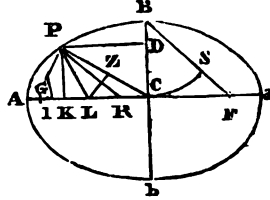
A ad gravitatem in eodem loco versùs sphæram centro C radio $C A$ descriptam, ut $C A^2 \times C S - C B^2 \times C F$ ad $\frac{2}{3} C F^2$.

PROPOSITIO IV.—PROBLEMA.

Ex datis viribus quibus Terræ particulae gravitant versùs Solem et Lunam, invenire figuram quam Terra indueret in syzygiis vel quadraturis Solis et Lunæ in hypothese quòd Terra constet ex fluido homogeneo, et circa axem suum non moveatur.

Gravitas in loco A versùs sphæroidem oblongam motu figuræ $A B$ circa axem transversam $A a$ genitam, est ad gravitatem in eodem loco versùs sphæram centro C radio $C A$ descriptam, ut $3 b^2 \times L - c$ ad $\frac{2}{3} C F^2$.

per Prop. II. Hæc autem gravitas est ad gravitatem in B versùs sphæram centro C radio C B descriptam, ut C A at C B (per Cor. 1. Lem. III.) quæ est ad gravitatem in loco B versùs sphæroidem ut $\frac{2}{3} c^3$ ad $a^2 c - b^2 L$ per Prop. IV. Componantur hæ rationes, eritque gravitas in loco A versùs sphæroidem ad gravitatem in loco B versùs eandem, ut $2 a b \times \overline{L - c}$ ad $a^2 c - b^2 L$. Designet A gravitatem in loco A, B gravitatem in loco B, V summam virium quibus luminaria conjuncta vel opposita aquam deprimunt in rectis T B, T b perpendicularibus rectæ A a quæ per Terræ et luminarium centra transire supponitur, ut in Cor. 4. Prop. I. vel differentiam earundem virium in Lunæ quadraturis, ut in Cor. 5. ejusdem Prop. et per ea quæ demonstrantur Cor. 1.



Prop. I. erit $A a - B b = \frac{2 a^2 V + b^2 V}{d}$. Adeoque $A a - b A \times$

$$\frac{a^2 c - b^2 L}{2 a b \times \overline{L - c}} = \frac{2 a^2 V + b^2 V}{d}, \text{ et } V : A :: 2 a^2 L +$$

$$b^2 L - 3 a^2 c : \frac{2 a}{d} \times \overline{2 a^2 + b^2 \times \overline{L - c}}. \text{ Atque}$$

ex datâ ratione V ad A vel ad B, vel $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$ (quæ pro G gravitate mediocri in circumferentiâ A B a b haberi potest) habebimus æquationem unde species figuræ et differentia semi-axium seu ascensus aquæ computari possunt.

Est autem L logarithmus quantitatis $a \sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$

adeoque æqualis $c + \frac{c}{3 a^2} + \frac{c^3}{5 a^4} + \frac{c^5}{7 a^6}$, &c. per

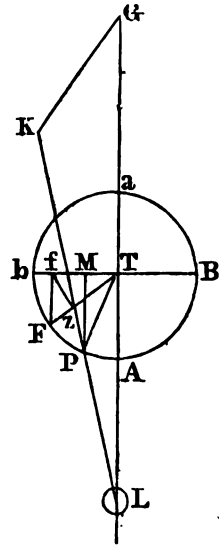
methodos notissimas, adeoque $L - c = \frac{c^3}{3 a^2} + \frac{c^5}{5 a^4}$

+ $\frac{c^7}{7 a^6}$, &c. Unde est V ad A, ut $\frac{2 c^2}{15 a^2} + \frac{4 c^4}{35 a^4}$,

+ $\frac{6 c^6}{63 a^6}$, &c. ad $\frac{\overline{L - c} \times a d}{c^2 \times 2 a^2 + b^2}$, et V ad $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$ vel G, ut $\frac{2 c^2}{15 a^2}$

+ $\frac{4 c^4}{35 a^4} + \frac{6 c^6}{63 a^6}$, &c. ad $\frac{2 a^2 + b^2}{2 b d c^2} \times \overline{2 a b L - b^2 L + a^2 c - 2 a b c}$.

Verùm si V sit admodum exigua respectu gravitatis G (ut in præsentia) erit differentia semi-diametrorum C A, C B ad semi-diametrum



mediocrem quàm proximè ut 15 V ad 8 G, vel paulò accuratiùs ut 15 V ad 8 G — $57\frac{5}{14} \times V$. Sit enim ut in Cor. 2. Prop. I. $a = d + x$, $b = d - x$, adeoque $c^2 = a^2 - b^2 = 4 d x$, eritque $A : B :: 2 a b \times L - c : a^2 c - b^2 L :: \frac{b}{3} + \frac{b c^2}{5 a^2} + \frac{b c^4}{7 a^4}$ &c. : $\frac{a}{3} + \frac{a c^2}{15 a^3} + \frac{a c^4}{35 a^5}$, &c. i. e. ut

$$\frac{d-x}{3} + \frac{4 d x \times d-x}{5 \times d+x|^2} + \frac{16 d^2 x^2 \times d-x}{7 \times d+x|^4}, \text{ \&c. ad}$$

$$\frac{d+x}{3} + \frac{4 d x \times d+x}{15 \times d+x|^2} + \frac{16 d^2 x^2 \times d+x}{35 \times d+x|^4}, \text{ \&c.}$$

adeoque (neglectis terminis, quos plures dimensiones ipsius x ingrediuntur) ut $\frac{1}{3} d + \frac{1}{15} x : \frac{1}{3} d + \frac{1}{15} x$. Proinde erit $B - A$ ad $B + A (= 2 G) :: x : 5 d + 18 x$, et $B - A : G :: 2 x : 5 d + 18 x$. Sed per Cor. 2. Prop. I. est x ad d ut $B - A + 3 V$ ad $B + A - 2 V$, adeoque substituendo valores quantitatum $B - A$ et $B + A$, erit $x : d :: \frac{2 G x}{5 d + 18 x}$

$$+ 3 V : 2 G - 2 V. \text{ Unde } 2 G x - 2 V x = \frac{2 G d x + 15 V d + 54 V x}{5 d + 18 x}, \text{ et } 10 G d x - 10 d V x$$

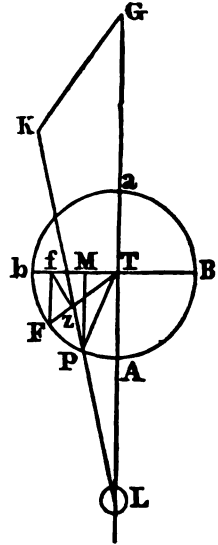
$$+ 36 G x x - 36 V x x = 2 G d x + 15 V d + 54 V x, \text{ et terminis omissis ubi reperitur } x x, \text{ erit}$$

$8 G d x - 64 V x = 15 V d$ atque $x : d :: 15 V : 8 G - 64 V$, et $2 x$ ad d ut $15 V$ ad $4 G - 32 V$. Ascensus igitur totius aquæ, i. e. differentia semi-diametrorum CA , CB (vel $2 x$) est ad semi-diametrum mediocrem, ut $15 V$ ad $8 G$ quàm proximè: facile autem erit rationem hanc exhibere magis accuratè, quoties usus id postulabit, assumendo plures terminos valoris logarithmi L , et calculum proseguendo; prodit autem hoc pacto x ad d magis accuratè, ut $15 V$ ad $8 G - 57\frac{5}{14} \times V$.

Cor. $B - A$ est æqualis $\frac{3 V}{4}$; et $B - G = \frac{3 V}{8}$ quàm proximè. Quippe

$$B - A : G :: 2 x : 5 d :: 30 V : 40 G, \text{ adeoque } B - A : V :: 3 : 4.$$

Schol. Eâdem ratione patebit gravitatem versùs sphæroidem oblatam in polo B fore ad gravitatem in æquatore in loco quovis A , ut $2 C B \times CA \times CF - CS$ ad $CA^2 \times CS - CB^2 \times CF$.



PROPOSITIO V.—PROBLEMA.

Invenire vim V quæ oritur ex inæquali gravitate partium Terræ versùs Solem, et definire ascensum aquæ hinc oriundum.

Sit S Sol, T Terra, A B a b orbita lunaris neglectâ excentricitate, B et b quadraturæ. Designet S tempus periodicum Terræ circa Solem, L tempus periodicum Lunæ circa Terram, l tempus quo Luna circa Terram revolveretur in circulo ad distantiam mediocrem T d ($= \frac{1}{2} C A + \frac{1}{2} C B$) si motus Lunæ gravitate suâ versùs Solem nullâtenus turbaretur, et solâ gravitate versùs Terram in orbitâ retineretur.

Designet porro K gravitatem mediocrem Lunæ vel Terræ versùs Solem, g gravitatem Lunæ versùs Terram in mediocri suâ distantia, v vim quam actio Solis huic gravitati adjiceret in quadraturis ad eandem distantiam.

His positis, erit $v : K :: d T : S T$; atque $K : g :: \frac{S T}{S S}$

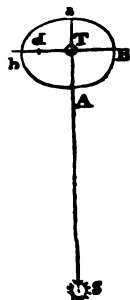
$: \frac{d T}{l l}$ ex vulgari doctrinâ virium centripetarum; unde $v :$

$g :: l l : S S$: cùmque l l sit paulò minùs quàm L L, quoniam Luna nonnihil distrahitur a Terrâ gravitate suâ in Solem, patet vim v esse ad g in paulò minori ratione quàm L L ad S S. Hanc autem rationem vis v ad g nemo hactenus (quantùm novi) accuratè definivit; ea tamen propior videtur esse rationi L L ad S S + 2 L L vel saltem rationi L L ad S S + $\frac{2}{3}$ L L quàm rationi L L ad S S. Argumenta verò quibus id colligitur hîc omittenda censeo, moniti Academiæ illustrissimæ memor, cùm in hâc disquisitione parvi sit momenti quænam harum rationum adhibeatur. Supponamus igitur cum Newtono $v : g :: L L : S S ::$ (per computos astronomicos periodorum Solis ac Lunæ) 1 : 178,725. Vis V quæ in Terræ superficie vi v respondet, est ad v, ut Terræ semi-diameter mediocris ad distantiam Lunæ mediocrem vel ut 1 ad 60½. Vis autem g agit secundùm rectas, quæ in centro gravitatis Terræ ac Lunæ concurrunt, cujus ratione habitâ ex incremento gravitatis in descensu ad superficiem Terræ patebit vim V esse ad G (quâ gravitas mediocris in superficie Terræ designatur ut suprâ) ut 1 ad 38604600. Unde cùm per Cor. 2. Prop. III. sit $x : d :: 15 V : 8 G - 57\frac{5}{14} V$ erit in hoc casu $x : d :: 1 : 20589116$. Cùmque semi-diameter Terræ mediocris sit pedum 19615800; hinc sequitur totum aquæ ascensum ex vi Solis oriundum fore pedis unius Parisiensis cum $\frac{90545}{100000}$ partibus pedis, i. e. pedis unius cum digitis decem, et



$\frac{8854}{10000}$ partibus digiti; quem suo more breviter deprehendit Newtonus esse pedis unius, digitorum undecim cum $\frac{3}{10}$ parte digiti, quæ altitudo a postrâ differt tantum sextâ parte unius digiti.

Verum in hoc calculo Terra supponitur esse spherica, nisi quatenus a vi Solis mare elevatur. Sed si ascensum aquæ maximum quæramus, ponendum est Solem in circulo æquinoctiali versari, figuramque A B a b in hoc plano constitui, et augenda est vis V in ratione semi-diametri mediocris ad semi-diametrum Terræ maximum, et minuenda est vis G donec evadat æqualis gravitati sub æquatore: i. e. si figuram Terræ eam esse supponamus quam definivit Newtonus, augenda erit vis V in ratione 459 ad 460, et minuenda est G in eadem fere ratione, quoniam vires gravitatis in superficie Terræ sunt inversè ut distantie locorum a centro; cumque distantia d sit augenda in eadem ratione, erit ascensus aquæ in æquatore augendus in ratione triplicata semi-diametri mediocris ad maximam, adeoque erit pedis unius, digitorum undecim cum 60^{m} circiter parte digiti. Terra autem altior est sub æquatore quam prodit calculo Newtoniano ex hypothesi quod Terra sit uniformiter densa a superficie usque ad centrum; ut colligitur ex variis pendulorum observationibus, et præsertim ex mensurâ gradûs meridiani quam viri clarissimi nuper definiverunt accuratissimè sub circulo polari.



Schol. 1. Si gravitatem posuissemus æqualem in A et B, et ejusdem vis in totâ circumferentiâ A B a b, prodisset x æqualis tantum $\frac{3}{2} \frac{V d}{G}$, ascensus aquæ (seu 2 x) pedis unius, digitorum sex cum tertiâ circiter parte digiti. Quippe in hac hypothesi prodisset C A ad C B, ut $G +$ ad $G - 2 V$, adeoque x ad d, ut $\frac{3}{2} \frac{V}{G}$ ad G quàm proximè. Atque hinc apparet utilitas præcedentium Propositionum, cum ascensus aquæ secundum hanc minùs accuratam hypothesim minor sit ascensu quem in Propositione definivimus, differentiâ $\frac{3}{4} \frac{V d}{G}$, quartâ scilicet parte ascensus illius.

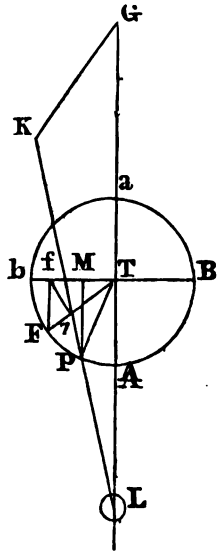
Schol. 2. Ex hac doctrinâ patet satellites Jovis Soli et sibi mutuò conjunctos vel oppositos in oceano joviali (si ullus sit) ingentes motus excitare debere, modò non sint Lunâ nostrâ multò minores; cum diameter Jovis ad distantiam cujusque satellitis multò majorem habeat rationem quàm diameter Terræ ad distantiam Lunæ. Verisimile est mutationes

macularum Jovis ab astronomis observatas hinc aliquâ saltem ex parte ortum ducere; quòd si hæ mutationes eam analogiam servare deprehendantur cum aspectibus satellitum, quam hæc doctrina postulat, indicio erit veram earum causam hinc esse petendam. Ex hâc doctrinâ licet quoque conjicere non absque utilitate, motus satellitum circa axes suos et circa primarios ita compositos esse ut idem hemispherium suis primariis semper ostendant, secundum sententiam celeb. astronomorum. Verisimile enim est motus maris nimios in satellitibus cieri deberi, si cum aliâ quâvis velocitate circa axes suos revolverentur; aquis autem in his agitantis (si quæ sint) sufficere possunt æstus ex variis satellitum distantis a suis primariis oriundis.

SECTIO IV.

De motu maris quâtenus ex motu Telluris diurno aliisve de causis immutatur.

Ostendimus in Sectione præcedenti Terram fluidam versùs Solem vel Lunam inæqualiter gravem sphæroidis oblongæ figuram induere del ere; cujus axis transversus per centrum luminis transiret, si Terra non revolveretur circa axem suum motu diurno; et ascensum aquæ in hypothesi Terræ quiescentis ex vi Solis oriundum definivimus. Verùm ob motum Terræ diversa est ratio æstus maris. Hinc enim aqua nunquam fit in æquilibrio, sed perpetuis motibus agitur. Supponamus Solem et Lunam conjunctos vel oppositos versari in plano æquatoris $ABab$; sit Aa diameter quæ per illorum centra transit, Bb huic perpendicularis. Dum aquæ moles revolvitur motu diurno, augentur vires quibus ascensus ejus promovetur in transitu aquæ a locis b et B ad A et a , et in his locis evadunt maximæ; ascensus tamen aquæ prorogari videtur, postquam hæ vires minui cœperunt usque ferè ad loca ubi hæ vires æquipollent viribus quibus deprimitur infra altitudinem quam naturaliter obtineret, si nullâ vi extraneâ motus aquæ perturbaretur; adeò ut motus aquæ considerari possit tanquam libratorius, et tantundem ferè ascendat viribus quibus elevatur decrescentibus, quàm iisdem crescentibus.



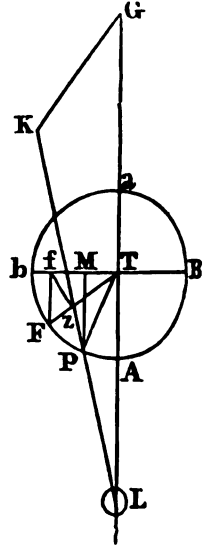
Cúmque vis centrifuga ex motu diurno orta sit multò minor gravitate, situs loci F ubi prædictæ vires æquipollent sub æquatore, dum aqua transit a loco b ad locum A, sic ferè definiri posse videtur. Ex puncto F sit F f normalis in B b, et f z in T F. Designet V summam virium quibus Sol et Luna aquam deprimunt in rectis T B, T b ut suprà, et vis quâ aqua tollitur in F erit $\frac{3 V \times F z}{d} = \frac{3 V \times F f^2}{d \times T F}$.

Supponamus F esse locum aquæ ubi altitudo aquæ fit minima, ut T F haberi possit pro semi-axe conjugato figuræ A B a b, dicatur gravitas in extremitate hujus axis B, et gravitas mediocris in hac figurâ G, ut suprà; et vis quâ aqua deprimatur infra situm naturalem in loco F erit $B - A + \frac{V \times T F}{d}$.

Ponantur hæ vires æquales, cúmque T F sit quàm proximè æqualis distantie d, sitque $B - G = \frac{3 V}{8}$

per Cor. Prop. IV. erit $\frac{3 V}{8} + V = \frac{3 V \times F f^2}{d^2}$, seu $T F^2 : F f^2 :: 3 : 1 +$

$\frac{3}{8} :: 24 : 11$. Unde angulus F T b erit graduum 42 minutorum 37, incidetque ferè in punctum medium inter b et A. Hunc verò calculum accuratum non proponimus.



PROPOSITIO VI.—PROBLEMA.

Motum maris ex vi Solis oriundum, et motum lunarem in orbitâ quàm proximè circulari inter se comparare, et hinc ascensum aquæ æstimare.

Astronomis notissimum est Lunæ distantiam mediocrem in syzygiâ minorem esse distantia mediocri in quadraturis. Clariss. Halleyus ex observationibus colligit distantiam priorem esse ad posteriorem ut 44 ad 45½. Newtonus methodo quâdam suâ harum rationem invenit esse eam 69 ad 70: Princip. Prop. XXVIII. Lib. III. Clarissimus auctor Tractatûs de Motibus Lunæ secundum Theoriam gravitatis, in hac doctrinâ optimè versatus, colligit eam esse numeri 69 ad 70; ratione non habiti decrementi gravitatis dum Luna transit a syzygiis ad quadraturas. Ut motus maris ex vi Solis oriundus (qualis suprâ definitur Prop. V.) cum

motu Lunæ conferatur, supponamus orbem lunarem aquâ compleri, et quæramus ascensum hujus aquæ per Prop. IV. et V. In Prop. V. erat vis v ad g , ut 1 ad 178, 725; quare in hoc casu foret $x : d :: 15 v : 8 g$ — $57\frac{5}{4} \times v :: 1 : 91,496$: adeoque semi-axis figuræ ad semi-axem conjugatum (vel $d + x$ ad $d - x$) ut 46,248 ad 45,248; quæ ferè congruit cum ratione distantiarum Lunæ in quadraturis et syzygiis quam Halleyus ex observationibus deducit; adeò ut figura orbitæ lunaris specie vix diversa sit ab eâ quam globus aqueus quiescens Lunæ orbitam complens ex vi Solis indueret; forent tamen positione diversæ, siquidem illius axis minor Solem respiciat, hujus axis major versùs Solem dirigeretur. Ratio numeri 59 ad 60 (quarum semi-differentia est ad semi-summam ut 3 v ad g quàm proximè) probè congruit cum ratione semi-axium figuræ quam aqua ex vi Solis indueret, si vis gravitatis eadem esset per totam circumferentiam $A B a b$, ut ostendimus in Schol. 1. Prop. V. Ascensus autem aquæ Prop. V. definitus congruit cum eâ quam ex observationibus colligit Halleyus; unde suspicari licet differentiam diametrorum orbitæ lunaris paulò fieri majorem ex decremento gravitatis Lunæ in Terram dum transit a syzygiis ad quadraturas, simili ferè ratione quâ ascensus aquæ prodiit in hac Propositione major propter excessum gravitatis aquæ in Terram in loco B supra ipsius gravitatem in loco A aliisque a centro distantis. Verùm quidquid si judicandum de ratione diametrorum orbitæ lunaris, ex his colligere licet ascensum aquæ Prop. V. definitum majorem vix evadere propter motum Terræ diurnum circa axem suum. Supponamus enim hunc motum augeri donec vis centrifuga ex hoc motu oriunda fiat æqualis gravitati, et particulæ maris revolvantur ad morem satellitum in orbitis quàm proximè circularibus Terram contingentibus. Hæ orbitæ erunt ellipticæ, quarum axes minores productæ transibunt per Solem. Et si semi-axium differentia sit ad semi-diametrum medio-crem ut 3 V ad G (secundùm ea quæ de motibus lunaribus tradit vir acutissimus) erit minor ascensu aquæ suprâ definito Prop. V. in qua invenimus 2 x esse ad d ut 15 V ad 4 G . Quòd si quæramus horum semi-axium differentiam ex figura orbitæ lunaris quâtenus ex observationibus innotescit secundùm claris. Halleyum, parum admodum superabit ascensum aquæ suprâ definitum. Nec mirum si non accuratè conveniant, cùm gravitas Lunæ versùs Terram sequatur rationem inversam duplicatam distantiarum, gravitas aquæ major quoque sit in majori distantia, sed non in eadem ratione. Cùm hæc phænomena sint analogæ, et sibi mutuò aliquam lucem afferant, hæc de iis inter se collatis memorare videbatur operæ prætium. Supponimus tamen hîc aquæ motum in

eodem circulo æquatori parallelo perseverare, vel latitudinem eandem in singulis revolutionibus servare, et variationem ascensûs aquæ, quæ ex figurâ sphæroidicâ Terræ provenit, non consideramus.

PROPOSITIO VII.

Motus aquæ turbatur ex inæquali velocitate, quâ corpora circa axem Terræ motu diurno deferuntur.

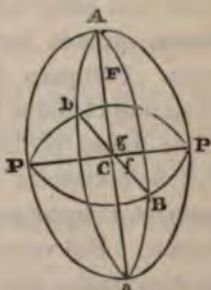
Quippe si aquæ moles feratur æstu, vel aliâ de causâ, ad majorem vel minorem ab æquatore distantiam, incidet in aquam diversâ velocitate circa axem. Terræ latam; unde illius motum turbari necesse est. Differentia velocitatum quibus corpora, exempli gratiâ, in loco 50^m. ab æquatore dis-sito, et in loco 36 tantum milliaria magis versûs septentrionem vergente, major est quàm quâ 7 milliaria singulis horis describeretur, ut facili calculo patebit. Cùmque motus maris tantus nonnunquam sit ut æstus 6 milliaria, vel etiam plura singulis horis describat, effectus qui hinc oriri possunt non sunt contemnendi.

Si aqua deferatur a meridie versûs septentrionem motu generali æstûs, vel aliâ quâvis de causâ, cursus aquæ hinc paulatim deflectet versûs orientem, quoniam aqua priùs ferebatur motu diurno versûs hanc plagam majori velocitate quàm est ea quæ convenit loco magis versûs boream sito. Contrâ si aqua a septentrione versûs meridiem deferatur, cursus aquæ ob similem causam versûs occidentem deflectet. Atquæ hinc varia motûs maris phænomena oriri suspicamur. Hinc forsitan, exempli gratiâ, montes glaciales quæ ex Oceano Boreali digrediuntur, frequentius conspiciuntur in occidentali quàm orientali Oceani Atlantici plagâ. Quia et majores æstus hinc cieri posse in pluribus locis quàm qui ex calculo virium Solis et Lunæ prodeunt, habitâ ratione latitudinis, verisimile est. Eandem causam ad ventos præsertim vehementiores propagandos, et nonnunquam augendos vel minuendos, aliaque tum aëris tum maris phænomena producenda conducere suspicamur. Sed hæc nunc sigillatim prosequi non licet.

PROPOSITIO VIII.—PROBLEMA.

Invenire variationem ascensûs aquæ in Prop. V definiti, quæ ex figurâ Terræ sphæroidicâ provenit.

Sint $PApa$, $PBpb$ sectiones Terræ per polos P et p , quarum prior transeat per loca A et a , ubi altitudo aquæ in æquatore viribus Solis et Lunæ fit maxima, posterior per loca B et b ubi fit minima; sint hæ sectiones ellipticæ, F focus figuræ $PApa$, f focus sectionis $PBpb$, et g focus sectionis $ABab$. Et si omnes sectiones solidi per rectam Aa transeuntes supponantur ellipticæ calculo inito ope Lemmatis V. invenimus gravitatem in loco A versûs solidum hoc fore ad gravitatem in eodem loco versûs sphæram centro C super



diametrum Aa descriptam ut $1 + \frac{3CF^2 + 3Cg^2}{10CA^2}$
 $+ \frac{9CF^4 + 6CF^2 \times Cg^2 + 9Cg^4}{56CA^4}$, &c. ad $\frac{CA^2}{CB \times CP}$; et si gravi-

tas in loco B , definiatur simili calculo, ope ejusdem Lemmatis et schol. Prop. II. constabit ratio gravitatis in A ad gravitatem in B , et per Cor. 2. Prop. I. innotescet semi-diametrorum CA et CB differentia sive ascensus aquæ. Verùm calculum utpotè prolixum omittimus, cùm sit exigui usûs. Hâc Propositione ostendere tantùm volui geometriam nobis non defuturam in Problemate celeberrimo accuratissimè tractando. Verùm restat præcipuus in hac disquisitione nodus, de quo pauca sunt addenda.

PROPOSITIO IX.—PROBLEMA.

Invenire vim Lunæ ad mare movendum.

Hæc ex motibus cœlestibus colligi nequit, si verò conferetur ascensus aquæ in syzygiis luminarium, qui ex summâ virium Solis et Lunæ generatur, cum ejusdem ascensu in quadraturis, qui ex earundem differentia oritur, ex vi Solis per Prop. V. datâ, invenietur vis Lunæ. Hanc quærit Newtonus ex observationibus a Sam. Sturmio ante ostium Fluvii Avonæ institutis, ex quibus colligit ascensum aquæ in syzygiis æquinoc-tialibus esse ad ascensum aquæ in quadraturis iisdem, ut 9 ad 5. Dein post varios calculos concludit vim Lunæ esse ad vim Solis, ut 4.4815 ad 1,

et ascensum aquæ ex utrâque vi oriundum in distantis luminarium mediocribus fore pedum 50 cum semisse. Harum virium rationem ex observationibus a celeb. Cassini in loco suprâ citato allatis quæsitimus. Verùm cum præter generales causas jam memoratas quarum aliquæ ad calculum vix revocari possunt, aliæ variæ ex locorum situ, vadorum indole, ventorum vi et plagâ pendentes, æstus maris nunc majores, nunc minores reddant, non est mirum si vires Lunæ quæ prodeunt ex observationibus in locis diversis, vel in eodem loco diversis tempestatibus institutis non planè consentiant. Computis igitur quos de motu maris ex vi Lunæ oriundo instituimus recensendis impræsentiarum non immorabimur. Postquam verò observationes aliquæ circa æstus maris ad littora Americæ et Indiæ Orientalis quas expectamus, ad manus pervenerint, de hisce forsàn certius judicemus. Observamus tantùm æstus in minori ratione decrescere videri quàm duplicatâ sinus complementi declinationis; quin et reliquæ æstus leges generales ex motu aquæ reciproco perturbantur. Sed veremur ne tædium pariat, si repetamus quæ ab aliis jamdudum tradita sunt. Æstus anomali a locorum et marium situ plerumque pendere videntur. Observandum tamen ex theoriâ gravitatis sequi, unicum tantùm æstum spatio 24 horarum contingere nonnunquam debere in locis ultra 62 gradum latitudinis, si reciprocatio motûs aquæ id permitteret. *

Quòd si analysis diversarum causarum quæ ad æstus phænomena producenda conferunt, accuratè institui posset, id certè ad uberiorem scientiam virium et motuum systematis mundi non parum conferret. Hinc enim situs centri gravitatis Lunæ et Terræ, et quæ ad æquinocetiorum præcessionem aliaque phænomena naturæ insignia spectant, certius innotescerent. Quas ob causas ascensûs aquæ quantitatem, quousque ex motibus cœlestibus eam assequi licet, accuratè definiendam et demonstrandam, positis legibus gravitatis quæ ex observationibus deducuntur (de cujus causâ hîc non est disserendi locus) putavimus. Cogitata autem hæc qualiacunque judicio illustrissimæ Academiæ Regiæ, quam omni honore et reverentiâ semper prosequimur, lubenter submittimus.

* Sit enim Lunæ declinatio 28 gr. et loci festum est Lunam semel tantùm 24 horarum ultra 62 gr. versùs eandem plagam, et man- spatio loci hujus horizontem attingere.

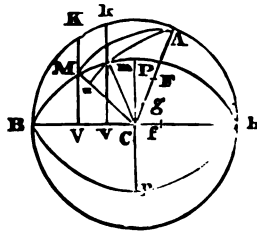
Annotanda in Dissertationem de Causâ Physicâ Fluxûs et Reflexûs Maris, cui præfigitur sententia, Opinionum commenta delet dies, naturæ judicia confirmat.

1. In Prop. IV. invenitur $x = \frac{15 V d}{8 G}$ quàm proximè, qui valor ipsius x est satis accuratus, nec ullâ correctione indiget præsertim in calculo Prop. V. Est autem magis accuratè x ad d ut $15 V$ ad $8 G - \frac{88}{7} V$ non ut $15 V$ ad $8 G - \frac{803}{14} V$ sive $8 G - 57 \frac{5}{14} V$ ut lapsu quodam calami aut calculi scripseram ad finem Prop. IV. qui quidem est exigui momenti, et argumenta Propositionum sequentium non immutat. Calculi autem summam hic adjiciam. Inveneram in Prop. IV. esse B ad A , ut $\frac{1}{2} + \frac{c^2}{15 a^2} + \frac{c^4}{35 a^4}$, &c. ad $\frac{b}{a} \times \frac{1}{2} + \frac{c^2}{5 a^2} + \frac{c^4}{7 a^4}$, &c. adeoque substituendo loco $\frac{b}{a}$ ipsius valorem $\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a}}$ sive $1 - \frac{c^2}{2 a^2} - \frac{c^4}{8 a^4}$, &c. ut $\frac{1}{2} + \frac{c^2}{15 a^2} + \frac{c^4}{35 a^4}$, &c. ad $\frac{1}{2} + \frac{c^2}{30 a^2} + \frac{c^4}{840 a^4}$, &c. unde $B - A$ est ad G (seu $\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} A$) ut $\frac{c^2}{10 a^2} + \frac{23 c^4}{24 \times 35 a^4}$, &c. ad $1 + \frac{3 c^2}{20 a^2} + \frac{25 c^4}{8 \times 70 a^4}$, &c. Est autem $c^2 = 4 d x$, et $a^2 = d^2 + 2 d x + x^2$ ex iis quæ in Propositione supponuntur; unde $\frac{c^2}{4 a^2} = \frac{x}{d} - \frac{2 x^2}{d^2} + \frac{3 x^3}{d^3}$, &c. et substituendo loco $\frac{c^2}{a^2}$ ejus valorem $\frac{4 x}{d} - \frac{8 x^2}{d^2}$, &c. prodibit $B - A$ ad G , ut $14 d x + 18 x^2$ ad $35 d^2 + 21 d x + 17 x^2$ quàm proximè. Cùmque sit $\overline{B - A} \times d + 3 V d = 2 G x - 2 V x - \frac{3 V x^2}{d}$ per Corol. Prop. I. substituatur valor ipsius $\overline{B - A}$, et negligentur termini quos ingreditur $V x^2$ (quoniam V est admodum parva respectu G) eritque $3 \times 35 V d^2 = 56 G d x - 133 V d x + 24 G x^2$ et $x = \frac{3 \times 35 V d^2}{56 d G - 133 V d + 24 G x}$, quòd si in denominatore pro x scribatur valor vero propinquus $\frac{15 V d}{8 G}$, prodibit valor magis accuratus $\frac{3 \times 35 V d}{56 G - 88 V}$, eritque $x : d :: 15 V : 8 G - \frac{88}{7} V$ quàm proximè. Diversâ paulo ratione prodit $x = \frac{15 V d}{8 G}$

$$\frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4}, \&c. \text{ Quare gravitas illa erit } \int \frac{-3ebxdx}{3a^2\sqrt{c^2-x^2}\sqrt{x^2-g^2}} \\ + \int \frac{-3ebx^3dx}{5a^4\sqrt{c^2-x^2}\sqrt{x^2-g^2}}, \&c. \text{ Sit } z^2 = x^2 - g^2, \text{ et prior summa} \\ \text{erit } \int \frac{-ebdz}{a^2\sqrt{c^2-g^2-z^2}}, \text{ secunda erit } \int \frac{-ebx^2dz}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}} = \\ \int \frac{-ebdz \times z^2 + g^2}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}} \text{ Quæ cum subsequentibus summis ad circulares}$$

arcus faciliè reducuntur. Atque hinc ratio gravitatis particulæ A versùs hoc solidum ad gravitatem versùs sphæram super semi-diametrum C A constructam, erit qualis in Propositione assignatur, terminis seriei citissimè decrescentibus, si C F, C f et C g sint admodum parvæ. Si evanescat g, hæc series dabit gravitatem versùs sphæroidem in æquatore; quæ tamen elegantius investigatur in Prop. III.

III. In Prop. IX. observavimus post Newtonum vim Lunæ ad mare movendum cum vi Solis posse conferri, æstus in syzygiis et quadraturis comparando; eadem ratio obtineri posset conferendo æstus qui contingunt in syzygiis luminarium in diversis distantiiis Lunæ a Terra, si æstus essent accuratè proportionales viribus quibus producuntur. Designet L vim Lunæ mediocrem, S vim Solis mediocrem, X et x duas diversas distantias Lunæ a Terra in syzygiis æquinotialibus, Z et z distantias Solis a Terra in iisdem syzygiis, d et D mediocres utriusque distantias; et si Lunæ declinatio nulla sit, atque essent ut vires luminarium, seu ut $\frac{Ld^3}{X^3} + \frac{SD^3}{Z^3}$



et $\frac{Ld^3}{x^3} + \frac{SD^3}{z^3}$, hinc comparando, æstus ratio L ad S detegeretur.

Sit enim ascensus aquæ in priori casu ad ascensum in posteriori ut m ad n, eritque L ad S ut $\frac{mD^3}{z^3} - \frac{nD^3}{Z^3}$ ad $\frac{nd^3}{X^3} - \frac{md^3}{x^3}$

INQUISITIO PHYSICA

IN CAUSAM

FLUXUS AC REFLUXUS MARIS.

A. D.D. EULER, MATHEMATICARUM PROFESSORE, E SOCIETATE
ACADEMIÆ IMPERIALIS SANCTI-PETERSBURGENSIS.

*Cur nunc declivi nudentur littora ponto,
Adversis tumeat nunc maris unda fretis ;
Dum vestro monitu naturam consulo rerum :
Quàm procul a Terris abdita causa latet !
In Solem Lunamque feror. Si plauditis auso ;
Sidera sublimi vertice summa petam.*

CAPUT PRIMUM.

De causâ Fluxûs ac Refluxûs Maris in genere.

§. 1. OMNEM mutationem, quæ in corporibus evenit, vel ab ipsâ motûs conservatione proficisci, vel a viribus motum generantibus, hoc quidem tempore, quo qualitates occultæ causæque imaginariæ penitus sunt explosæ, nullâ indiget probatione. Hoc autem discrimen quovis oblato phænomeno diligentissimè considerari oportet, ne tam motûs conservationi ejusmodi effectus tribuatur, qui sine viribus oriri nequit, quàm vires investigentur, quæ motum suâ naturâ conservandum producant. Quo quidem in negotio, si debita attentio adhibeatur, errori vix ullus relinquatur locus: cùm ex legibus naturæ satis superque constet, cujusmodi motus vel per se conserventur, vel viribus externis debeantur. Corpus scilicet in motu positum propriâ vi hunc motum uniformiter in directum retinet: atque corpus, quod circa axem convenientem per centrum gravitatis transeuntem motum rotatorium semel est consecutum, eodem motu rotari perpetuò suâ sponte perget: neque hujusmodi motuum causam in ullâ re aliâ, nisi in ipsâ corporum naturâ, quæri oportet. Quocirca si

hujus generis phænomenon fuerit propositum, alia causa investigari non potest, nisi quæ a principio tales motus procreaverit.

§. 2. Hujus generis foret quæstio, si quæreretur causa motûs vertiginis planetarum ac Solis; hic enim sufficeret eam causam assignasse, quæ initio hos motus produxisset, cùm Sol æquè ac planetæ talem motum semel consecuti eundem propriâ vi perpetuò conservare debeant, neque ad hoc phænomenon explicandum vis ulla externa etiam nunc durans requiratur. Longè aliter se res habet, si motus proponatur neque uniformis, neque in directum procedens, cujusmodi est motus planetarum periodicus circa Solem: hoc enim casu minimè sufficit ea vis, quæ initio planetas ad istiusmodi motus impulerit, sed perpetuò novæ virium actiones requiruntur, a quibus tam celeritas quàm directio continuò immutetur: quæ vires, quàm primùm cessarent, subito planetæ orbitas suas desererent, atque in directum motu æquabili avolarent. Quòd si igitur phænomenon quodcunque naturæ proponatur, antè omnia sollicitè est inquirendum, ad quodnam genus id pertineat atque utrum causa in viribus externis sit quærenda, an in ipso subjecto corpore? Quinetiam sæpenumero usu venire potest, ut effectus utriusque generis in eodem phænomeno multùm sint inter se permixti; quo casu summo studio ii a se invicem discerni antè debebunt, quàm causarum investigatio suscipiatur.

§. 3. His ritè perpensis explicatio Galilei, quam in suis *Dialogis de Æstu Maris* assignare est conatus, mox concidit; putavit enim fluxum ac refluxum maris tantùm a motibus Terræ rotatorio circa axem et periodico circa Solem oriri, neque aliis viribus tribui oportere, nisi quæ hos motus tantùm producant, cùm conservent. Namque si ponamus Terram solo motu diurno esse præditam, iste motus mare aliter non afficiet, nisi id sub æquatore attollendo, ex quo figura Terræ sphæroidica compressa nascitur, motus verò reciprocus in mari omninò nullus hinc generari poterit. Quòd si autem Terræ insuper motum æquabilem in directum tribuamus, priora phænomena nullo modo afficientur, sed prorsus eadem manebunt, quemadmodum ex principiis mechanicis clarissimè perspicui licet, quibus constat motum uniformem in directum omnibus partibus systematis cujusunque corporum æqualiter impressum nullam omninò mutationem in motu et situ partium relativo inferre. Abeat nunc motus iste æquabilis Terræ in directum impressus in circularem vel ellipticum per vires quibus Terra perpetuò ad Solem urgetur; ac ne hoc quidem casu ullus motus reciprocus in mari produci poterit; quod cùm per se est perspicuum, tum etiam ab ipso Galileo non statuitur: ipse enim non tam ex mixtione

motûs vertiginis et periodici æstum maris proficisci est arbitratus, quàm ex motu quocunque progressivo sive rectilineo sive curvilineo, si is cum motu rotatorio combinetur.

§. 4. Quanquàm autem motus Terræ periodicus circa Solem cum motu rotatorio circa axem conjunctus nullum in mari motum reciprocum generare valet, tamen mare, quod si motus esset æquabilis in directum, in quiete persisteret, aliquantùm turbari debebit. Quòd si autem ad vim quâ Terra in orbitâ suâ continetur attendamus, non difficulter mutationem, quam mare ab ea patietur, colligere poterimus. Nam cùm partes Terræ a Sole remotiores minori vi, propiores verò majori sollicitentur, illæ ad majus tempus periodicum, hæ verò ad minus absolvendum cogen- tur, ex quo partibus Terræ fluidis, ut potè mobilibus, motus ab oriente versùs occidentem secundùm eclipticam inducetur, hancque veram esse causam existimo ac præcipuam cur tam oceanus quàm aër sub æquatore perpetuò habeat fluxum ab ortu versùs occasum. Possem etiam ex eodem principio clarè ostendere tam maris, si omninò liberum esset, quàm aëris celeritatem tantam fore, quâ tempore viginti-quatuor horarum spatium circiter viginti graduum absolvatur; sed cùm hæc inquisitio ad præsentem quæstionem propriè non pertineat, atque inclyta Academia fortassè aliâ occasione quæstiones hùc spectantes sit propositura, uberio- rem explicationem hujus insignis phænomeni eò usque differendam esse censemus; hoc quidem tempore tantùm indicasse contenti, motum Terræ periodicum conjunctim cum motu diurno mari motum aliquem imprimere posse, sed neutiquam motum reciprocum, uti Galileus est arbitratus.

§. 5. Uti in omnibus omninò quæstionibus physicis multò facilius est, quæ non sit causa phænomeni cujuspiam oblata, quàm quæ sit, ostendere; ita etiam præsens quæstio de fluxu ac refluxu maris est comparata, ut non difficulter causas falsò assignatas possimus refellere. Ac primò quidem post eversam Galilei sententiam, explicatio æstûs maris Cartesiana pressionì Lunæ innixa tot tantisque laborat difficultatibus, ut omninò subsistere nequeat. Præterquàm enim quòd istiusmodi pressio aliunde probari nequeat, atque ad hoc solum phænomenon explicandum gratuitò assumatur, observationibus etiam minimè satisfacit. In aperto enim ac libero oceano aquam mox post transitum Lunæ per meridianum elevari observamus, cùm secundùm Cartesii sententiam eodem tempore deprimi deberet; neque prætereà hoc modo satis distinctè explicatur, cur Luna sub Terrâ latens eundem ferè effectum exerat, ac si super horizonte ver- setur. Deinde hoc idem negotium non feliciori successu aggressus est Wallisius, causam in communi centro gravitatis Terræ et Lunæ quærens,

cujus explicatio mox satis dilucidè est subversa. Superest denique Newtoni theoria, quæ nemine contradicente phænomenis multò magis est consentanea: at in ea id ipsum quod hoc loco quæritur, causa scilicet physica, non assignatur, sed potiùs ad qualitates occultas referri videtur; interim tamen ne hæc quidem theoria satis est evoluta, ut de ejus sive consensu sive dissensu cum observationibus judicium satis tutum ferri queat.

§. 6. Cùm igitur dubium sit nullum, quin fluxûs ac refluxûs maris causa in viribus externis et realibus sit posita, quæ si cessarent, simul æstus maris mox evanesceret, ubi lateant hæ vires et quomodo sint comparatæ potissimùm nobis erit explicandum, hoc enim est id ipsum, quod celeberrima Academia Scientiarum Regia in quæstione propositâ requirit. Neque verò vires tantummodò indicasse sufficiet, verùm præterea id maximè erit monstrandum, quomodo istæ vires agant, atque hos ipsos effectus, quos observamus, non verò alios producant; in hoc enim totius quæstionis cardo, explicationis scilicet confirmatio, vertitur. Quoniam autem plerumque pluribus viribus excogitandis idem phænomenon explicari potest, studium adhibendum est summum in hac indagatione, ne ad vires inanes atque imaginarias delabamur, quæ in mundo neque sunt neque locum habere possunt. Parum enim scientiæ naturali consulunt, qui quovis phænomeno oblato sibi pro arbitrio mundi structuram peculiarrem effingunt, neque sunt solliciti, utrùm ea compages cum aliis phænomenis consistere queat, an verò secùs. Quòd si enim jam aliundè constet existere in mundo ejusmodi vires, quæ oblato effectui producendo sint pares, frustrà omne studium in conquisitione virium novarum collocabitur.

§. 7. Quoniam autem ad causam cujusque phænomeni detegendam, ad singulas circumstantias sedulò attendere necesse est, ante omnia mirificum consensum æstûs maris cum motu Lunæ contemplari conveniet. Non solùm enim insignis harmonia inter æstum maris, ac Lunæ motum diurnumprehenditur, sed etiam revolutio synodica respectu Solis ingentem affert varietatem. Omnes denique observationes abundè declarant rationem fluxûs et refluxûs maris a situ cùm Lunæ tum etiam Solis conjunctim pendere: ex quo statim prono ratiocinio consequitur, vires illas æstum maris producentes, quæcunque etiam sint, cùm Lunam potissimùm, tum verò etiam Solem respicere debere. Quamobrem imprimis nobis erit inquirendum, utrum ejusmodi vires Solem et Lunam respicientes, quæ in aquis talem effectum, qualis est æstus maris, producere queant, jure ac ratione statui possint, an secùs. Ac si pluribus modis istiusmodi vires animo concipere liceat, diligenter erit dispiciendum,

quænam cum aliis phænomenis consistere possint nec ne. Quantumvis enim explicatio quæpiam cum phænomenis conspiret, nisi virium, quæ assumuntur, existentia aliundè comprobetur, labili ea omninò innititur fundamento. Quòd si autem contrà, effectus ejusmodi viribus tribuatur quas in mundo reverà existere alia phænomena clarè docuerunt, atque summus explicationis cum experientiâ consensus deprehendatur, dubium erit nullum quin ista explicatio sit genuina et sola vera.

§. 8. Quamvis autem certis viribus Lunæ ac Soli tribuendis phænomenon æstus maris commodè explicari posset, tamen ob hanc solam causam istiusmodi vires statuere nimis audax videtur: quamobrem imprimis erit dispiciendum, num aliæ rationes ejusmodi vires non solùm admittant, sed etiam actu existere manifestò indicent. Perlustremus igitur vires, quas jam aliundè in mundo vigere novimus, sciscitemurque paucis an ad motum reciprocum oceano inducendum sint idoneæ: tales enim vires si in mundo jam extent, omnis labor in aliis inquirendis impensus irritus foret ac ridiculus. Ac primò quidem si Solem spectamus, motus Terræ annuus omninò declarat Terram perpetuò versùs Solem urgeri, et quasi attrahi, idque fortius in minori distantia, debilius verò in majori; atque adeò hanc Solis vim in Terram rationem tenere reciprocā duplicatam distantiarum: ex quo spontè sequitur non solùm universam Terram, sed etiam singulas ejus partes perpetuò versùs Solem urgeri. Tota quidem Terra æquè fortiter ad Solem sollicitatur, ac si omnis materia in ejus centro esset congesta; interim tamen partes circa superficiem sitæ vel magis vel minùs ad Solem allicientur, quàm totum Terræ corpus, prouti vel minùs vel magis sint remotæ a Sole, quàm centrum Terræ. Hinc igitur fit, ut hæc eadem vis ad Solem tendens aquam modò magis, modò minus trahat, ex quâ alternâ actione motus reciprocus in fluidis necessariò oriri debet. Quocircà ista Solis vis in præsentī negotio neutiquam negligi poterit, cùm ea, si fortè sola causam æstus maris non constituit, certè effectum aliarum virium necessariò afficere ac turbare debeat.

§. 9. Quemadmodum autem Terra cum omnibus suis partibus versùs Solem sollicitatur; ita eorum sententia non multùm a veritate abhorre videtur, qui in Lunâ similem vim collocant. Observationes quidem hujusmodi vim in Lunâ non demonstrant sicuti in Sole; cùm motus Terræ in orbitâ suâ a Lunâ omninò non affici deprehendatur: sed si docuerimus eandem vim ad Lunam respicientem, quæ æstui maris producendo sit par, in motu Terræ nullam sensibilem anomaliam producere valere, audacia, quæ fortè in talis vis admissione consistere videbatur, multùm

mitigabitur. Hujusmodi autem vis existentia aliis rationibus, nullo ad æstum maris habito respectu, satis clarè evinci potest; quia enim nullum est dubium, quin Luna ad Terram constanter feratur, ob æqualitatem actionis et reactionis Terram quoque versùs Lunam pelli necesse est. Namque si ponamus Sole penitus sublato, Terræ ac Lunæ omnem motum subito adimi, Luna utique ad Terram accedet; nemo autem non concedet, probè perpensis principiis mechanicis, Terram interea non prorsus esse quieturam, sed Lunæ obviam ituram, concursumque in communi gravitatis centro contingere: hoc autem evenire non poterit, nisi Terra actu ad Lunam sollicitetur. Deinde in ipsâ Lunâ gravitatem dari similem huic, quam in Terrâ sentimus, negari non potest; nisi enim talis vis in Lunâ vigeret, partes Lunæ fluidæ, cùm ob gravitatem in Terram, tum ob motum Lunæ circa proprium axem, etsi sit admodum lentus, et temporì periodico æqualis, jam dudum avolassent, partesque solidæ consistentiam suam amisissent. Pluribus deniquè aliis rationibus ex naturâ vorticum petitis, magis confirmari posset tale corpus mundanum, cujusmodi est Luna, subsistere non posse, nisi vortice sit cinctum, quo gravitas in id generetur. Quòd si autem gravitationem versùs Lunam concedamus, cur ejus actionem non ad nos usque admittamus, nulla omninò ratio suadet: quin potiùs ejusmodi vim similem statui conveniet, reliquis in mundo deprehensis, quæ quasi in infinitum porriguntur, atque inversam duplicatam tenent distantiarum rationem.

§. 10. His expositis manifestum est, et quasi experienciâ convictum, Terram cum singulis suis partibus tam versùs Lunam quàm versùs Solem perpetuò sollicitari, atque utramque vim proportionalem esse reciprochè quadratis distantiarum. Hæ igitur vires, cùm actu existant, constanterque effectum suum exerant, in præsentì negotio, quo in causam æstus maris inquirimus, præteriri omninò nequeunt; nisi dilucidè antè sit probatum, eas non solùm fluxum ac refluxum non generare, sed nequidem quicquam efficere. Si enim istæ vires ullum duntaxat motum reciprocum mari inducere valeant, quantumvis is etiam sit exiguus, atque adeò æstui maris fortassè contrarius, earum tamen ratio necessariò erit habenda, cùm sine illis vera causa, quæcumque sit, neque investigari neque cognosci possit. Neque præterea sanæ rationis præcepta permittunt alias vires excogitare, in iisque causam æstus maris collocare, antequam evidenter sit demonstratum, binas istas vires Solem Lunamque spectantes, quas non gratuitò assumimus, sed ex certissimis phænomenis in mundo existere novimus, ad fluxum ac refluxum maris producendum non esse sufficientes. In sequentibus autem Capitibus clari-

simè sumus ostensuri, ab his duabus viribus non solùm in oceano motum reciprocum generari debere, sed etiam eum ipsum, qui æstûs marini nomine insigniri solet: atque hanc ob rem firmiter jam affirmamus veram fluxûs ac refluxûs causam in Solis illis duabus viribus, quarum altera ad Solem est directa, altera ad Lunam, esse positam; hocque simul omnium eorum sententias funditûs evertimus, qui vel aliis omninò viribus idem phænomenon adscribere, vel cum his ipsis alias vires conjungere conantur.

§. 11. Quæstio igitur de causâ fluxûs ac refluxûs maris, prouti ea ab illustrissimâ Academiâ Regiâ est proposita, ad hanc deducitur quæstionem, ut binarum illarum virium, quibus singulæ Terræ partes cùm ad Solem tùm ad Lunam perpetuò urgentur, idque in distantiarum ratione reciprocâ duplicatâ, causa assignetur physica. Ex quo tractationem nostram bipartitam esse oportebit. Primò scilicet ex principiis mechanicis dilucidè erit ostendendum, a binis illis viribus Solem Lunamque respicientibus cùm fluxum ac refluxum maris generatim oriri debere, tùm etiam hoc modo singula phænomena distinctè explicari posse: hac enim parte absolutâ nullum supererit dubium, quin origo æstûs maris his ipsis viribus, quas actu jam in mundo existere docuimus, debeatur. Deinde verò harum virium causa physica indicari debet, cùm id sit præcipuum, quod inclyta Academia requirit. Quod quidem ad illam partem attinet, in ejus explicatione minimè hæsitamus; et clarissimis certissimisque demonstrationibus evincere pollicemur, per istas vires omnia omninò æstûs maris phænomena absolutissimè explicari posse; quâ in re nulli dubitationi ullus relinquitur locus, cùm tota ad geometriam et mechanicam sublimiorem pertineat, calculoque analytico sit subjecta. Altera verò pars, in scientiam naturalem imprimis incurrens, majori difficultati videtur obnoxia, nec tantæ evidentiae capax; verùm cùm ista res occasione plurimum quæstionum ab Academiâ celeberrimâ antehac propositarum jam tanto studio sit investigata atque absoluta, eam non minori certitudine expedire confidimus.

§. 12. Explosis hoc saltem tempore qualitatibus occultis missâque Anglorum quorundam renovatâ attractione, quæ cum saniori philosophandi modo nullatenùs consistere potest, omnium virium quæ quidem in mundo observantur, duplex statuendus est fons atque origo. Nemp: cùm viribus tribuatur vel motûs generatio vel immutatio, iste effectus semper vel ab allisione corporum, vel a vi centrifugâ proficiscitur, quarum actionum utraque facultati, quâ omnia corpora sunt prædita in statu suo sive quietis sive motûs æquabilis in directum perseverandi, debe-

tur. Ob hanc enim ipsam facultatem corpus in motu positum alia corpora, quæ vel ipsius motui directè sunt opposita, vel ejus directionem mutare cogunt, ad motum sollicitat; atque priori casu regulæ collisionis corporum, posteriori verò vis centrifugæ indoles et proprietates oriuntur ac demonstrantur. Cùm igitur omnia corpora terrestria tam versùs Solem, quàm versùs Lunam perpetuò sollicitentur, causa hujus sollicitationis continuo appulsui materiæ cujusdam subtilis, vel vi centrifugæ similis materiæ tribui debet. Priori igitur casu materiam subtilem statui oporteret, quæ constanter summâ rapiditate cùm ad Solem tùm ad Lunam ferretur: hujusmodi verò hypothesis ob maximas difficultates, quibus est involuta, admitti minimè potest. Primò enim perpetuò novis viribus esset opus, quæ materiam subtilem indesinenter versùs Solem Lunamque pellerent, quâ quidem re quæstio non majorem lucem assequeretur. Deinde talis motus per se diu consistere non posset, propter perpetuum materiæ subtilis ad eadem loca affluxum nullumque refluxum, ut taceamus alia maxima incommoda cum istiusmodi positione permixta.

§. 13. Exclusâ igitur materiæ subtilis continuâ allisione, tanquam ad vires cùm ad Solem tùm Lunam tendentes producendas minimè idoneâ, alia harum virium causa non relinquitur, nisi quæ in vi centrifugâ consistat. Quemadmodum autem materia subtilis in gyrum acta ac vorticem formans non solùm animo concipi, sed etiam in mundo persistere queat, jam satis superque est expositum, cùm in dissertationibus, quæ cùm quæstio de causâ gravitationis ageretur, laudes illustrissimæ Academiæ merebantur, tùm etiam in aliis operibus; quibus in locis simul dilucidè est ostensum, quomodo ejusmodi vortices comparatos esse oporteat, ut vires centrifugæ fiant quadratis distantiarum a centro vorticis reciproce proportionales. Quæ res cùm meo quidem judicio jam tam plana sit facta, ut vix quicquam ad præsens institutum attinens adjici queat, vorticum ulteriori examini sine ullâ hæsitatione supersedemus; idque eò magis, quòd celeberrima Academia ejusmodi amplam atque adeò jam confectam digressionem postulare haud videatur. Quoniam enim quæstio de causa gravitatis cùm versùs Terram tùm etiam versùs Solem et planetas jam satis est investigata ac diremta; nunc quidem, si cujuscunque phænomeni causa eò fuerit perducta, ibidem acquiescendum videtur, neque actum agendo denuò in causâ gravitatis investigandâ nimium immorari conveniret. Denique in præsentī negotio sufficere posset, si æstûs maris causa adhuc tantis tenebris obvoluta ad alia maximè aperta phænomena reducatur, quorum causa non solùm habetur probabilis, sed

etiam quæ sola sit veritati consentanea, cujusmodi est gravitatio tam versùs Solem quàm Lunam.

§. 14. Causam igitur fluxûs ac refluxûs maris proximam in binis vorticibus materiæ cujusdam subtilis collocamus, quorum alter circa Solem, alter verò circa Lunam ita circumagatur, ut in utroque vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum a centro vorticis; quæ lex vis centrifugæ obtinebitur, si materiæ subtilis vorticem constituentis celeritas statuatur tenere rationem reciprocam subduplicatam distantiarum a centro vorticis. Quæcunque igitur corpora in istiusmodi vortice posita ad ejus centrum pellentur vi acceleratrice, quæ pariter ac vis centrifuga quadratis distantiarum reciprocè est proportionalis. Vis absoluta autem quâ corpus quodpiam in datâ distantia a centro vorticis collocatum eò urgetur, pendet a celeritate materiæ subtilis absolutâ. Ac primò quidem, quod ad vorticem circa Solem rotatum attinet, ejus vis absoluta ex tempore Terræ periodico cum distantia ejusdem a Sole comparato tanta colligitur, ut corpus, cujus distantia a centro Solis æqualis est semi-diametro Terræ, eò sollicitetur vi, quæ sit 227512 vicibus major, quàm est gravitas naturalis in superficie Terræ. Metiemur autem hanc ipsam vim absolutam cujusque vorticis, per vim, quam idem vortex exerit in distantia a suo centro semi-diametro Terræ æquali: ex quo si vis gravitatis terrestris designetur per 1, erit vis absoluta Solis = 227512, cujus numeri loco brevitatis gratiâ utemur litterâ S. Simili modo vim vorticis Lunam cingentis absolutam indicabimus litterâ L, cujus valorem Newtonus rectè cùm ex ipso fluxu ac refluxu maris, tùm etiam ex præcessionem æquinociorum constituisse videtur circiter $\frac{1}{4}$. Quare si, positâ Terræ semi-diametro = 1, corporis cujusdam a centro Solis vel Lunæ distantia fuerit x, erit vis, quâ id corpus vel ad Solem sollicitatur vel ad Lunam, vel = $\frac{L}{x x}$ vel = $\frac{S}{x x}$, uti ex indole horum vorticum prona con-

sequentia fluit. In his quidem litterarum S et L determinationibus assumimus mediam Solis a Terra distantiam 20620 semi-diametrorum Terræ, quæ ex parallaxi horizontali 10'' sequitur, Lunæ verò a Terra distantiam mediam 60 semi-diametrorum Terræ; interim tamen vires ad mare movendum hinc ortæ ab his hypothesibus non pendent, uti sequentibus patebit.

§. 15. Quoniam igitur æstum maris per binas vires, quarum altera Solem respicit, altera Lunam, sumus exposituri, facilè videri possemus eandem omninò explicationem suscipere, quam Newtonus dedit in suis Principiis Mathematicis Philosophiæ Naturalis. Primùm autem notan-

dum est, quòd si Newtonus veram causam hujus phænomeni assignasset, summoperè absurdum atque absonum foret, novitatis studio aliam causam, quæ certò falsa futura esset, excogitare. Deinde verò Newtonus ne vestigium quidem reliquit, ex quo causa harum virium attractivarum, quas Soli Lunæque tribuit, colligi posset, sed potiùs de causæ physicæ inventionem, qualem Academia Regia potissimum requirit, desperasse videtur; id quod ejus asseclæ apertè testantur, qui attractionem omnibus corporibus propriam esse, neque ulli causæ externæ deberi firmiter asserunt, atque adèò ad qualitates occultas confugiunt. Denique Newtonus deductionem et expositionem omnium phænomenorum ad æstum maris pertinentium minimè perfecit, sed quasi tantum adumbravit; plena enim explicatio tot tamque difficilium Problematum solutionem postulat, quæ Newtonus non est aggressus: cùm enim hujus quæstionis enodatio amplissimos calculos requirat, ipse analysin vitans pleraque tantum obiter indicasse contentus fuit; ob quem defectum plurimis adhuc dubiis circa ipsius explicationem est relictus. Neque enim in his viribus veram æstis maris causam contineri antè certum esse potest, quàm absoluto calculo perfectus consensus phænomenorum cum theoriâ fuerit declaratus.



CAPUT SECUNDUM.

De viribus Solis et Lunæ ad Mare movendum.

§. 16. **EFFECTUS**, quos vires cùm Solis tùm Lunæ antè stabilitæ in Terram exerunt, ad duo genera sunt referendi: quorum alterum eos complectitur effectus quos Sol ac Luna in universam Terram tamquam unum corpus consideratam exercet; alterum verò eos, quos singulæ Terræ partes a viribus Solis ac Lunæ patiuntur. Ad effectus prioris generis investigandos, omnis Terræ materia tanquam in unico puncto, centro scilicet gravitatis, collecta consideratur, ac tam ex motu insito quàm viribus sollicitantibus motus Terræ progressivus in suâ orbitâ determinari solet. Ex hocque principio innotuit vim hanc Solis efficere, ut Terra circa Solem in orbitâ ellipticâ circumferatur, vim Lunæ autem tam esse debilem, ut vix ac ne vix quidem ullam sensibilem perturbationem in motu Terræ annuo producere valeat. Contrà autem docebitur, vim Lunæ ad partes Terræ inter se commovendas ac mare agitantum multò esse fortiolem vi Solis; ex quo plerisque primo intuitu summè

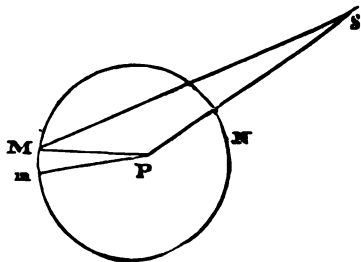
paradoxon videatur, quòd vis Lunæ in priori casu respectu vis Solis evanescat, cùm tamen eadem casu posteriori multum excedat vim Solis. Sed mox, cùm effectus utriusque generis diligentius evolvemus et perpendemus, satis dilucidè patebit, eos inter se maximè discrepare, atque a vi, quæ in universam Terram minimum exerat effectum, maximam tamen agitationem partium Terræ inter se oriri posse et vicissim.

§. 17. Ad illum autem harum virium effectum, qui in commotione partium Terræ inter se consistit, dijudicandum, ante omnia probè notari oportet, si singulæ Terræ partes viribus æqualibus et in directionibus inter se parallelis sollicitentur, eo casu nullam omnino commotionem partium oriri, etiamsi sint maximè fluidæ nulloque vinculo invicem connexæ, sed totum virium effectum in integro tantum corpore movendo consumtum iri; perindè ac si totum Terræ corpus vel in unico puncto esset conflatum, vel ex materiâ firmissimè inter se connexâ constaret. Ex quo manifestum est partes Terræ saltem fluidas, quæ viribus cedere queant, inter se commoveri non posse, nisi a viribus dissimilibus urgeantur: atque hanc ob rem non magnitudo virium partes Terræ sollicitantium, sed potiùs dissimilitudo, quâ cùm quantitatis tàm directionis ratione inter se discrepant, eum effectum, quo situs partium mutuus perturbetur, producit. Ita vis Solis, etsi est maxima, tamen ob insignem distantiam partes Terræ ferè æqualiter afficit, contrà verò vis Lunæ ob propinquitatem admodum inæqualiter: unde a Lunâ multò major agitatio oceani resultat, quàm a Sole, quamvis ea vis, quæ ad Solem tendit, insigniter major sit alterâ Lunam respiciente. Atque hoc pacto dubium antè allatum funditus tollitur, hocque adhuc planius fiet, si utriusque vis effectus ad calculum revocabimus.

§. 18. Ad inæqualitatem igitur virium quibus singulæ Terræ partes vel a Sole vel a Luna sollicitantur, definiendam, ante omnia vim, quâ universa Terra, si in suo centro gravitatis esset concentrata, afficeretur, determinari oportet, hæcque est ea ipsa vis, quæ Terræ motum progressivum in sua orbita respicit et turbat; deindè dispiciendum est, quantum vires, quibus singulæ Terræ partes urgentur, tàm ratione quantitatis quàm directionis ab illâ vi totali discrepent. Quòd si enim nulla deprehendatur differentia, partes quoque singulæ situm suum relativum inter se retinebunt; at quò major erit differentia inter vires illas singulas partes sollicitantes, eò magis eæ inter se commovebuntur, situm relativum permutabunt. In hac autem investigatione, simul gravitatis naturalis, quâ omnia corpora versùs centrum Terræ tendunt, ratio est habenda; hæc enim vis in causa est, quòd quantumvis vires Solis et Lunæ in

diversis Terræ regionibus sint inæquales, æquilibrii tamen status detur, in quo partes tandem singulæ conquiescant, neque perpetuò inter se agitari pergant. Atque hanc ob rem singulæ Terræ partes a tribus viribus sollicitatæ considerari debebunt, primò scilicet a propriâ gravitate, quâ directè deorsum nituntur; tùm verò a vi, quâ ad Solem urgentur, ac tertiò a vi versùs Lunam directâ; hæque tres vires, cujusmodi phænomena quovis tempore in partibus Terræ fluidis gignant, erit investigandum.

§. 19. Quò igitur vim totalem, quâ Terra vel a Sole vel a Lunâ urgetur, definiamus, consideremus primùm peripheriam circuli MN tanquam ex materiâ homogeneâ conflatam, cujus centro P verticaliter immineat Sol vel Luna in S , ita ut recta PS ad planum circuli MN sit perpendicularis. Sit circuli hujus radius $PM = y$, et distantia $SP = x$, ac vis sive Solis sive Lunæ absoluta = S . His positis elementum peripheriæ Mm pelletur ad S in directione MS vi



$$\text{acceleratrice} = \frac{S}{MS^2} = \frac{S}{xx + yy},$$

positâ cùm vi gravitatis naturalis in superficie Terræ = 1, tùm etiam semidiametro Terræ = 1 : atque hanc ob rem elementum Mm versùs S

nitetur vi = $\frac{S \times Mm}{xx + yy}$ Resolvatur hæc vis in binas laterales, quarum

alterius directio cadat in MP , alterius verò sit parallela directioni PS ; atque evidens erit vires omnes MP per totam peripheriam se mutuò destruere, alterarum verò mediam directionem cadere in PS , ac vim his omnibus æquivalentem iisdem conjunctim sumtis fore æqualem. Trahetur

autem elementum Mm in directione ipsi PS parallela vi = $\frac{Sx \times Mm}{(xx + yy)^{\frac{3}{2}}}$,

unde positâ ratione radii ad peripheriam = 1 : π tota circuli MN peripheria, quæ erit = πy , urgebitur seu quasi gravitabit versùs S in ipsâ

directione PS vi = $\frac{\pi Sxy}{(xx + yy)^{\frac{3}{2}}}$. Vis autem acceleratrix quâ hæc

peripheria circuli versùs S sollicitabitur, prodibit, si vis motrix inventa

dividatur per massam movendam, quæ est = πy , eritque = $\frac{Sx}{(xx + yy)^{\frac{1}{2}}}$

§. 20. Hoc præmisso, contemplemur superficiem sphaericam genitam

conversione circuli $A M B$ circa diametrum $A B$; sitque semi-diameter $A C = B C = r$; erit ipsa superficies $= 2 \pi r r$. Jam attrahatur hæc superficies ad Solem Lunamve in S , existente distantia $S C = a$; atque ad vim totalem seu conatum quo integra superficies ad S tendet, inveniendum, concipiatur annulus genitus conversione elementi $M m$ circa diametrum $A B$, quæ protensa per S transeat. Positis igitur $S P = x$, $P M = y$, erit per §. præced. conatus hujus annuli in directione $P S = \frac{\pi S x y. M m}{(x x + y y)^{\frac{5}{2}}}$. At posito $P p = d x$, erit $M m = \frac{r d x}{y}$, et $x x + y y$

$= 2 a x - a a + r r$, unde annuli conatus versùs S erit $= \frac{\pi S r x d x}{(2 a x - a a + r r)^{\frac{5}{2}}}$, cujus integrale

est $= C + \frac{\pi S r (a x - a a + r r)}{a^{\frac{5}{2}} \sqrt{(2 a x - a a + r r)}}$, ex quo co-

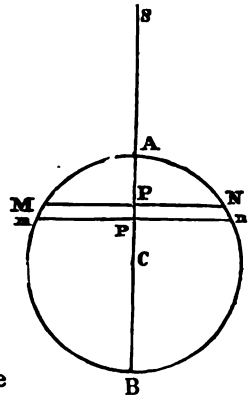
natus portionis superficiei sphaericæ conversione arcus $A M$ ortæ prodibit $= \frac{\pi S r r}{a a} +$

$\frac{\pi S r (a x - a a + r r)}{a^{\frac{5}{2}} \sqrt{(2 a x - a a + r r)}}$. Quare si ponatur $S P = S B$ seu $x = a + r$, emerget conatus totius superficiei sphaericæ $= \frac{2 \pi S r r}{a a}$: hincque

cùm ipsa superficies sit $= 2 \pi r r$, erit vis acceleratrix quâ superficies sphaerica actu versùs S tendet $= \frac{S}{a a}$, ideóque tanta, quanta foret, si tota

superficies in centro C esset collecta.

§. 21. Cùm igitur superficies sphaerica perinde ad Solem sive Lunam in S sollicitetur, ac si tota in ipso centro esset conflata, hæc proprietas ad omnes superficies sphaericas, ex quibus integra sphaera composita concipi potest, patebit, dummodo singulæ hæ superficies ex materiâ homogeneâ constant, sive quod eodem redit, ipsa sphaera in iisdem a centro distantis sit æquè densa. Hanc ob rem ejusmodi sphaera quoque perinde ad S in directione $P S$ urgebitur, ac si tota ipsius materia in centro C esset concentrata; hæcque proprietas non solùm in ejusmodi sphaeras competit, quæ totæ ex materiâ uniformi sunt confectæ, sed etiam ut jam indicavimus, in tales, quæ ex materiâ constant difformi, dummodo in æqualibus a centro distantis, materia circumquaque sit homogenea seu saltem ejusdem densitatis. Cùm igitur Terram sibi repræsentare liceat tanquam sphaeram, si non ex uniformi materiâ conflata, tamen sine ullo errore ita



comparatam, ut in æqualibus circa centrum intervallis materiam æquè densam includat, Terra quoque universa tam a Sole quàm a Lunâ æquè sollicitabitur, ac si omnis ejus materia in centro esset collecta. Quamquam enim nunc quidem accuratissimis ab illustrissimâ Academiâ Regiâ institutis passim mensuris satis est demonstratum, Terræ figuram ad polos esse compressam, tamen tantilla a perfectâ spherâ aberratio, in aliis quidem negotiis maximi momenti, in hoc instituto tutò negligi potest. Parique ratione, etiamsi Terra in æqualibus a centro distantis non sit æquè densa, tamen differentia certè non est tanta, ut error sensibilis inde sit metuendus.

§. 22. Ut igitur vires inveniantur, quæ tendant ad situm partium Terræ relativum immutandum, definienda est vis acceleratrix, quâ centrum Terræ sive ad Solem sive ad Lunam urgeatur: quâ cognitâ, si comperiantur omnes Terræ partes æqualibus viribus acceleratricibus et in directionibus parallelis ugeri, nulla omnino situs mutatio, nullaque proinde maris agitatio orietur. Sed Terra in se spectata omnium partium situm mutuum invariatur conservabit. At si vires, quibus singulæ partes a Sole aut Lunâ urgentur, discrepent a vi centrum Terræ afficiente, tam ratione quantitatis quàm directionis, tum nisi firmissimè inter se sint connexæ, in situ suo mutuo perturbari debebunt. Hocque casu aquæ, quæ ob fluiditatem vi etiam minimæ cedunt, sensibilibus agitabuntur, atque affluendo defluendoque aliis locis elevabuntur, aliis deprimentur. Cum autem iste motus, qui in singulis Terræ partibus generatur, a differentiâ inter vires centrum Terræ et ipsas partes sollicitantes proficiscatur, propria vis, quâ quæque particula agitabitur, innotescet, si a vi acceleratrice illam particulam sollicitante auferatur vix acceleratrix, quam centrum Terræ patitur: hæcque subtractio ita instituitur, ut cuique particulæ præter vim actu eam sollicitantem alia vis æqualis illi, quam centrum perpetitur, in directione contrariâ applicata concipiatur: tum enim vis quæ ex compositione harum duarum oritur, erit vera vis particulam illam de loco suo deflectens.

§. 23. Consentanea est hæc reductio principiis mechanicis, quibus statuitur motum relativum in systemate quocunque corporum et a quibuscunque viribus sollicitatorum manere invariatur, si non solum toti systemati motus æquabilis in directum simul imprimatur, sed etiam singulis partibus vires æquales quarum directiones sint inter se parallelæ, applicentur. Nostro igitur casu motus intestinus partium Terræ non turbabitur, si singulis particulis vires æquales in directionibus parallelis applicemus ut fecimus: quòd si autem istæ vires æquales sint illi, quâ tota

Terra seu centrum sollicitatur, et contrariæ, hoc ipso Terræ motum curvilineum et inæquabilem, quippe qui ab iisdem viribus oritur, adimemus. Quare si insuper toti Terræ motum æqualem et contrarium illi, quo actu fertur, impressum concipiamus, obtinebimus totam Terram quiescentem, atque etiam nunc partes perinde agitantur et inter se comovebuntur, ac si nullas istiusmodi mutationes intulissemus. Quilibet autem facillè percipiet, quantum ex hâc reductione subsidium assequamur; multò enim facilius erit mutationes, quæ in ipsâ Terrâ accidunt, percipere atque explicare, si centrum Terræ constituatur immotum, quàm si totalis motus singularum partium motibus esset permixtus. Hanc ob rem istâ reductione quâ centrum Terræ in quietem redigitur, perpétuò utemur, quò phænomena æstûs maris, prouti in Terrâ immotâ sentiri debent, eliciamus, quippe qui est casus naturalis, ad quem omnes observationes sunt accommodatæ, omnes verò theoriæ accommodari debent.

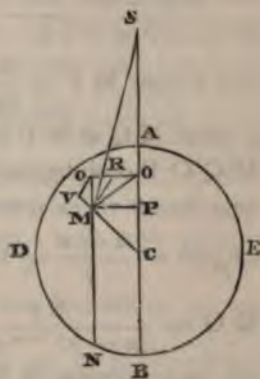
§. 24. Concipiatur nunc Terra tota tanquam globus A D B E urgeri ad Solem Lunamve in S existentem, cujus vis absoluta seu ea, quam in distantia a centro suo S semi-diametro Terræ æquali exerit, sit = S, distantia verò centri Terræ C ab S seu C S ponatur = a; eritque vis acceleratrix, quâ tota Terra tanquam in C collecta sollicitabitur in directione C S, = $\frac{S}{a a}$.

Contemplemur jam particulam Terræ quamcunque M cujus situs ita sit definitus, ut sit C P = x et P M = y, existente M P normali ad C S; hinc igitur habebitur S P = a — x et S M = $\sqrt{(a - x)^2 + y^2}$. Vis igitur acceleratrix, quâ particula M versùs S pelletur, erit =

$\frac{S}{(a - x)^2 + y^2}$; a quâ cum auferri debeat vis,

quâ tota Terra versùs S nititur, concipienda est particulæ M applicata vis = $\frac{S}{a a}$ in directione M N ipsi C S parallela et opposita; quæ duæ

vires particulam M æquè afficient ac si universa Terra quiesceret vel uniformiter in directum moveretur, qui casus ab illo non differt. Ex his igitur ambabus viribus conatus innotescet, quo particula M a vi ad S directâ de loco suo recedere annitetur: ad ipsum autem motum definiendum insuper vis gravitatis erit respicienda: et quia hæc particula non est



libera, sed quaquaversus materiâ terrestri circumdata, investigari oportet, quantum ista materia effectum viribus sollicitantibus concedat.

§. 25. Quoniam autem in hoc Capite nobis nondum est propositum in ipsum effectum ab his viribus oriundum inquirere, sed tantum conatum evolvere atque explorare; diligentius perpendemus, cujusmodi vires ex combinatione harum potentiarum particulam M sollicitantium resultent. Hunc in finem resolvatur vis M S in duas laterales, quarum alterius directio parallela sit ipsi C S, altera verò in M P cadat: ex quo reperietur vis illa particulam M in directione M Q urgens

$$= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}; \text{ altera verò vis in direc}$$

$$\text{tione M P trahens} = \frac{S y}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \text{ Cùm}$$

autem particula M insuper trahatur in directione M N vi = $\frac{S}{a}$, tres istæ vires a Sole Lu-

nâve in S existente reducentur ad duas, quarum altera in directione M Q urgens erit =

$$\frac{S(a-x)}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}, \text{ altera verò directio-}$$

$$\text{nem habens M P} = \frac{S y}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \text{ Quare}$$

si rectæ M Q et M P his viribus proportionales capiantur, et rectangulum M Q O P compleatur, exprimet diagonalis M O tam directionem quam quantitatem vis ex tribus præcedentibus ortæ: erit autem anguli O M P

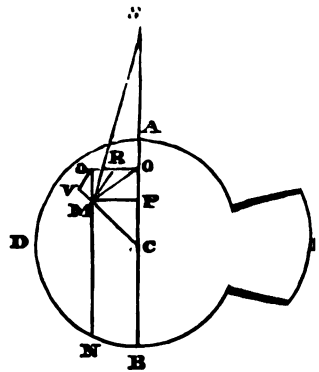
$$\text{tangens} = \frac{a-x}{y} - \frac{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 y}; \text{ quo cognito, si fiat ut M P ad}$$

$$\text{M O ita} \frac{S y}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ ad quartam, hæc ipsa quarta proportionalis}$$

erit vis particulam M in directione M O sollicitans, quæ oritur a vi ad S tendente.

§. 26. Ut autem istæ vires facilius cum gravitate naturali, cujus directio est M C, conjungi queant, resolvantur eæ in binas, quarum altera in ipsam directionem M C cadat, alterius verò directio sit M R normalis ad M C. Ad hoc commodissimè præstandum, resolvatur vis M S primum in duas, quarum altera ut antè directionem habeat ipsi C S parallelam, alterius verò directio in ipsam M C incidat. Cùm igitur sit M C

$$= \sqrt{x^2 + y^2} \text{ erit prior vis} = \frac{S a}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ posterior verò} =$$



$\frac{S \sqrt{(x^2 + y^2)}}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ quâ vis gravitatis augebitur. At si a priori auferatur

$\text{vis} = \frac{S}{a^2}$, remanebit vis particulam M in directione M Q sollicitans =

$\frac{S a}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}$. Jam ex Q in C M productam demittatur

perpendicularum Q V, eritque ob similitudinem triangulorum Q V M et M P C vis gravitati contraria secundum directionem M V agens ex vi

M Q orta = $\frac{S a x}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(x^2 + y^2)}} - \frac{S x}{a^2 \sqrt{(x^2 + y^2)}}$ unde

omninò particula M a vi ad S tendente versùs C urgebitur vi =

$\frac{S x}{a^2 \sqrt{(x^2 + y^2)}} - \frac{S (a x - x x - y y)}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(x^2 + y^2)}}$. Præterea verò

eadem particula M in directione M R ad M C normali sollicitabitur vi

= $\frac{S a y}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(x^2 + y^2)}} - \frac{S y}{a^2 \sqrt{(x^2 + y^2)}}$.

§. 27. Tametsi istæ expressiones tantoperè sint compositæ, ut parum ex iis ad usum deduci posse videatur, tamen si consideremus distantiam Lunæ a Terrâ, multò magis autem distantiam Solis, vehementer excedere quantitatem Terræ, ac propterea quantitates x et y respectu quantitatis a exiguas admodum esse; per approximationem satis commodas

formulas ex iis derivare licebit. Cùm enim sit proximè $\frac{1}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

= $(a^2 - 2 a x + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^3} + \frac{3 (2 a x - x x - y y)}{2 a^5} +$

$\frac{15 (2 a x - x x - y y)^2}{8 a^7}$, loco $\frac{1}{((a-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ satis tutò substitui

poterit $\frac{1}{a^3} + \frac{3 x}{a^4} + \frac{3 (4 x x - y y)}{2 a^5}$. Ex his autem obtinebitur vis, quâ

particula M præter gravitatem a vi Solis sive Lunæ in S existentis ad

centrum Terræ C in directione M C urgetur, = $\frac{S (y y - 2 x x)}{a^3 \sqrt{(x^2 + y^2)}} +$

$\frac{3 S x (3 y y - 2 x x)}{2 a^4 \sqrt{(x^2 + y^2)}}$. Præterea autem eadem particula M sollicitabi-

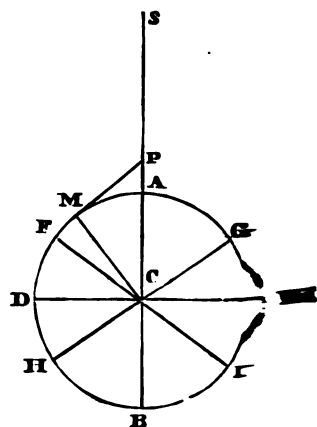
tur in directione M R ad M C normali, vi = $\frac{3 S x y}{a^3 \sqrt{(x^2 + y^2)}} +$

$\frac{3 S y (4 x x + y y)}{2 a^4 \sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{3 S y}{a^3 \sqrt{(x^2 + y^2)}} \left(x + \frac{4 x x - y y}{2 a} \right)$. Atque

cùm in his formulis termini primi posteriores multis vicibus excedant, rem crassiùs inspiciendo, particula M a vi Solis Lunæve secundum M C

$$\text{urgetur vi} = \frac{S(y y - 2 x x)}{a^3 \sqrt{(x^2 + y^2)}}, \text{ in directione verò } M R \text{ vi} = \frac{3 S x y}{a^3 \sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

§. 28. Ex his igitur postremis formulis intelligitur ab actione Solis sive Lunæ in S existentis gravitatem particulæ M augeri si ejus situs respectu rectæ S C ita fuerit comparatus, ut sit $y y > 2 x x$ hoc est tangens anguli M C P $> \sqrt{2}$ posito sinu toto = 1, contrà verò gravitatem diminui, si fuerit $y y < 2 x x$. Quare cùm angulus cujus tangens est = $\sqrt{2}$ contineat 54°. 45'. circiter, si concipiatur circulus Terræ maximus quicunque A D B E, cujus planum per punctum S transeat, in eoque ducantur rectæ F C I et G C H, quæ cum rectâ S A B angulos constituent 54°. 45'.; tùm omnes Terræ particulæ in spatiis F C H et G C I sitæ gravitatis naturalis augmentum accipient, reliquæ verò particulæ in spatiis F C G et H C I positæ decrementum gravitatis patientur. Atque hinc, quâcumque Terræ particulâ propositâ, definiri poterit, quantum ejus gravitas a Sole Lunâve in S existente vel augeatur vel diminuatur. Altera verò vis, quâ particula M in directione horizontali M R urgetur, (vide figuram ad pag. 262.) affirmativa erit, in eamque plagam, quæ in figura repræsentatur, verget, si quantitates x et y ambæ fuerint vel affirmativæ vel negativæ: contrariumque eveniet, si earum altera sit affirmativa, altera negativa. Quare si particula M sita fuerit vel in quadrante A C D vel A C E, tum vis horizontalis ad rectam C A tendet; contrà verò hæc vis ad radium C B dirigetur, si particula M sit vel in quadrante B C D vel B C E constituta. Ex quibus perspicitur effectus vel Solis vel Lunæ in ambo hemisphæria, superius scilicet D A E et inferius D B E, inter se esse ferè similes: quæ similitudo quoque in ipso æstu maris observatur.



§. 29. Ponamus nunc particulam M in ipsâ Terræ superficie esse constitutam, eritque $\sqrt{(x^2 + y^2)} = 1$ ob Terræ semi-diametrum = 1. Quare si particula M fuerit posita in M, existente anguli A C M sinu = y et cosinu = x, ejus gravitas naturalis acceleratrix a Sole Lunâve in S augebitur vi = $\frac{S(y^2 - 2 x x)}{a^3}$, secundùm horizontem autem in directione

MR urgebitur vi $= \frac{3 S x y}{a^3}$. Gravitas igitur maximè augebitur, si particula M posita fuerit in D vel E , quibus in locis punctum S in horizonte apparet; ibi verò gravitatis augmentum erit $= \frac{S}{a^3}$. In punctis autem A et B , quæ punctum S vel in suo zenith vel nadir positum habent, maximum deprehendetur gravitatis decrementum, quod scilicet erit $= \frac{2 S}{a^3}$; ita ut maximum gravitatis decrementum, duplò majus sit quàm maximum incrementum. Vis autem horizontalis $\frac{3 S x y}{a^3}$ maxima evadet, si angulus ACM fuerit semi-rectus, id quod accidit in iis Terræ regionibus, in quibus punctum S conspicitur vel 45° . gradibus supra horizontem elevatum, vel tantundem sub horizonte depressum latet: his igitur casibus ob $x y = \frac{1}{2}$ fiet vis horizontalis $= \frac{3 S}{2 a^3}$. Hujus ergo vis effectus in hoc consistet, ut directio gravitatis mutetur, atque versùs rectam SC inclinetur angulo cujus tangens est $= \frac{3 S}{2 a^3}$, existente sinu toto $= 1$, quia gravitatem unitate designamus.

§. 30. Hæ itaque vires si satis essent magnæ, in ponderibus utique sentiri deberent, ac prior quidem gravitatem naturalem vel augens vel diminuens in oscillationibus pendulorum animadverti deberet, eorum motum vel accelerando vel retardando; posterior verò vis situm pendulorum quiescentium verticalem de hoc situ deflecteret, atque ad horizontem inclinatum efficeret. Quoniam autem hujusmodi perturbationes non observamus, operæ pretium erit dilucidè monstrare vires illas tam esse exiguas, ut hi effectus sensus nostros omninò effugiant. Primum igitur cùm pro Sole sit $S = 227512$ atque $a = 20620$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{385355701}$; pro Lunâ autem quia est $S = \frac{1}{40}$ et $a = 60$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{8640000}$; ex quo vis Lunæ plus quàm quater major est vi Solis, cæteris paribus; atque si Solis et Lunæ vires prorsùs conspirent, erit ex iis conjunctim $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{7057700}$ seu proximè $= \frac{1}{7000000}$. Hinc maxima gravitatis diminutio, quæ quidem oriri poterit, erit $= \frac{1}{3500000}$,

maximum verò incrementum = $\frac{1}{7000000}$; unde numerus oscillationum ejusdem penduli eodem tempore editarum, illo casu erit ut $\sqrt{1 - \frac{1}{3500000}}$ seu $1 - \frac{1}{7000000}$ hoc verò casu ut $\sqrt{1 + \frac{1}{7000000}}$ seu $1 + \frac{1}{14000000}$. Numeri ergo oscillationum ab eodem pendulo eodem tempore absolutarum, cum gravitas maximè est diminuta, et cum maximè est aucta, tenebunt rationem ut 13999998 ad 14000001, hoc est ut 4666666 ad 4666667, ex quo satis perspicitur differentiam hanc minimè percipi posse. Similis autem omninò est ratio alterius phænomeni declinationis scilicet a situ verticali comparata, quæ nunquam ad 5''' exsurgere potest.

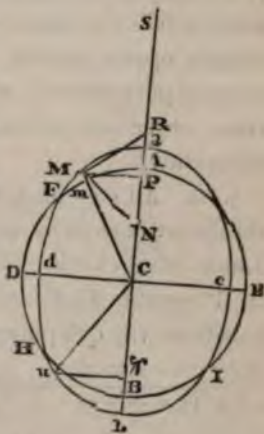


CAPUT TERTIUM.

De Figurâ, quam vires cum Solis, tum Lunæ, Terræ inducere conantur.

§. 31. CUM igitur in Capite præcedente vires tam a Sole quàm a Lunâ oriundas determinaverimus, quibus singulæ Terræ particulæ ad situm relativum cum inter se tum respectu centri, quod in hoc negotio tanquam quiescens consideratur, immutandum sollicitantur; ordo requireret, ut jam in ipsum motum, quo singulæ particulæ inter se commoveri debeant, inquireremus. Verum cum hæc investigatio sit altioris indaginis, atque opus habeat principiis mechanicis ad motum partium inter se respicientibus, qualia vix usquam adhuc reperiuntur; in hoc Capite rem secundum principia statica ulterius persequi pergamus, ac figuram determinemus, quam vires Solis et Lunæ cum seorsim tum etiam conjunctim inducere conantur. Hunc in finem Terram undequaque materiâ fluidâ seu aquâ cinctam contemplabimur, quò sollicitationibus obedire ac figuram iis convenientem actu induere queat. In hoc scilicet negotio Solem et Lunam pariter ac ipsam Terram quiescentes concipimus, ita ut inter se perpetuò eundem situm relativum conservent, quo pacto Terræ ab actionibus Solis ac Lunæ figura permanens mox induetur, quam tamdiu retinebit, quoad item situs relativus duret. Perspicuum autem est cognitionem hujus figuræ magno futuram esse adjumento ad ejusdem figuræ transmutationem definiendam, si tam Soli quàm Lunæ motus tribuatur.

§. 32. Consideremus igitur primùm Terram in statu suo naturali, in quem se solâ vi gravitatis composuit; in quo, cùm habitura sit figuram sphæricam, repræsentet circulus A D B E seu potiùs globus ejus rotatione ortus Terram, quam præterea undique aquâ circumfusam ponimus. Versetur jam Sol vel Luna in S, a cujus vi cùm gravitas naturalis tam in A quàm in B diminuatur, in D verò et E augeatur, manifestum est Terram seu potiùs aquam illi circumfusam elevatum iri in A et B, contrà verò in D et E deprimi, idque eousque, quoad sollicitationes a Sole Lunâve in S oriundæ cum vi gravitatis ad æquilibrium fuerint redactæ. Sit itaque curva a d b e ea figura, quæ circa axem a b rotata generet Terræ formam, quam a vi ad S directâ tandem recipiet, atque cùm aquæ nunc ponantur in æquilibrio constitutæ, necesse est ut directio media omnium sollicitationum, quibus singulæ Terræ particulæ in supremâ superficie sitæ urgentur, ad ipsam superficiem sit normalis. Quare si particulam quamcunque M spectemus, ea primùm a gravitate naturali in directione M C urgetur deorsùm, idque vi, quam constanter ponimus = 1; quippe quæ est ipsa gravitas in superficie Terræ, eò quòd elevatio vel depressio particulæ distantiam ejus a centro Terræ, a quâ variatio gravitatis pendet, sensibiliter non immutat. Deinde verò eadem particula M a vi in S existente sollicitatur duplici vi, quarum alterius directio in ipsam M C incidit, alterius verò in M R normalem ad M C. Quocirca trium harum virium mediam directionem incidere oportet in rectam M N normalem ad curvam a M d, quo ipso natura hujus curvæ determinabitur.



§. 33. Dubium hîc subnasci posset, quod cùm ad præsens institutum omnium virium, quibus singulæ particulæ sollicitantur, ratio haberi debeat, eam hîc negligamus, quæ a vi centrifugâ motûs Terræ diurni oritur, quippe quæ non solùm non est infinitè parva, sed multis vicibus major, quàm vires quæ vel a Sole vel Lunâ resultant: sed quia hæc vis constantem producit effectum, Terræ scilicet figuram sphæroidicam ad polos compressam, mutationem, quæ in fluxu ac refluxu maris observatur, sensibiliter afficere nequit. Deinde quamvis hîc figuram Terræ sphæricam ponamus, tamen in aberrationem præcipuè ab hac figurâ tam a Sole quàm Lunâ oriundam inquirimus: manifestum autem est, quantum figura aquæ ob vires Solis Lunæve a sphæricâ recedat, tantundem

aquæ figuram admisso motu diurno Terræ a figurâ sphæroidicâ esse discrepaturam. Quâpropter in hoc negotio sufficere potest, si, Terrâ instar sphææræ perfectæ consideratâ, definiamus quantam differentiam in aquæ figurâ vires cùm Solis tùm Lunæ producant: hâc enim determinatâ, si Terræ motus vertiginis restituatur, perspicuum erit totam figuram sub æquatore intumescere, sub polis autem subsidere; ita tamen ut ubique eadem vel elevatio vel depressio aquæ a viribus Solis Lunæve maneat. Namque si ulla etiam varietas in æstu maris a motu vertiginis Terræ proficiscatur, ea calculo monstrante nusquam major esse potest parte $\frac{1}{100}$ æstûs totalis; tantilla autem differentia notari non meretur, neque ob eam causam operæ pretium est tam complicatos et abstrusos calculos inire, ad quos perveniretur, si Terræ figura naturalis a sphæricâ diversa poneretur, atque insuper vis centrifuga a motu vertiginis Terræ in computum duceretur.

§. 34. Ad curvam igitur a M d b, cui ea quæ ex alterâ parte axis a b similis est et æqualis, determinandam, ponatur vis absoluta sive Solis sive Lunæ in S existentis = S, distantia C S = a, ac ducta semi-ordinata M P vocetur C P = x, et P M = y. Ex præcedenti igitur Capite habebitur vis, quâ punctum M vel a Sole vel Lunâ versùs C urgebitur = $\frac{S(y y - 2 x x)}{a^3 \sqrt{(x x + y y)}}$, insuper autem idem punctum M sollicitabitur in direc-

tione M R normali ad M C vi = $\frac{3 S y x}{a^3 \sqrt{(x x - y y)}} + \frac{3 S y (4 x x - y y)}{2 a^4 \sqrt{(x x + y y)}}$.

Præter has verò vires punctum M gravitate naturali deorsum pellitur vi = 1 secundùm directionem M C, ita ut punctum M ab omnibus his viribus conjunctim in directione M C deorsum urgeatur vi = 1 + $\frac{S(y y - 2 x x)}{a^3 \sqrt{(x x + y y)}}$ ubi ob 1 sequens terminus tutò negligi potest, et in

directione M R vi = $\frac{3 S y x}{a^3 \sqrt{(x x + y y)}} + \frac{3 S y (4 x x - y y)}{2 a^4 \sqrt{(x x + y y)}}$; qua-

rum duarum virium si M N ponatur media directio, prodibit per regulas compositionis motûs anguli C M N tangens =

$\frac{3 S y (2 a x + 4 x x - y y)}{2 a^4 \sqrt{(x x + y y)} + 2 S a (y y - 2 x x)}$, quæ divisione actu insti-

tutâ, iisque terminis neglectis in quorum denominatoribus a plures quàm quatuor obtinet dimensiones, abit in hanc expressionem $\frac{3 S x y}{a^3 \sqrt{(x x + y y)}}$

+ $\frac{3 S y (4 x x - y y)}{2 a^4 \sqrt{(x x + y y)}}$, quæ est ea ipsa formula, quâ vis M R expri-

batur. Quocirca angulus C M N prorsus non pendet ab auctâ minuatâ gravitate, sed tantum a vi horizontali singulis particulis in Terræ superficie sitis impressâ.

§. 35. Quoniam verò hæc ipsa media directio M N debet esse ad curvam a M d in puncto M normalis, erit subnormalis P N = $-\frac{y dy}{dx}$ et

$$C N = \frac{x dx + y dy}{dx} \quad \text{Cum igitur sit anguli M N P tangens} = -\frac{dx}{dy}$$

et anguli M C P tangens = $\frac{y}{x}$, erit horum angulorum differentiæ, hoc

est anguli C M N tangens = $\frac{y dy + x dx}{y dx - x dy}$, quæ superiori expressioni,

quâ hæc eadem tangens designabatur, æqualis posita pro curvâ quæsitâ a M d b sequentem præ-

bebit æquationem $\frac{y dy + x dx}{y dx - x dy} = \frac{3 S x y}{a^3 \sqrt{(xx + yy)}}$

+ $\frac{3 S y (4 x x - y y)}{2 a^4 \sqrt{(xx + yy)}}$, ad quam integrandam

ponimus $\sqrt{(xx + yy)} = z = M C$, et anguli

M C A cosinum $\frac{x}{\sqrt{(xx + yy)}} = u$, unde fiet

$x = u z$ et $y = z \sqrt{(1 - u u)}$, atque $y dx$

— $x dy = \frac{z z du}{\sqrt{(1 - u u)}}$, itemque $x dx + y dy$

= $z dz$. Hac autem factâ substitutione, æqua-

tiō inventa abit in hanc $\frac{dz}{z z} = \frac{3 S u du}{a^3} +$

$\frac{3 S z du (5 u u - 1)}{2 a^4}$, cujus postremus terminus, qui ob parvitatem præ-

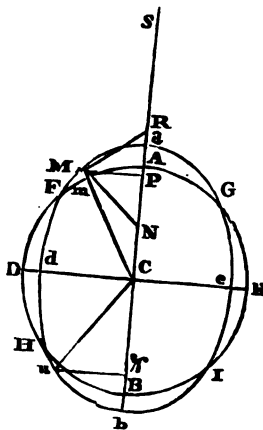
reliquis ferè evanescit, si abesset, foret integrale $\frac{1}{c} - \frac{1}{z} = \frac{3 S u u}{2 a^3}$ seu

$z = c + \frac{3 S c c u u}{2 a^3}$ proximè. Ponamus itaque completum integrale

esse $z = c + \frac{3 S c^2 u^2}{2 a^3} + \frac{3 S c^3 V}{2 a^4}$, ac factâ applicatione reperietur V

= $\frac{5 u^3 - 3 u}{3}$, ita ut habeatur $z = c + \frac{3 S c c u u}{2 a^3} + \frac{S c^3 u (5 u u - 3)}{2 a^4}$,

quod autem integrale proximè tantum satisfacit; at mox aliâ viâ aperietur verum ipsius z valorem per u commodius et propius definiendi.



§. 36. Cùm autem soliditas sphæroidis, quod generatur ex conversione curvæ a d b circa axem a b, æqualis esse debeat soliditati sphæræ radio C A = 1 descriptæ, hinc constans quantitas c quæ per integrationem est ingressa, definietur: id quod commodissimè præstabitur, si utraque sphæroidis semissis, superior scilicet versùs S directæ, atque inferior seorsim investigetur. Quoniam igitur pro semissi superiori est C P = x = z u = c u + $\frac{3 S c c u^3}{2 a^3} + \frac{S c^3 u^2 (5 u u - 3)}{2 a^4}$ et M P² = y² = z² (1 - u u) = (1 - u u) $\left(c c + \frac{3 S c^3 u^2}{a^3} + \frac{S c^4 u (5 u u - 3)}{a^4} \right)$, erit $\int y y d x$, cui soliditas genita conversione spatii d C P M est proportionalis, = $c^3 u - \frac{c^3 u^3}{3} + \frac{5 S c^4 u^3}{2 a^3} - \frac{3 S c^4 u^5}{2 a^3} - \frac{3 S c^5 u^2}{a^4} + \frac{21 S c^5 u^4}{4 a^4} - \frac{5 S c^5 u^6}{2 a^4}$. Posito igitur u = 1, prodibit superioris semissis ut $\frac{2}{3} c^3 + \frac{S c^4}{a^3} - \frac{S c^5}{4 a^4}$. Simili modo cùm pro inferiori semissi sit C u = z = c + $\frac{3 S c^2 u^2}{2 a^3} - \frac{S c^3 u (5 u^2 - 3)}{2 a^4}$, erit ejus soliditas ut $\frac{2}{3} c^3 + \frac{S c^4}{a^3} + \frac{S c^5}{4 a^4}$; ex quibus totius sphæroidis soliditas erit ut $\frac{4}{3} c^3 + \frac{2 S c^4}{a^3}$. Quare cùm sphæræ radio = 1 descriptæ soliditas pari modo definita, sit ut $\frac{4}{3}$, fiet $1 = c^3 + \frac{3 S c^4}{2 a^3}$; hincque $c = 1 - \frac{S}{2 a^3}$. Quamobrem pro curvâ quæsità habebitur, hoc valore loco c substituto, ista æquatio $z = 1 + \frac{S (3 u^2 - 1)}{2 a^3} + \frac{S u (5 u u - 3)}{2 a^4}$; ex quâ natura istius curvæ luculenter cognoscitur.

§. 37. Hinc igitur perspicitur a Sole vel Lunâ in S existente aquam, cujus superficies antè erat in A, attolli in a, ita ut sit elevatio A a = $\frac{S}{a^3} + \frac{S}{a^4}$; atque in regione oppositâ B, aquam pariter elevari per spatium B b = $\frac{S}{a^3} - \frac{S}{a^4}$: unde patet aquas in A et B, ad eandem ferè altitudinem elevari, cùm excessus superioris elevationis super inferiorem sit tantum $\frac{2 S}{a^4}$, quod discrimen respectu totius elevationis vix est sensibile. Contrà verò in regionibus lateralibus D et E, aqua circumquaque æqua-

liter deprimetur, et quidem per intervallum $Dd = Ee = \frac{S}{2a^3}$; ex quo

ista depressio duplo minor est, quàm elevatio quæ in A et B accidit. In punctis præterea F, G, H et I, quæ a cardinalibus A et B distant angulo $54^\circ. 45'$ quippe pro quo est $3uu - 1 = 0$, neque elevabitur aqua neque deprimetur, sed naturalem tenebit altitudinem. In loco autem Terræ quocumque M cognoscetur aquæ vel elevatio vel depressio ex angulo A C M, cujus cosinus u est sinus altitudinis sub quâ Sol vel Luna in S existens super horizonte conspicitur ab observatore in M constituto; hoc enim in loco aqua elevata erit supra naturalem altitudinem intervallo $= \frac{S(3uu - 1)}{2a^3} + \frac{Su(5uu - 3)}{2a^4}$: quæ expressio si fit negativa, maris

depressionem indicat. Hic autem annotare non est opus, quòd si punctum S sub horizonte lateat, tum sinus depressionis maneat quidem u, sed negativè accipi debeat.

§. 38. Definiamus igitur primùm cùm elevationem tùm depressionem, quæ a solâ vi Solis ubique Terrarum produci deberet, si uti ponimus, omnia in statu æquilibrii essent constituta. Quoniam itaque est $S = 227512$ atque $a = 20620$ semi-diameter Terræ, si una Terræ semi-diameter assumatur 19695539 pedum Paris. erit $\frac{S}{a^3} = 0,5072$ ped. seu pauxillum

excedet semi-pedem: valor autem $\frac{S}{a^4}$ omnino erit quantitas evanescens et imperceptibilis. Hanc ob rem in regionibus sub Sole verticaliter sitis, quæ habeant Solem vel in zenith vel nadir, aqua ultra altitudinem naturalem attoletur ad semi-pedem cum pollicis parte decimâ circiter; depressio autem maxima cadet in loca, quæ Solem in horizonte conspiciant, ubi aqua ad quadrantem pedis tantum deprimetur, ex quo totum discrimen, quod a Sole in altitudine aquæ naturali oritur, ad tres quartas pedis partes circiter assurgit. Iste Solis effectus autem distantiae tantum mediocri Solis a Terrâ est tribuendus: quòd si enim Sol versetur vel in apogæo, vel perigæo, ejus effectus vel diminui vel augeri debebit in ratione reciproca triplicatâ distantiarum Solis a Terrâ, quia pendet a valore $\frac{S}{a^3}$.

Cùm igitur orbitæ Terræ excentricitas sit $= \frac{163}{10000}$, erit intervallum A a vel B b, dum Sol in perigæo versatur, $= 0,5332$ ped. sin autem Sol in apogæo sit constitutus, $= 0,4825$ pedum; quorum differentia ad vicesimam pedis partem ascendit: valor autem medius est $= 0,5072$, quem pro mediocri distantia Solis a Terrâ invenimus.

§. 39. Problema hoc, quod hucusque dedimus solutum, quodque maximi est momenti ad effectus cum Solis tum Lunæ in mari elevando et deprimendo definiendos, Newtonus ne attigit quidem, sed aliam viam secutus, non solum indirectam, sed etiam erroneam, invenit mare a solâ vi Solis ad altitudinem duorum ferè pedum elevari debere; cum tamen tam eandem vim Soli absolutam quam eandem distantiam a Terrâ assumsisset, quibus nos sumus usi. Concluserit autem hunc enormem effectum ex comparatione vis Solis seu valoris $\frac{S}{a^3}$ cum vi Terræ centrifugâ a motu

diurno ortâ, quâ Terra sub æquatore extenditur ac crassior redditur quam sub polis; atque assumit elevationem aquæ a vi Solis ortam eandem tenere debere rationem ad incrementum Terræ sub æquatore a vi centrifugâ factum, quam teneat vis Solis ad vim centrifugam. Sed præterquam quod hoc ratiocinium nimis infirmo superstructum fundamento, nostrâ viâ directâ, quâ sumus usi, statim evertitur: ex ipsâ enim rei naturâ, nullis precariis assumtis principiis, elevationem aquarum a vi Solis oriundam directè et luculenter determinavimus: ac si ullum etiam dubium ob integrationem per approximationes tantum institutum restaret, id mox tollitur, cum infra idem Problema aliâ methodo prorsus diversâ sumus resoluturi, congruentemque solutionem exhibituri.

§. 40. Quamvis autem iste Solis effectus in mari tam elevando quam deprimendo non adeò certus et planus esse videatur ob parallaxin Solis, quam 10'' assumsimus, nondum accuratissimè definitam; a quâ tam distantia Solis a Terrâ a , quam æstimatio vis absolutæ S , pendet: tamen si rem attentius perpendamus, comperiemus expressionem $\frac{S}{a^3}$ perpetuò eandem retinere valorem, quæcumque Soli parallaxis tribuatur: mutata enim parallaxi, valor litteræ S præcisè in eadem ratione, in quâ cubus distantie a^3 , mutabitur. Per leges enim motûs firmissimè stabilitas partebit quantitatem $\frac{S}{a^3}$ a solo tempore periodico Terræ circa Solem determinari, cujus quantitas accuratissimè est definita. Quod ut clariùs appareat, consideremus planetam quemcunque circa Solem in orbitâ ellipticâ revolvantem, cujus semi-axis transversus seu distantia a Sole media sit $= a$, vis autem Solis absoluta $= S$, erit tempus periodicum semper ut $\frac{a \sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; quod si igitur tempus periodicum sit $= t$, erit t ut $\frac{a \sqrt{a}}{\sqrt{S}}$ et $\frac{S}{a^3}$ uti $\frac{1}{t^2}$. Ad valorem autem fractionis $\frac{S}{a^3}$ absolutè inveniendum, exprimat

a in semi-diametris Terræ, atque in minutis secundis dato tempore periodico t, erit semper $t = \frac{5064\frac{1}{2} a \sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; ex quo prodit $\frac{S}{a^3} = \frac{5064\frac{1}{2} \times 5064\frac{1}{2}}{t t}$,

positâ unitate cùm pro gravitate naturali, tùm pro unâ Terræ semi-diametro. At si tempus Terræ periodicum seu annus sidereus in minutis secundis exponatur, fiet $t = 31558164$, atque $\frac{S}{a^3} = 0,50723$ pedum positâ

semi-diametro Terræ per observationes exactissimas 19695539 pedum Paris. reg. omnino uti antè invenimus.

§. 41. Simili modo ex superiori æquatione elevatio aquæ a vi Lunæ oriunda determinabitur; positâ enim vi Lunæ absolutâ = L, poni oportet $S = L$, ejusque valor proximè erit = $\frac{1}{4}0$, quem a Newtono reperiunt tantisper retinebimus, quoad verus valor per alia phænomena accuratiùs definiatur. Quoniam itaque Lunæ a Terrâ mediocris distantia est = $60\frac{1}{2}$ semi-diam. Terræ, erit $\frac{S}{a^3} = L \times 88,94$ ped. = 2,223 pedum

et $\frac{S}{a^4} = L \times 1,47 = 0,037$ pedum. Cùm autem Lunæ excentricitas sit

quasi $\frac{1}{10000}$; erit dum Luna in perigæo versatur $\frac{S}{a^3} = L \times 104,44$ ped.

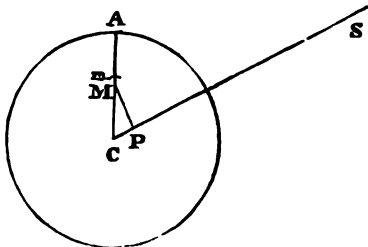
= 2,611 pedum et $\frac{S}{a^4} = L \times 1,82 = 0,047$ pedum. At si Luna fuerit

in apogæo, prodibit $\frac{S}{a^3} = L \times 75,74$ ped. = 1,893 pedum et $\frac{S}{a^4} = L \times 1,19$

= 0,030 pedum. Ex his igitur si Luna a Terrâ mediocriter distet, erit aquæ elevatio A a = $L \times 90,41$ pedum = 2,260 pedum elevatio autem B b = $L \times 87,47$ pedum = 2,187 pedum: ac depressio ad latera D d = E e = $L \times 44,47$ pedum = 1,112 pedum. Pro perigæo verò Lunæ fiet A a = $L \times 106,26$ pedum = 2,656 pedum; B b = $L \times 102,62$ pedum = 2,565 pedum; atque D d = E e = $L \times 52,22$ = 1,305 pedum. Pro apogæo denique Lunæ habebitur A a = $L \times 76,93$ pedum = 1,923 pedum, et B b = $L \times 74,55$ pedum = 1,864 pedum, atque D d = E e = $L \times 37,87$ pedum = 0,947 pedum.

§. 42. Tametsi autem hac methodo non difficulter tam elevatio maris quàm depressio quæ vel a Sole vel Lunâ seorsum gignitur, sit determinata, si quidem omnia ad statum quietis redacta concipiantur; tamen nimium foret difficile ejusdem methodi ope easdem res definire, si Sol et Luna conjunctim agant. Quamobrem aliam methodum exponamus, cujus usus pro utroque casu æquè pateat; quæ cùm a priori penitùs sit diversa,

simul ea, quæ jam sunt eruta atque a Newtonianis diversa deprehensa, maximè confirmabit. Petita verò est hæc altera methodus ex eâ æquilibrii proprietate, quâ requiritur, ut omnes columnæ aqueæ a superficie Terræ ad centrum pertingentes sint inter se æquiponderantes. Existent igitur vel Sole vel Lunâ in S, cujus vis absoluta ponatur = S, et distantia S C = a, sit A C columna aquea a superficie Terræ A ad centrum C usque pertingens, quæ altitudo



A C sit = h. Ponatur anguli A C S cosinus = u, qui simul erit sinus altitudinis sub quâ punctum S a spectatore in A constituto super horizonte elevatum conspicitur; sumaturque intervallum quodcunque C M = z, et consideretur totius columnæ elementum M m = d z. Hoc igitur elementum primò a gravitate deorsum versùs C urgebitur, cujus effectus, cùm intra Terram pro variis distantiiis non satis constet, ponatur dignitati cuicunque distantiarum a centro, putà ipsi z^n proportionalis: mox enim planum fiet exponentem n nil omnino determinationes esse turbaturum. Urgebitur ergo elementum M m versùs centrum C vi = $z^n d z$; ex quo totius columnæ A C nisus deorsum a gravitate oriundus, erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1}$.

§. 43. Præterea autem elementum M m = d z a vi S sollicitabitur duplici modo, altero deorsum in directione M C, altero in directione ad illam M C normali, quæ posterior vis, cùm pondus columnæ nequaquam afficiat, tutò negligetur, solaque prior considerabitur. Demisso autem ex M in C S perpendiculo M P, positisque C P = x et P M = y, erit $\sqrt{(x^2 + y^2)} = z$, et $x = u z$ atque $y = z \sqrt{(1 - u^2)}$. At ex

§. 27. vis, quâ particula M m deorsum sollicitatur, est $= \frac{S(y y - 2 x x)}{a^3 \sqrt{(x x + y y)}}$

$$+ \frac{3 S x (3 y y - 2 x x)}{2 a^4 \sqrt{(x x + y y)}} = \frac{S z (1 - 3 u u)}{a^3} + \frac{3 S u z^2 (3 - 5 u u)}{2 a^4}.$$

Quæ expressio per d z multiplicata, tumque integrata facto $z = h$, præbet

$$\text{totius columnæ A C nisum a vi S oriundum} = \frac{S h^2 (1 - 3 u u)}{2 a^3} +$$

$$\frac{S h^3 u (3 - 5 u u)}{2 a^4}. \text{ Quocirca totus columnæ A C nisus deorsum tendens}$$

$$\text{erit} = \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{S h^2 (1 - 3 u u)}{2 a^3} + \frac{S h^3 u (3 - 5 u u)}{2 a^4}; \text{ qui cùm in}$$

omnibus columnis debeat esse idem, æquabitur conatui, quo columna æqualis semi-diametro Terræ 1 in statu naturali a solâ gravitate deorsum nititur, quæ vis est $= \frac{1}{n+1}$. Hinc igitur sequens emergit æquatio,

$$1 = h^{n+1} + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4};$$

ex quâ elicitur $h = 1 + \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$, quæ est ea ipsa expressio, quam suprâ §. 36. alterâ methodo invenimus.

§. 44. Agant nunc vires ambæ ad Solem Lunamque directæ conjunctim; ac primò quidem designet S Solis vim absolutam, a ejus distantiam a Terra, et u sinum anguli, quo Sol suprâ horizontem est elevatus. Deinde sit simili modo pro Luna L ejus vis absoluta, b ejus distantia a Terrâ, atque v sinus altitudinis Lunæ super horizonte. Ex his igitur columna aquea AC = h tam vi propriæ gravitatis quàm a viribus Solis ac Lunæ conjunctim in centrum C urgebitur vi $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3}$

+ $\frac{Lh^2(1-3vv)}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$, quæ æqualis esse debet vi $\frac{1}{n+1}$. Ex hac autem æquatione resultat $h = 1$

$$+ \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}.$$

Quocirca aqua in A supra situm naturalem, quem a solâ gravitate sollicitata obtineret, a viribus Solis ac Lunæ conjunctim sollicitantibus, elevabitur per intervallum $= \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ex quâ expressione status aquæ vel elevationis vel depressionis ubique Terrarum cognoscetur.

§. 45. Hanc posteriorem viam secuti, non solùm actiones Solis ac Lunæ commodè conjungere potuimus, sed etiam nunc nobis licebit motûs vertiginis Terræ, et vis centrifugæ inde ortæ, rationem habere; id quod methodo priore opus fuisset insuperabile. Ponamus enim altitudinem columnæ naturalem AC, quam habitura esset a vi gravitatis et vi centrifugâ simul, seu quod eodem redit, in figurâ Terræ sphæroidicâ compressâ, esse = f, altitudinem autem quam habebit accedentibus viribus Solis ac Lunæ esse = h; atque manifestum est quantitates f et h quàm minimè ab 1 discrepare. Cùm igitur utriusque columnæ f et h idem debeat esse nisus deorsum, columnæ autem f in quam sola gravitas

et vis centrifuga agunt, nisus sit $= \frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha f f$, denotante α quanti-

tatem a vi centrifugâ in A pendentem, columnæ verò h nisus sit $= \frac{h^{n+1}}{n+1}$

$$- \alpha h^2 + \frac{S h^2 (1 - 3 u u)}{2 a^3} + \frac{L h^2 (1 - 3 v v)}{2 b^3} + \frac{S h^3 u (3 - 5 u u)}{2 a^4} + \frac{L h^3 v (3 - 5 v v)}{2 b^4},$$

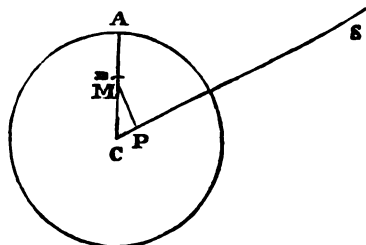
$$\text{erit æqualitate factâ } f^{n+1} - (n+1) \alpha f f = h^{n+1}$$

$$- (n+1) \alpha h^2 + \frac{(n+1) S h^2 (1 - 3 u u)}{2 a^3}$$

$$+ \frac{(u+1) L h^2 (1 - 3 v v)}{2 b^3} +$$

$$\frac{(n+1) S h^3 u (3 - 5 u u)}{2 a^4} +$$

$$\frac{(n+1) L h^3 v (3 - 5 v v)}{2 b^4}. \text{ Ponatur } h = f + s,$$



erit ob α quantitatem vehementer par-

$$\text{vam, a verò et b maximas, } 0 = f^n s + \frac{S f^2 (1 - u u)}{2 a^3} + \frac{L f^2 (1 - 3 v v)}{2 b^3}$$

$$- 2 \alpha f s + \frac{S f s (1 - 3 u u)}{a^3} + \frac{L f s (1 - 3 v v)}{b^3} + \frac{S f^3 u (3 - 5 u u)}{2 a^4}$$

$$+ \frac{L f^3 v (3 - 5 v v)}{2 b^4}, \text{ neglectis terminis in quibus s plures obtinet dime-}$$

siones, ob summam ipsius s parvitatem respectu ipsius f. Hinc itaque

$$\frac{S (3 u u - 1)}{2 a^3} + \frac{L (3 v v - 1)}{2 b^3} + \frac{S f u (5 u u - 3)}{2 a^4} + \frac{L f v (5 v v - 3)}{2 b^4}$$

$$\text{fiet } s = \frac{f^n - 1 - \frac{2 \alpha}{f} + \frac{S (1 - 3 u u)}{a^3 f} + \frac{L (1 - 3 v v)}{b^3 f}}{f^n - 1 - \frac{2 \alpha}{f} + \frac{S (1 - 3 u u)}{a^3 f} + \frac{L (1 - 3 v v)}{b^3 f}}.$$

Quòd si porrò ponatur semi-axis Terræ per polos transiens $= 1$, erit ob

$$\text{æquilibrium } \frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha f f = \frac{1}{n+1} \text{ et } f = 1 + \alpha, \text{ ex quo denominator}$$

præcedentis fractionis ab unitate quàm minimè discrepabit; sub ipso enim

æquatore est $\alpha = \frac{1}{378}$, ubi quidem est maximum: unde omnino ut antè

$$\text{elevatio aquæ a viribus Solis ac Lunæ orta supra altitudinem naturalem}$$

$$s = \frac{S (3 u u - 1)}{2 a^3} + \frac{L (3 v v - 1)}{2 b^3} + \frac{S u (5 u u - 3)}{2 a^4} + \frac{L v (5 v v - 3)}{2 b^4},$$

discrimen enim quod revera aderit, sensus omnino effugiet, pendebitque simul a valore exponentis n.

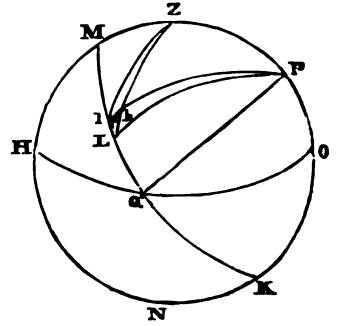
CAPUT QUARTUM.

De Fluxu ac Refluxu Maris si aqua omni inertia careret.

§. 46. QUÆ in Capite præcedente sunt tradita respiciunt hypothesin assumptam, quâ Solem ac Lunam respectu Terræ perpetuò eundem situm tenere posuimus; ibique præcipuè statum æquilibrii, ad quem oceanus a viribus Solis et Lunæ perducatur, determinavimus. Longè aliter autem se res habet, si tam Luna et Sol quàm Terra in motum collocentur, quo casu ob perpetuam sitûs relativi mutationem nunquam æquilibrium adesse poterit; cùm enim tempore opus sit, quo data vis datum corpus ad motum perducatur, duplici modo status oceani assignatus a vero discrepabit. Namque primò aqua quovis momento in eum æquilibrii situm, quem vires sollicitantes intendunt, pervenire non poterit, sed tantum ad eum appropinquabit continuò; deinde etiamsi in ipsum æquilibrii situm perveniat, in eo tamen non acquiescet, sed motu jam concepto ulteriùs feretur, uti ex naturâ motûs abundè constat. Hujus autem utriusque aberrationis ratio in inertia aquæ est posita, quâ fit ut aqua nec subito in eum situm se conferat, in quo cum viribus datur æquilibrium, nec cùm hunc æquilibrii situm attigerit, ibi quiescat. Quocirca ne difficultatum multitudine obruamur, aquam omni inertia carentem assumamus, hoc est istius indolis, ut non solùm quovis momento se in statum æquilibrii subito recipiat, sed ibi etiam omnem motum insitum deponendo permaneat, quamdiu iste situs viribus sollicitantibus conveniat. Hâc itaque factâ hypothesi, perspicuum est aquam quovis temporis momento in eo ipso statu fore constitutam, qui secundùm præcepta Capitis præcedentis positioni cùm Solis tum Lunæ respondeat.

§. 47. Ut igitur in hâc hypothesi, quâ mare vis inertie expers ponimus, pro quovis loco ad quodvis tempus statum maris quàm commodissimè definiamus, primùm solam Lunam considerabimus, cùm in eâ præcipua æstûs maris causa contineatur, atque tam fluxus quam refluxus maris a transitu Lunæ per meridianum computari soleat: quòd si enim Lunæ effectus innotuerit, non solùm Solis effectus quoque mutatis mutandis colligetur, sed etiam effectus, qui ab ambobus luminaribus simul agentibus proficiscitur. Propositus igitur sit Terræ locus quicumque, cujus in cælo zenith sit Z, horizon H Q O et P polus borealis, ita ut arcus P O sit hujus loci elevatio poli, et circulus P Z H N O meridianus. Sit porro

M L K parallelus æquatori, in quo Luna jam motu diurno circumferatur, atque hoc momento reperiaturn Luna in L; eritque tempus, quo Luna vel ex L ad meridianum M appellet, vel vicissim a meridiano ad L pertigit, ut angulus M P L, sive hoc tempus se habebit ad tempus unius revolutionis Lunæ, quod est 24. horarum 48'. uti se habet angulus M P L ad quatuor rectos. Sit igitur anguli M P L cosinus = t, sinus elevationis poli P O seu sinus arcûs P Z = p, cosinus = P, ac sinus declinationis Lunæ borealis = Q, qui idem est sinus distantie



Lunæ a polo P L, hujus verò ipsius arcûs sinus sit = q, cui simul cosinus declinationis Lunæ æquatur, atque ob sinum totum constanter positum = 1, erit $Q^2 + q^2 = 1$. Cùm jam in triangulo sphærico Z P L dentur arcus P Z et P L cum angulo Z P L, reperietur per trigonometriam sphæricam arcûs Z L cosinus = $t p q + P Q$, qui simul est sinus altitudinis Lunæ supra horizontem, quem antè posuimus = v. Ex quibus erit $v = t p q + P Q$, et $3 v v - 1 = 3 (t p q + P Q)^2 - 1$, atque $5 v v - 3 = 5 (t p q + P Q)^2 - 3$; qui valores in formulis præcedentis Capitis substituti præbebunt statum maris, hoc est vel elevationem vel depressionem, pro loco proposito ad tempus assignatum.

§. 48. Quòd si ergo Lunæ vis absoluta ponatur = L, ejusque a Terrâ distantia = b, erit intervallum, quo aqua supra statum naturalem elevabitur, = $\frac{L (3 (t p q + P Q)^2 - 1)}{2 b^3} + \frac{L (t p q + P Q) (5 (t p q + P Q) - 3)}{2 b^4}$,

quæ expressio si fit negativa, indicat aquam infra statum naturalem esse depressam. Ponamus Lunam horizonte seu versùs austrum per meridianum transire, quo casu erit $t = 1$; hoc igitur tempore aqua supra statum naturalem erit elevata intervallo = $\frac{L (3 (p q + P Q)^2 - 1)}{2 b^3} +$

$\frac{L (p q + P Q) (5 (p q + P Q) - 3)}{2 b^4}$. Contrà verò dum Luna sub

horizonte vel versùs boream ad meridianum appellit, fiet elevatio aquæ supra statum naturalem per intervallum = $\frac{L (3 P^2 Q^2 - 1)}{2 b^3} +$

$\frac{L P Q (5 P^2 Q^2 - 3)}{2 b^4}$; quæ expressio semper est negativa, ideóque in-

dicat aquam infra statum naturalem consistere. Namque cùm P ubique sit minor unitate nisi sub ipsis polis, ac declinatio Lunæ nunquam ad 30°. assurgere possit, ex quo $Q < \frac{1}{2}$ et $Q Q < \frac{1}{4}$, erit $3 P^2 Q^2$ perpetuò unitate minor; ideóque illa expressio negativa.

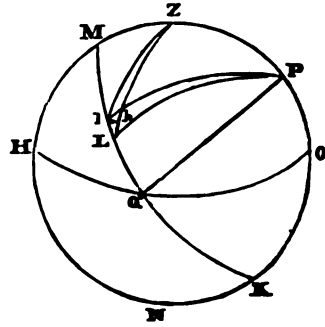
§. 49. De ratione autem elevationis aquæ in genere judicare licebit ex formulâ $\frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, seu cùm posterior terminus vix sit sensibilis, ex solo priore $\frac{L(3vv-1)}{2b^3}$. Ex hac autem expres-

sione intelligitur aquæ elevationem a solâ elongatione Lunæ ab horizonte pendere, sive Luna sit super sive sub horizonte, retinet enim $3vv-1$ eundem valorem sive v sit affirmativum sive negativum. Deinde quia fit $3vv-1=0$ si Luna ab horizonte distet arcu 35°. 16', tum aqua in ipso statu naturali erit constituta, neque elevata neque depressa. Elevabitur ergo aqua, cùm Luna ultra 35°. 16'. vel supra vel infra horizontem versetur, e contrario autem deprimetur quando Lunæ ab horizonte distantia minor est quàm 35°. 16'. Omnino autem aqua maximè erit depressa dum Luna ipsum horizontem occupat, hocque tempore infra situm naturalem subsidet intervallo $\frac{L}{2b^3} = 1, 111$ pedum (§. 41.); atque de

hoc situ elevabitur recedente Lunâ ab horizonte sive super sive sub Terrâ. Hinc iis in regionibus, in quibus Luna oritur et occidit, tempore 24. hor. 48'. mare bis maximè erit depressa, bisque elevata; status scilicet depressionis incidet in appulsus Lunæ ad horizontem, status autem elevationis in appulsus Lunæ ad meridianum. At quibus in regionibus Luna nec oritur nec occidit, quoniam ibi Luna altero appulsu ad meridianum maximè, altero minimè ab horizonte distat, spatio 24 h. 48'. aqua semel tantum elevabitur, semelque deprimetur: sub ipsis autem polis æstus maris omnino erit nullus, diurnus scilicet; nam variatio declinationis sola statum maris turbabit.

§. 50. Cùm igitur sub polis Terræ nullus sit fluxus ac refluxus maris, sed aqua tantum aliquantulum ascendat descendatque, prout Luna vel magis ab æquatore recedit vel ad eum accedit; videamus etiam quomodo æstus maris in aliis Terræ regionibus secundum nostram hypothesin debeat esse comparatus. Considerabimus autem præcipuè tres regiones, quarum prima posita sit sub ipso æquatore, secunda habeat elevationem poli 30 graduum, tertia verò 60 graduum. Quia igitur in his omnibus regionibus Luna oritur atque occidit, maxima depressio aquæ ubique erit eadem, scilicet per intervallum $\frac{L}{2b^3}$ infra situm naturalem, eaque contin-

get bis, quando nimirum Luna in ipso horizonte versatur. Ab hoc itaque statu maximæ depressionis elevationes maris indicabimus et computabimus, spatiis assignandis, per quæ aqua attolletur dum Luna vel supra horizontem in M vel infra in K ad meridianum appellit, itemque dum ab utroque meridiano æqualiter distat, qui locus sit L existente angulo M P L recto. Præterea tres quoque Lunæ situs in suâ orbitâ contemplabimur, quorum primus sit, cùm Luna in ipso æquatore versatur, secundus cùm Luna habet declinationem borealem 20 graduum, tertius verò cùm Luna declinationem habet australem pariter 20 graduum. Denique in tabellâ sequente adscripsimus quantitatem anguli M P Q, ex quo tempus tam ortûs quàm occasûs Lunæ, quo aqua maximè est depressa, atque elevatio existit nulla, innotescit.



In locis sub Æquatore sitis, est elevatio Maris, dum Luna versatur in

	M	L	K	ang. M P Q.
Declinatio 0°.	$\frac{3L}{2b^3} + \frac{2L}{2b^4}$	○	$\frac{3L}{2b^3} - \frac{2L}{2b^4}$	90°. 0.
Decl. boreal. 20°.	$\frac{2,649L}{2b^3} + \frac{1,549L}{2b^4}$	○	$\frac{2,649L}{2b^3} - \frac{1,549L}{2b^4}$	90°. 0.
Decl. austr. 20°.	$\frac{2,649L}{2b^3} + \frac{1,549L}{2b^4}$	○	$\frac{2,649L}{2b^3} - \frac{1,549L}{2b^4}$	90°. 0.

Sub elevatione Poli 30°. erit Maris elevatio

Declinatio 0°.	$\frac{2,250L}{2b^3} + \frac{1,082L}{2b^4}$	○	$\frac{2,250L}{2b^3} - \frac{1,082L}{2b^4}$	90°. 0.
Decl. boreal. 20°.	$\frac{2,909L}{2b^3} + \frac{1,880L}{2b^4}$	$\frac{0,087L}{2b^3} - \frac{0,156L}{2b^4}$	$\frac{1,239L}{2b^3} - \frac{0,154L}{2b^4}$	102°. 3.
Decl. austr. 20°.	$\frac{1,239L}{2b^3} + \frac{0,154L}{2b^4}$	$\frac{0,087L}{2b^3} + \frac{0,156L}{2b^4}$	$\frac{2,909L}{2b^3} - \frac{1,880L}{2b^4}$	77°. 53.

Sub elevatione Poli 60°. erit Maris elevatio

Declinatio 0°.	$\frac{0,740L}{2b^3} - \frac{0,125L}{2b^4}$	○	$\frac{0,740L}{2b^3} + \frac{0,125L}{2b^4}$	90°. 0.
Decl. boreal. 20°.	$\frac{1,760L}{2b^3} - \frac{0,582L}{2b^4}$	$\frac{0,263L}{2b^3} - \frac{0,514L}{2b^4}$	$\frac{0,092L}{2b^3} + \frac{0,158L}{2b^4}$	110°. 5.
Decl. austr. 20°.	$\frac{0,092L}{2b^3} + \frac{0,158L}{2b^4}$	$\frac{0,263L}{2b^3} + \frac{0,514L}{2b^4}$	$\frac{1,760L}{2b^3} - \frac{0,582L}{2b^4}$	50°. 55.

§. 51. Si quis jam ex hâc tabulâ elevationem maris supra statum maximæ depressionis in mensuris cognitis definire voluerit, is loco fractionum $\frac{L}{b^3}$ et $\frac{L}{b^4}$ earum valores in pedibus Parisinis ex §. 41. substituat, habitâ ratione distantiae Lunæ a Terrâ, prout ibidem est expositum. Consequuntur autem ex hac tabulâ multa egregia consecutaria, quæ verò nondum summo cum rigore ad experientiam examinari possunt, etiamsi jam insignis convenientia deprehendatur. Aquam enim adhuc omnis inertiae expertem ponimus; perspicuum autem est, si aquæ inertia tribuatur, tum diversa omnino phænomena oriri oportere. Quòd si igitur hi assignati effectus jam cum observationibus planè consentirent, id potiùs theoriam everteret quàm confirmaret, cum aquam extra statum suum naturalem simus contemplati. Interim tamen satis tutò jam status maris sub ipsis polis poterit definiri, qui etsi ad experientiam examinari non potest, tamen ipsâ ratione confirmabitur. Ac primò quidem sub polis nulla erit maris mutatio diurna, cum Luna per totum diem eandem teneat ab horizonte distantiam, id quod ipsa quoque ratio dictat, quia ibi non datur meridianus, a cujus appulsu æstus maris alibi æstimari solet. Dabitur tamen his locis mutatio menstrua, atque aqua maximè erit humilis cum Luna in ipso æquatore versatur; quo quippe tempore perpetuò horizontem occupabit. Hinc porrò aqua sensim elevabitur prout Lunæ declinatio sive versùs boream sive versùs austrum augetur, donec tandem si declinatio fit maxima, per spatium 10 pollicum tantum elevetur; quæ mutatio cum sit perquam lenta, ab inertia aquæ vix turbabitur.

§. 52. Ex his verò iisdem formulis effectus a Sole oriundus non difficulter colligetur; tantum enim quantitates S et a , loco L et b substitui oportet, quo facto effectus Solis circiter quater minor reperiatur quàm is qui a Lunâ oritur. Seorsim autem cum Solis tum Lunæ effectibus definitis, per conjunctionem simplicem effectus, quem ambo luminaria conjunctim producant, determinabitur. Ponamus itaque primùm Solem Lunamque in conjunctione versari, id quod fit tempore novilunii; tum igitur neglectâ Lunæ latitudine, Sol et Luna in eodem eclipticæ loco versabuntur, atque simul ad meridianum æquè ac ad horizontem appellent. Quocirca manentibus superioribus denominationibus, erit quoque Solis declinationis sinus = Q , cosinus = q , ac pro angulo MPL cujus cosinus est = t , erit sinus altitudinis Solis pariter uti Lunæ = $tpq + PQ$. Ex quo dum ambo luminaria per meridianum versùs austrum transeunt, aquæ elevatio, quæ tum erit maxima, altitudinem naturalem superabit

intervallo = $\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right) (3(pq + PQ)^2 - 1) + \frac{L(pq + PQ)}{2b^4} \times$
 $(5(pq + PQ)^2 - 3)$, neglecto altero termino a vi Solis oriundo,
 cùm sensus omnino effugiat. Ad dum ambo luminaria infra horizontem
 ad meridianum pertingunt, erit elevatio aquæ = $\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right) \times$
 $(3(PQ - pq)^2 - 1) + \frac{L(PQ - pq)}{2b^4} (5(PQ - pq)^2 - 3)$.

Maxima denique aquæ depressio incidet, quando luminaria vel oriuntur
 vel occidunt, eaque minor erit quàm altitudo aquæ naturalis intervallo =
 $\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Cùm igitur $\frac{S}{2a^3}$ sit circiter subquadruplum ipsius $\frac{L}{2b^3}$,
 in novilunio omnes effectus Lunæ suprâ recensiti, quartâ sui parte auge-
 buntur.

§. 53. In plenilunio omnia eodem se habere modoprehenduntur,
 quo in novilunio, quia enim tum Sol et Luna in oppositione versantur,
 erit declinatio Solis æqualis et contraria declinationi Lunæ, unde quidem
 pro Sole fit $-Q$, quod in novilunio erat $+Q$; at cùm Sol secundùm
 ascensionem rectam a Lunâ distet 180° . erit hoc casu $-t$, quod antè
 erat $+t$, ex quo pro plenilunio habetur sinus altitudinis Solis = $-tpq$
 $-PQ$, qui pro novilunio erat = $tpq + PQ$, ex quo quadratum
 hujus sinûs utroque casu est idem, ideóque etiam eadem phænomena in
 novilunio atque plenilunio. Deinde etiam hoc tempore aqua maximè de-
 primetur, cùm luminaria ambo in horizonte versantur, tumque aqua hu-
 milior erit quàm in statu naturali, intervallo = $\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{3b^3}$. Ex hoc
 itaque situ donec Luna ad meridianum supra Terram appellit, aqua ele-
 vabitur per intervallum = $3(PQ + pq)^2 \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$, tantoque ite-
 rum subsidet usque ad Lunæ obitum; tum verò rursus elevabitur usque
 ad appulsum Lunæ ad meridianum infra horizontem, idque per spa-
 tium $3(PQ - pq)^2 \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$, neglecto termino sequente quippi-
 ferè insensibili. Cùm igitur sint $PQ + pq$ et $PQ - pq$ sinus di-
 stantiæ Lunæ ab horizonte dum in meridiano versatur, erunt spatia per quæ
 aqua tempore pleniluniorum ac noviluniorum supra statum maximè de-
 pressum elevatur, in ratione duplicatâ sinuum distantiarum Lunæ ab hor-
 zonte, dum per meridianum transit. Nisi ergo vel Luna in ipso æqu-

tore existat, vel Terræ locus sub æquatore sit situs, fluxus maris diurni ac nocturni erunt inæquales; luminaribus autem in æquatore extantibus, utraque aquæ elevatio fiet per spatium $= 3 p p \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3} \right)$.

§. 54. Ut nunc in effectus, quos Sol et Luna in quadraturis siti conjunctim producunt, inquiremus; ponamus, ne calculus nimium fiat prolixus, Solem in ipso æquatore versari, quoniam tum plerumque minimus æstus observatur. Hoc itaque casu Solis declinatio erit nulla, Lunæ verò maxima, quam neglectâ latitudine assumamus $23^\circ. 29'$. cujus sinus sit $= Q$, cosinus $= q$, positâ hac declinatione boreali. Jam ponamus Lunam in meridiano in M versari, quo tempore Sol erit in horizonte; unde cùm aqua supra statum naturalem elevetur a Lunâ intervallo $\frac{L(3(pq + PQ)^2 - 1)}{2b^3}$, a Sole verò deprimatur intervallo $\frac{S}{2a^3}$, ab utrâ-

que vi conjunctim elevabitur per spatium $\frac{L(3(pq + PQ)^2 - 1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$:

at dum Luna sub horizonte ad meridianum appellit, aqua elevabitur per spatium $\frac{L(3(PQ - pq)^2 - 1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$. Sumatur inter has ambas ele-

vationes inæquales more solito medium, eritque elevatio aquæ mediâ hac quadraturâ eveniens $= \frac{L(3p^2q^2 + 3P^2Q^2 - 1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$. Refluxus

verò continget, cùm Luna horizontem attinget, quo tempore Sol in meridiano proximè versabitur, ex quo depressio totalis aquæ in refluxu infra statum naturalem proximè erit $= \frac{L}{2b^3} - \frac{S(3pp - 1)}{2a^3}$: quare a fluxu

usque ad subsequentem refluxum aqua subsidet per intervallum $= \frac{3L(p^2q^2 + P^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$.

§. 55. Quamvis motus maris hoc modo assignatus ab inertîâ aquæ multum immutetur, tamen quia eandem ferè mutationem tam majoribus æstibus quàm minoribus infert, satis tutò assumere posse videtur spatia, per quæ aqua circa æquinoclia cùm tempore plenilunii sive novilunii, tum etiam tempore quadraturarum actu ascendit, expressionibus inventis esse proportionalia. Quamobrem si in dato Terræ loco ex pluribus observationibus determinetur spatium medium, per quod mare a refluxu ad fluxum ascendit, tempore æquinociorum, tam in pleniluniis noviluniisque quàm in quadraturis, eorum ratio ad eam quæ ex formulis consequitur, proximè accedere debet. Atque hinc ex definitâ hac ratione per ob-

servationes ratio poterit inveniri inter vires Solis et Lunæ absolutas S et L , quæ est ipsa via quâ Newtonus est usus ad vim Lunæ absolutam definiendam, cùm vis Solis sit cognita: quod negotium, cùm a Newtono non satis accuratè sit pertractatum, nos id ex istis principiis expediemus. Exprimat igitur $m : n$ rationem intervallorum eorum, per quæ oceanus in dato Terræ loco, cùm in syzygiis luminarium quum quadraturis tempore æquinoctiorum, ascendendo descendendoque oscillatur; eritque $m : n = 3 p p \left(\frac{S}{2 a^3} + \frac{L}{2 b^3} \right) : \frac{3 L (p^2 q^2 + P^2 Q^2)}{2 b^3} - \frac{3 S p p}{2 a^3}$; ex quâ elicitur ista proportio $m \left(q^2 + \frac{P^2 Q^2}{p^2} \right) - n : m + n = \frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3}$; ex quâ cùm data sit vis a Sole orta $\frac{S}{a^3}$, deducitur vis a Lunâ oriunda $\frac{L}{b^3}$.

saltem proximè. Instituamus calculum pro observationibus in Portu Gratiae (Havre de Grace) factis, ex quibus diligenter inter se collatis pro ratione $m : n$ prodit ista $17 : 11$. Cùm igitur hujus loci elevatio poli sit circiter 50° . erit $P = \sin. 50^\circ$. et $Q = \sin. 23^\circ. 29'$; hincque $q q + \frac{P^2 Q^2}{p p} = 1,0668$: ex quo prodibit $\frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3} = 7,1356 : 28$; ita ut vis Lunæ $\frac{L}{b^3}$ sit ferè quadrupla vis Solis $\frac{S}{a^3}$, ut jam Newtonus ex aliis observationibus conclusit: atque hanc ob rem ipsius determinationem vis Lunæ absolutæ L retinuiamus.

§. 56. Si hæc, quæ de combinatione virium Lunam Solemque respicientibus sunt allata, attentius considerentur, mox patebit maximos æstus menstruos in novilunia ac plenilunia incidere debere; his enim temporibus tam elevatio aquæ quàm depressio a Luna oriunda a vi Solis maximè adjuvatur, cùm eodem tempore, quo Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, simul quoque Solis vis aquam maximè vel elevat vel deprimat. In quadraturis autem hæc duæ vires ferè perpetuò dissentiunt, ac dum Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, eodem tempore Sol contrarium exerit effectum, aquamque maximè vel deprimit vel elevat, ex quo minimum discrimen inter quemque fluxum ac subsequentem refluxum observabitur, æstusque erunt minimi. Quamobrem circa alias Lunæ phases æstus maris medium teneat inter maximum minimumque necesse est, quia tum vires Solis ac Lunæ nec omninò conspirant, nec sibi invicem adversantur. Per totum autem annum quibus noviluniis pleniluniisque maximus eveniat æstus, quibusque quadraturis minimus æstus respondeat, absolutè sine respectu ad situm loci habito definiri nequit. Sub

æquatore quidem ubi Luna, cùm est in æquatore, maximâ vi gaudet, dubium est nullum, quin æstus maximi in æquinoclia incidat, quando ambo luminaria in æquatore sunt posita, quæ eadem proprietas etiam in loca ab æquatore non multum dissita competit: at in locis ab æquatore magis remotis æstus maris, cùm Luna maximam habet declinationem, dantur quidem majores ex tabula, §. 50. verùm æstus mox subsequentes multo sunt minores. Quòd si autem inter binos æstus a Lunâ oriundos consequentes medium capiatur, patebit in regionibus 30°. ab æquatore remotis, quibus æstus est $\frac{2,250}{2b^3} L$ si Lunæ declinatio sit nulla, æstum maris me-

dium, cùm Luna habet declinationem 20 graduum, fore = $\frac{2,074}{2b^3} L$, ideó-

que adhuc minorem quàm cùm Luna æquatorem tenet. Contra verò sub elevatione poli 60 graduum, est æstus maris, Lunâ versante in æquatore, = $\frac{0,740}{2b^3} L$, æstus autem medius, cùm Lunæ declinatio est 20°. est =

$\frac{0,926}{2b^3} L$, ideóque major. Ex quo consequitur in regionibus polis vici-

nioribus æstus maximos, non in æquinoclia, sed potius circa solstitia, incidere debere, quâ quidem in re theoria nostra per experientiam mirificè confirmatur.



CAPUT QUINTUM.

De tempore Fluxûs ac Refluxûs Maris in eâdem hypothesi.

§. 57. QUANQUAM in præcedenti Capite, quo in quantitatem æstûs maris præcipuè inquisivimus, etiam tempora, quibus tam fluxus quàm refluxus eveniat, jam indicavimus; tamen hoc Capite istud argumentum fusiùs atque ad observationes accommodatè persequemur. Observationes enim, quæ circa æstum maris institui solent, ad tria genera commodissimè referuntur; ad quorum primum pertinet maris cùm elevatio maxima tùm maxima depressio; atque indicatur quantum quovis æstu aqua cùm ascendat tùm descendat. Ad secundum observationum genus numerari convenit eas, quæ ad tempus respiciunt, quibusque definitur, quonam temporis momento ubivis Terrarum aqua cùm summam teneat altitudinem

tum minimam. Tertium denique genus observationum ad ipsum motum maris reciprocum spectat, iisque determinatur quantâ celeritate quovis temporis momento alterna maris elevatio ac depressio absolvatur, sive momentanea mutatio, dum mare a fluxu ad refluxum transit et vicissim, investigatur. Quibus tribus rebus cum observationes convenientissimè instituantur, iisdem theoria atque explicatio phænomenorum commodissimè tractabitur. Ac primæ quidem et tertiæ parti pro nostrâ hypothesi in præcedentibus Capitibus abundè satisfactum videtur.

§. 58. Quoniam autem a maris inertia aliisque circumstantiis maris motum turbantibus omnes cogitationes adhuc abstrahimus, manifestum est ubique Terrarum, si sola Lunæ vis mare agigaret, aquam maximè elevari debere cum Luna ab horizonte longissimè fuerit remota, hoc est iis ipsis momentis quibus Luna per meridianum dati loci tam supra quàm infra Terram transit: sunt enim elevationes aquæ in duplicatâ ratione sinuum distantiarum Lunæ ab horizonte, ex quo simul successiva maris commotio cognoscitur. Excipiuntur autem hinc, ut jam notavimus, loca polis Terræ proxima, quibus Luna vel non oritur vel non occidit; ibi enim altero Lunæ ad meridianum appulsu aqua debet esse summa, altero ima. Verùm de his locis non admodum erimus solliciti; cum tam observationes sufficientes, quibus theoria probetur, deficiant, quàm ipse maris motus indicatus rationi sit consentaneus, neque confirmatione indigeat. In Terræ locis ergo a polis satis remotis seu extra circulos polares sitis, quibus Luna intervallo 24 h. 48'. tam oritur quàm obit, elevabitur mare eodem temporis intervallo bis, totiesque deprimetur; atque utraque maxima maris altitudo continget, cum Luna ad meridianum illius loci pervenit, minima verò cum Luna horizontem attingit. Hinc igitur temporis intervallum inter binos aquæ fluxus seu summas elevationes interjectum constanter erit 12 h. 24'. ab anomaliis Lunæ mentem abstrahendo; at tempus summæ depressionis, cum respondeat appulsui Lunæ ad horizontem, inter binas elevationes æqualiter non interjacebit, sed alteri elevationi eò erit propiùs, quò major fuerit cum loci propositi elevatio poli tum Lunæ declinatio, hoc est quò majus fuerit discrimen inter ortum obitumve Lunæ et circulum horarium sextum.

§. 59. Sed conjungamus cum Lunâ vim Solis, ut nostræ conclusiones magis ad observationes perducantur. Ac primò quidem manifestum est tempore tam novilunii quàm plenilunii aquam maximè fore elevatam, quando Luna per meridianum loci transit, quippe quo momento etiam Sol ad eundem meridianum appellit, si quidem syzygia ipso meridie vel mediâ nocte celebratur. Quamobrem si novilunium pleniluniumve in

ipsum meridiem incidat; ipso quoque meridiei momento maxima habebitur aquæ elevatio; pariterque si id eveniat mediâ nocte, eodem ipso momento aqua maximam obtinebit elevationem. Verùm si conjunctio vel oppositio luminarium meridiem vel præcedat vel sequatur, tum fluxus non in ipsum meridiem incidet, sed vel tardiùs vel citiùs veniet, quia Luna his casibus tanquam primaria æstûs causa vel post vel ante meridiem ad meridianum pertingit. Atque hinc eo die, in quem sive plenilunium sive novilunium incidit, facilitè poterit definiri acceleratio vel retardatio fluxûs respectu meridiei. Ponamus enim novilunium seu plenilunium celebrari n horis ante meridiem, unde cùm motus Lunæ medius a Sole diurnus sit 12° . circiter, ipso meridie Luna a meridiano jam distabit angulo horario $\frac{n}{2}$ grad. versùs ortum, ex quo Luna post meridiem de-

rum per meridianum transibit, elapsis $\frac{n}{30}$ horis seu $2n$ minutis primis.

Sin autem novilunium pleniluniumve accadat n horis post meridiem, tum maris maxima elevatio $2n$ minutis ante meridiem eveniet. Hæc autem momenta accuratissimè cognoscuntur, si ad singulos dies transitus Lunæ per meridianum computentur; ac præterea tam ortus quàm occasus notetur, quippe quibus momentis maxima aquæ depressio respondet; majorem autem hujusmodi tabula afferet utilitatem, si insuper quovis die distantia Lunæ a Terrâ inducetur, quippe a quâ Lunæ effectus præcipuè pendet.

§. 60. Congruunt hæc jam apprimè cum observationibus, quibus constat, diebus novilunii vel plenilunii æstum maris accelerari si novilunium pleniluniumve post meridiem accadat, contrà verò retardari. Quamvis enim ob aquæ inertiam maxima maris elevatio non respondeat appulsui Lunæ ad meridianum, sed tardiùs eveniat, uti post docebitur, tamen similibus casibus æqualiter retardabitur; pro termino igitur fixo, si ad observationes respiciatur, non sumi debet momentum meridiei, sed id momentum, quo si Lunæ cum Sole conjunctio vel oppositio in ipsum meridiem incidit, summa aquæ elevatio observatur. Hoc igitur momento notato, uti ab iis qui hujusmodi observationes instituunt fieri solet, si plenilunium noviluniumve vel ante vel post meridiem incidat, summa maris elevatio vel tardiùs vel citiùs continget: et quidem syzygia vera n horis vel ante meridiem eveniat vel post, tum fluxus $2n$ minutis vel tardiùs vel citiùs observari debet. Atque hæc est ea ipsa regula quam celeb. Cassini in Mem. Academiæ Regiæ pro an. 1710, ex quamplurimis observationibus inter se comparatis derivavit; jubet scilicet numerum horarum, quibus

conjunctio sive oppositio luminarium verum meridiem vel præcedit vel sequitur, duplicari, totidemque minuta prima ad tempus medium notatum, quo fluxus evenire solet, vel addi vel ab eo subtrahi, quo verum fluxus momentum obtineatur. Quoniam autem hæc correctio nititur motu Lunæ medio, perspicuum est eam correctione ulteriori opus habere, a vero Lunæ motu petitâ, quæ verò plerumque erit insensibilis, cùm summa aquæ elevatio non subitò adsit, sed per tempus satis notabile duret.

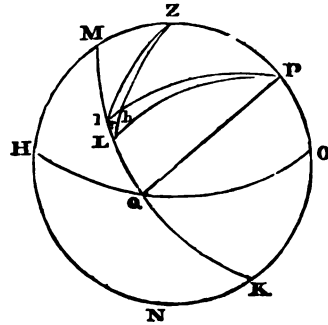
§. 61. Nisi autem luminaria proxima sint vel conjunctioni vel oppositioni, maxima maris elevatio non in ipsum Lunæ transitum per meridianum incidet. Quoniam enim Luna dum prope meridianum versatur, per aliquod tempus eandem altitudinem conservat, tantisper etiam mare eandem elevationem retinebit; et hanc ob rem si Sol interea sensibilibiter vel ab horizonte recedat, vel ad eundem accedat, vis Solis ad mare elevandum vel crescet sensibilibiter, vel decrescet; ex quo dum Luna prope meridianum existit, fieri potest, ut tamen mare etiamnum eleveetur, vel adeò jam deprimatur a Sole. Ex his igitur perspicuum est summam maris altitudinem tardiùs seu post transitum Lunæ per meridianum accidere debere, si eo tempore Sol ab horizonte accedat, id quod evenit diebus novilunium et plenilunium præcedentibus. Contrà autem si Luna post Solem per meridianum transeat, idque vel ante Solis ortum vel ante occasum; tum, quia mare in transitu Lunæ per meridianum a vi Solis deprimitur, maximam habuit altitudinem ante appulsum Lunæ ad meridianum, id quod contingit diebus novilunium pleniluniumve sequentibus. Quando autem Sol ipsum horizontem occupat, dum Luna in meridiano versatur, tum etiamsi distantia Solis ab horizonte perquam sit mutabilis, tamen cùm elevationis vis quadrato sinûs altitudinis Solis sit proportionalis, quod omnino evanescit, etiam hoc casu maxima aquæ elevatio in ipsum Lunæ per meridianum transitum incidet, hicque casus circa quadraturas luminarium locum habet.

§. 62. Ut igitur innotescat, quantum vires cùm Solis tùm Lunæ ad mare elevandum dato tempore vel crescant vel decrescant, dum ab horizonte aliquantillum vel recedunt, vel ad eundem accedunt, ponamus Solem Lunamve in L versari, atque inde ad punctum meridiani M progredi. Tempusculo ergo per angulum $LPl = d\theta$ repræsentato progredietur Luna vel Sol ex L in l atque ab horizonte removebitur intervallo Lh: ad quod inveniendum sit ut antè anguli MPl cosinus = t, et sinus = T, eritque ipse angulus $LPl = d\theta = \frac{+dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = \frac{dt}{T}$, ex quo orietur anguli MPl cosinus = $t + dt = t + Td\theta$. Si jam ponatur

sinus elevationis poli = P, sinus declinationis borealis puncti L = Q, nam si declinatio sit australis, sinus Q sumi debet negativè, cosinus verò respondententes sint p et q, reperietur sinus altitudinis L supra horizontem = v = t p q + P Q: punctique l sinus altitudinis v + d v = t p q + P Q + T p q d θ. Quocirca si Luna ponatur in L, cùm ejus vis ad mare attollendum sit = $\frac{L (3 v v - 1)}{2 b^3}$, erit hujus

$$\text{vis incrementum tempusculo } d \theta \text{ ortum} \\ = \frac{3 L v d v}{b^3} = \frac{3 L (t p q + P Q) T p q d \theta}{b^3}.$$

At si Sol ponatur in L, ejus vis ad mare elevandum tempusculo d θ capiet incrementum = $\frac{3 S (t p q + P Q) T p q d \theta}{a^3}$.



Quamvis autem pro Sole et Lunâ eidem angulo d θ non æqualia tempora respondeant, tamen quia ea proximè ad rationem æqualitatis accedunt, sunt enim ut 24 ad 24½ seu ut 32 ad 33, sine sensibili errore pro æqualibus haberi poterunt. Interim tamen si res accuratè definiri debeat, et vis Solis incrementum angulo d θ acquisitum sit = $\frac{3 S (t p q + P Q) T p q d \theta}{a^3}$, erit vis Lunæ incrementum eodem tem-

pusculo acceptum = $\frac{32 L (t p q + P Q) T p q d \theta}{11 b^3}$. Ex his intelligitur

hæc incrementa tribus casibus evanescere, quorum primus evenit sub polis, quia ibi est p = 0; secundus, si punctum L in meridiano sit situm, tum enim fit T = 0; tertius denique locum habet, si punctum L in horizonte existat, ubi est t p q + P Q = 0.

§. 63. Ponamus nunc Solem in L versari ac Lunam per meridianum jam transiisse, hocque momento maximè aquam esse elevatam; jam enim ostendimus dum Sol ab horizonte recedit, aquam summam incidere post transitum Lunæ per meridianum. Hoc ergo momento necesse est, ut decrementum vis Lunæ, quod tempusculo d θ patitur, æquale sit incremento vis Solis eodem tempore accepto. Sit igitur anguli horarii ad polum sumti quo Luna jam a meridiano recessit, cosinus = n, sinus = N, atque sit Lunæ declinationis borealis sinus = R, cosinus = r, ex quibus orietur decrementum vis Lunæ tempusculo d θ ortum = $\frac{3 L (n p r + P R) N p r d \theta}{b^3}$,

quod cùm æquale esse debeat incremento vis Solis eodem tempusculo

nato = $\frac{3 S (t p q + P Q) T p q d \theta}{a^3}$, denotante Q sinum declinationis borealis Solis, et q ejus cosinum, habebitur hæc æquatio $\frac{L (n p r + P R) N r}{b^3}$
 $= \frac{S (t p q + P Q) T q}{a^3}$, neglectâ fractione

ne §§, per quam incrementum vis Lunæ multiplicari deberet. Quoniam autem Luna a meridiano non procul distabit, poni poterit $n = 1$, atque cùm sit proximè $\frac{L}{b^3} = \frac{4 S}{a^3}$, obtinebitur iste valor $N =$

$$\frac{T q (t p q + P Q)}{4 r (p r + P R)}; \text{ qui in tempus con-}$$

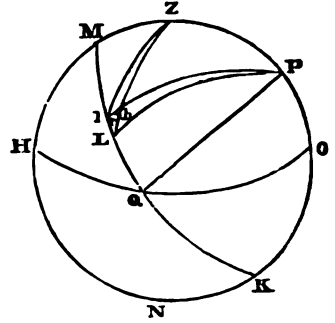
versus dabit temporis spatium, quo aqua post transitum Lunæ per meridianum maximam altitudinem attingit.

Sub æquatore ergo erit $N = \frac{T t q q}{4 r r}$, ob $P = 0$ et $p = 1$; quare si de-

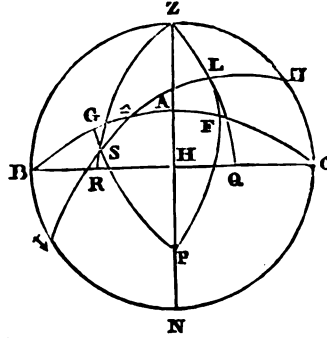
clinationes luminarium vel negligantur vel æquales assumantur, ita ut sit $q q = r r$, fiet $N = \frac{T t}{4}$, cujus expressionis valor extat maximus si angulus

$M P L$ sit 45° . quo casu erit $N = \frac{1}{8}$, et angulus respondens = $7^\circ. 11'$. qui indicat aquam summam 30 minutis post transitum Lunæ per meridianum contingere debere: totidemque minutis aqua ante transitum Lunæ per meridianum maximè erit elevata, si Sol tum versùs occasum versetur angulo $M P L =$ semi-recto. Quamobrem si Luna ad meridianum appellat horâ nonâ sive matutinâ sive pomeridianâ, fluxus demum post semi-horam eveniet, at si horâ tertiâ appellat Luna ad meridianum, aqua summa $30'$. antè observabitur: in aliis verò Terræ regionibus ista aberratio magis est irregularis; interim tamen satis prope ex formulâ datâ per solam æstimationem potest definiri.

§. 64. Quòd si autem hanc rem curatiùs investigare velimus, amborum luminarium declinationes non pro arbitrio fingere licet, pendent enim a se mutuò maximè ob angulum horarium $M P L$ inter ea interjectum datum: ut igitur pro datâ Lunæ phasi aberrationem maximæ aquæ elevationis a transitu Lunæ per meridianum determinemus, repræsentet nobis circulus $Z B N C$ verticalem primarium, $B C$ horizontem, $Z N$ meridianum per dati loci zenith Z et nadir N ductum, atque æquator sit $B A C$, polus australis p , et ecliptica $\pi \alpha \psi$. Constitutus nunc sit Sol in S et



Luna in L, quæ modò per meridianum transierit, quo tempore ponimus aquam maximè esse elevatam. Ponamus porrò longitudinis Solis ab æquinocio verno computatæ sinum esse = F, cosinum = f; Lunæ verò longitudinis sinum esse = G, cosinum = g; sitque inclinationis eclipticæ B A f sinus = M, cosinus = m. Ex his definientur declinationes cùm Solis tùm Lunæ, quarum sinus antè erant positi Q et R; erit scilicet Q = F M, R = G M; hincque q = $\sqrt{1 - F^2 M^2}$ et r = $\sqrt{1 - G^2 M^2}$. Deinde angulus S p L æqualis est angulo cujus tangens est $\frac{m F}{f}$ demto an-

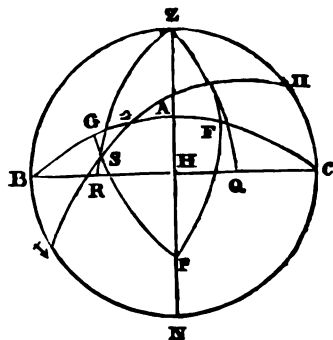


gulo cujus tangens est $\frac{m G}{g}$; hujus verò ejusdem anguli ob angulos S p Z et L p Z datos, quorum sinus sunt positi T et N, tangens quoque est $\frac{n T + N t}{n t - N T}$, quæ tangens propter sinum N valde parvum proximè est = $\frac{T}{t} + \frac{N}{t t}$. Ponatur autem K pro sinu anguli qui excessus est anguli habentis tangentem = $\frac{m F}{f}$ super angulum cujus tangens est $\frac{m G}{g}$, et k pro cosinu, reperiatur T = K - N k et t = k + N K scripto 1 pro n: quibus valoribus substitutis prodibit $N = \frac{K q (k p q + P Q)}{4 r (p r + P R) + (2 k^2 - 1) p q^2 + k P Q q}$ ex æquatione $N = \frac{T q (t p q + P Q)}{4 r (p r + P R)}$, paragr. præced.

§. 65. Ponamus nunc Lunam in quadraturis versari ac primò quidem in primo post novilunium quadrante, ita ut arcus L S futurus sit 90°. erit G = f, et g = - F; unde Q = M F et R = M f, ex quibus prodibit $K = \sin. (A \text{tang. } \frac{m F}{f} - A \text{tang. } \frac{-m f}{F})$ atque k ejusdem anguli cosinui æquabitur. Quare his tempestatibus aqua maximè elevata post transitum Lunæ per meridianum, intervallo temporis quod in arcum æquatoris conversum dabit angulum cujus sinus erit $N = \frac{K q (k p q + P Q)}{4 r (p r + P R) + (2 k^2 - 1) p q^2 + k P Q q}$. Pro posteriore verò quadraturâ post novilunium, erit G = - f et g = F,

unde erit $Q = M F$ et $R = - M f$, ex quibus fit ut antè $K = \sin$.
 $\left(\text{Atang. } \frac{m F}{f} - \text{Atang. } \frac{-m f}{F} \right)$ et $k = \cosinui$ respondenti. Ne autem

hic signa $+$ et $-$ calculum confundant, notari convenit K esse sinum arcûs, qui restat, si ascensio recta Lunæ subtrahatur ab ascensione rectâ Solis; atque k esse ejusdem arcûs cosinum. Ponamus exempli causâ Solem in initio Arietis versari, erit longitudo Solis $= 0^\circ$. seu 360° . et longitudo Lunæ $=$ vel 90° . vel 270° . unde fiet $F = 0$, $f = 1$, $G = \mp 1$, et $g = 0$, atque $Q = 0$. Præterea ascensio recta Solis est 360° . et ascensio recta Lunæ vel



90° . vel 270° .; utroque casu ergo fit $k = 0$; unde etiam prodit $N = 0$; quod idem evenit, si Sol versetur in initio Libræ. In utroque igitur æquinotio, dum Luna in quadraturis versatur, aqua maximè erit elevata eo ipso momento, quo Luna ad meridianum appellit.

§. 66. Sit porrò Sol in solstitio æstivo, Luna verò in ultimo quadrante, erit longitudo Solis 90° . Lunæ verò $= 0^\circ$. unde fit $F = 1$, $f = 0$; $G = 0$, $g = 1$, indeque $Q = M$ et $R = 0$; itemque $q = m$ et $r = 1$. Solis verò ascensio recta habebitur 90° . Lunæ verò $= 0^\circ$. ex quo $K = 1$ et

$k = 0$. Hinc ergo fit $N = \frac{m M P}{(4 - m^2) p}$ Pro primâ autem quadraturâ

est longitudo Lunæ 180° . unde $G = 0$, $g = -1$, at ut antè $F = 1$, $f = 0$; ergo $Q = M$, $R = 0$, itemque $q = m$ et $r = 1$. Cùm igitur Lunæ ascensio recta sit 180° . erit $K = \sin. - 90^\circ. = -1$, et $k = 0$,

ex quibus fit $N = \frac{-m M P}{(4 - m^2) p}$. Quoniam autem est $4 > m^2$, dum Sol

in solstitio æstivo versatur maxima aquæ elevatio in ultimâ quadraturâ continget post Lunæ transitum per meridianum supra Terram, priore verò quadraturâ ante hunc transitum, hæcque æquatio eò erit major, quâ major fuerit elevatio poli; sub æquatore enim omnino evanescit. Si poli elevatio 45° . fietque his regionibus $N = \pm \frac{M m}{4 - m^2}$; quare cùm

M sinus $23^\circ. 29'$. prodibit $N = \sinui$ anguli $6^\circ. 33'$.; qui in tempus versus dat $26'$. In primâ igitur quadraturâ totidem minutis ante transitum Lunæ per meridianum aqua maximè erit elevata, in ultimâ verò qua

draturâ tot minutis post transitum. Contrarium evenit si vel Luna sub Terra ad meridianum appellat, vel Sol in solstitio hyemali versetur. Ex his igitur formulis, si tabulæ adhibeantur, non erit difficile pro quovis loco Terræ ad quodvis tempus definire, quantum maxima aquæ elevatio transitum Lunæ per meridianum vel præcedere vel sequi debeat; cujusmodi supputationes maximam etiam afferent utilitatem, quando etiam inertię aquæ ratio habebitur.

§. 67. Quoniam igitur satis est expositum, quo momento mare maximè sit elevatum, maximam quoque maris depressionem definire aggrediamur. Ac primò quidem manifestum est, si sola Luna mare agitare, tum minimam aquæ altitudinem observatum iri, eo ipso momento, quo Luna in horizonte versetur: atque hinc perspicuum est, idem usu venire debere, si Sol eodem momento quoque in horizonte existat, id quod accidit cùm noviluniis tùm pleniluniis. Præterea verò etiam ima aqua respondebit situi Lunæ in horizonte, si eo tempore Sol meridianum occupet, quia tum vis Solis per notabile temporis intervallum neque augetur nec diminuitur, etiamsi tum aqua non tantum deprimatur, quàm circa novilunia ac plenilunia. Ponamus igitur, quò reliquos casus evolvamus, dum Luna horizontem occupat, Solem ab horizonte removeri; hoc ergo casu aqua jam elevabitur, ex quo necesse est imam aquam ante adventum Lunæ ad horizontem extitisse, contrà verò si dum Luna in horizonte versatur, Sol ad horizontem appropinquet, aqua tardiùs scilicet post appulsum Lunæ ad horizontem continget. Ponamus itaque Lunam ante ortum sub horizonte Hh in \mathfrak{D} adhuc versari, Solemque in \odot esse positum, unde ad meridianum PZH progrediatur, hocque ipso momento aquam maximè esse depressam. Necesse igitur est, ut decrementum momentaneum vis Lunæ ad mare movendum æquale sit incremento momentaneo vis Solis. Ad hanc æqualitatem declarandam sit anguli $\mathfrak{D}PO$ ad polum sumti, distantiam Lunæ a suo ortu O indicantis, sinus = V et cosinus = v , qui ob angulum $\mathfrak{D}PO$ valde parvum tutò sinui toti 1 æqualis concipi potest. Invento ergo angulo hoc $\mathfrak{D}PO$ seu arcu æquatoris illi respondente, eoque in tempus converso, constabit quanto temporis intervallo ima aqua appulsum Lunæ ad horizontem præcedat: idem verò calculus tam ad Lunæ occasum quàm ad accessionem Solis ad horizontem faciliè accommodabitur.

§. 68. Positis nunc $A\varphi$ a æquatore ac $\approx \varphi \Omega$ ecliptica, sit elevationis poli Ph sinus = P , cosinus = p ; sinus declinationis Lunæ borealis $\mathfrak{D}L = R$, cosinus = r ; ex quibus fiet anguli APO cosinus = $\frac{-PR}{pr}$,

minor quàm 1 : $\sqrt{\frac{1}{2}}$, ex quo fractio $\frac{q}{r}$ semper intra hos limites $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$

continebitur. Quòd si ergo hanc ab æqualitate aberrationem negligamus, id quod tutò facere possumus, quia rem tantùm prope definire conamur,

habebitur $V = \frac{T t}{4} = \frac{2 T t}{8}$. Denotat autem $2 T t$ sinum dupli anguli

horarii quo Sol a meridiano distat, et hanc ob rem ad momentum maximæ depressionis aquæ assignandum, videndum est quâ diei horâ Luna ad horizontem appellat, hujusque temporis vel a meridie vel mediâ nocte intervallum capiatur, atque in arcum æquatoris convertatur. Hujus deinde arcûs vel anguli sumatur duplum, hujusque dupli sinus, cujus pars octava præbebit sinum anguli, qui in tempus conversus dabit temporis intervallum, quo ima aqua Lunæ appulsum ad horizontem vel præcedit vel sequitur; id quod ex notatis circumstantiis discernere licet. Sic si Luna horâ 9 matutinâ adoriatur, erit tempus usque ad meridiem 3 horarum, angulusque respondens 45° . cujus dupli sinus est ipse sinus totus, cujus pars octava sit sinus anguli $7^{\circ} 11'$. cui tempus respondet ferè 30 minutorum, tantum itaque ima aqua ortum Lunæ præcedet.

§. 70. Ut hæc ad datum Lunæ cum Sole aspectum accommodari queant, ponamus longitudinis Solis γ \odot sinum esse = F, cosinum = f longitudinis verò Lunæ γ \textcircled{D} sinum esse = G, cosinum = g; atque inclinationis eclipticæ Ω γ a sinum = M, cosinum = m. His positis erit $Q = M F$, et $R = M G$; atque ascensionis rectæ Solis γ S tangens reperietur = $\frac{m F}{f}$, Lunæ verò ascensionis rectæ γ L tangens = $\frac{m G}{g}$.

Subtrahatur ascensio recta Solis ab ascensione rectâ Lunæ, et differentiæ sinus sit = K, cosinus = k. Cùm igitur anguli $\odot P \textcircled{D}$ sit sinus = K et cosinus = k, anguli verò A P \textcircled{D} sinus = $\frac{\sqrt{(p p - R R) - V P R}}{p r}$

Ob $v = 1$, et cosinus = $\frac{-P R - V \sqrt{(p p - R R)}}{p r}$, erit anguli A P \odot

sinus = $T = \frac{(k + K V) \sqrt{(p p - R R) - k P R V + K P R}}{p r}$ et cosinus = $t =$

$\frac{(K - k V) \sqrt{(p p - R R) - K P R V - k P R}}{p r}$; quibus valoribus

substitutis, simulque sinu V tanquam valde parvo considerato, reperietur sinus $V = \frac{(K P R + k \sqrt{(p p - R R)}) q (K q \sqrt{(p p - R R) - k P R q + P Q r})}{4 r r (p p - R R)}$.

Sub æquatore autem, quo fit $P = 0$, $V = \frac{K k q q}{4 r r}$: ex quo pro æquatore

regula superior a distantia Solis a meridiano petita simul ad differentiam ascensionalem Solis et Lunæ potest accommodari, ita ut maneat invariata. Sed ad præsens institutum, quo tantum veritatem causæ fluxûs ac refluxûs maris exhibitæ declarare annitimur, non opus est hæc pluribus persequi, quippe quæ potissimum ad accuratissimas æstûs marini tabulas supputandas pertinent, quæ res in propositâ quæstione illustrissimæ Academiæ non contineri videtur.



CAPUT SEXTUM.

De vero æstu Maris, quatenus à Terris non turbatur.

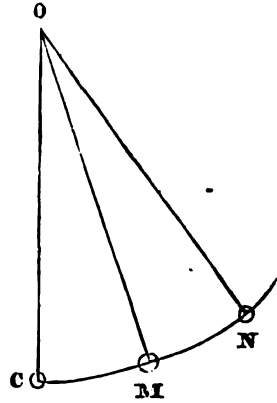
§. 71. **QUÆ** hactenus ex viribus Solis ac Lunæ circa æstum maris fusiùs deduximus, eâ hypothesi nituntur, assumptâ, qua aquam inertie expertem posuimus: quamobrem non est mirandum si plerique effectus assignati cum phænomenis minùs congruant, atque adeo pugnare videantur; quòd si enim inter se prorsus convenirent, theoria non solùm non eo consensu confirmaretur, sed potiùs omnino subverteretur, cùm quilibet faciliè agnoscat ob aquæ inertiam determinationibus exhibitis ingentem mutationem inferri debere. Quæ autem ex deductis conclusionibus maximè ab experientiâ dissentiant, potissimum quantitatem elevationis aquæ ac temporis momentum, quo tam summa maris elevatio quàm ima depressio contingere solet, respiciunt. Nusquam enim ubi quidem mare est liberum atque apertum, tam exiguum discrimen inter fluxum ac refluxum in aquæ altitudine observatur, quale in præcedentibus definivimus, quatuor scilicet pedum tantum; quæ elevatio insuper tamen maxima est deprehensa, ac tum solùm oriunda, quando tum regio prope æquatorem est sita, quàm vires luminarium inter se maximè conspirant. Experientiâ namque constat, plerisque in locis, si æstus contingat maximus, aquam non solùm ad altitudinem duplo majorem, sed etiam quadruplam, imò nonnullis in locis adeo decuplam attolli; quanquam hæc enormis elevatio non soli inertie aquæ, sed maximam partem vicino continenti ac littorum situi est tribuenda, uti in sequenti Capite clarissimè monstrabitur. Deinde etiam quod ad tempus attinet, nusquam illis ipsis momentis, quæ assignavimus, fluxus ac refluxus unquam contingunt, nec etiam tempestatibus hic definitis fluxus maximi vel minimi, sed ubique tardiùs evenire constanter

observantur; cujus quidem retardationis causa in ipsâ aquæ inertîâ posita esse primâ etiam fronte perspicitur.

§. 72. Quantumvis autem agitatio maris in præcedentibus Capitibus determinata ab observationibus dissentiat, tamen complures circumstantiæ sese jam præbuerunt, experientiæ tantopere consentaneæ, ut ampliùs dubitare omnino nequeamus, quin in viribus Solem Lunamque respicientibus, quas non temerè assumimus, sed aliunde existere demonstravimus, vera et genuina æstûs maris causa contineatur. Hanc ob rem jam meritò suspicari licet, dissensiones quæ inter theoriam nostram, quatenus eam assumptæ hypothesi superstruximus, et experientiam intercedunt, ab aquæ inertîâ aliisque circumstantiis, quarum nullam adhuc rationem habuimus, proficisci. Quocirca si omnia inertîæ ratione habitâ ad observationes propiùs accedant, id quidem nostræ theoriæ maximum afferet firmamentum, atque simul omnes alias causas, quæ præter has vel sunt prolatae vel proferri possunt, excludet, irritasque reddet. Cùm igitur consensum hujus theoriæ cum phænomenis, mox simus evidentissimè ostensuri, quæstioni ab inclytâ Academiâ propositæ ex asse satisfecisse jure nobis videbimur: cùm non solum nullas vires imaginarias effinxerimus, sed etiam virium Lunam Solemque respicientium existentiam aliunde dilucidè evicerimus. Neque vero in hoc negotio cum plerisque Anglorum ad qualitates occultas sumus delapsi, verùm potius causam istarum virium modo rationali et legibus motûs consentaneo in vorticibus constituimus, quorum formam atque indolem luculenter explicare possemus; idque fecissemus, nisi ab aliis cùm jam satis esset expositum, tùm etiam ab illustrissimâ Academiâ in præsentè quæstione non requiri videatur.

§. 73. Dum igitur hactenus aquæ omnem inertiam cogitatione adimus, ipsi ejusmodi qualitatem affinximus, quâ viribus sollicitantibus subito obsequeretur, seque in instanti in eum statum reciperet, in quo cum viribus in æquilibrio consisteret; hocque pacto aquam non solum subito omnis motûs capacem posuimus, sed etiam ita comparatam, ut quovis momento omnem pristinum motum amittat. Longè aliter autem res se habet, si inertîæ ratio in computum ducatur; hæc enim efficit ut primò aqua non subito se ad eum situm componat, quem vires intendunt, sed pedetentim per omnes gradus medios ad eum accedat; deinde verò eadem inertia in causa est, quòd aqua, cùm in statum æquilibrii pervenerit, ibi non acquiescat, sed ob motum insitum ultrà progrediatur, quoad omnem motum a potentiis renitentibus amittat. Ex quo perspicuum est, admissâ inertîâ aquæ, a potentiis sollicitantibus motum omninò diversum actu imprimi debere ab eo, quem reciperet, si inertîâ privata

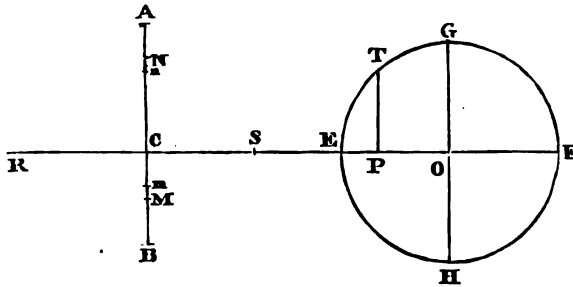
esset; cujus discriminis ratio exemplo corporis penduli commodè ob oculos poni potest. Ponamus enim corpus pendulum $O C$ ob gravitatem situm tenens verticalem, a vi quâpiam in latus secundùm directionem $C M$ sollicitari. Si nunc hoc pendulum inertîâ careret, seu ejusmodi esset indolis, cujus aquam hactenus sumus contemplati, tum subitò situm $O M$ acciperet, in quo hæc vis cum gravitate æquilibrium teneret. At cùm pendulum inertîâ præditum consideratur, post aliquod demum tempus elapsum ad situm $O M$ perveniet: ac deinde quia motu accelerato eò pertingit, ibi non quiescet, sed ultrà excurrat, putà in N usque, ita ut spatium $C N$ ferè sit duplo majus spatio $C M$, prouti calculus clarè indicat. Propter inertiam igitur pendulum primùm tardiùs vi sollicitanti obtemperat, atque a situ æquilibrii recedit; deinde verò etiam magis recedit, majoremque excursionem conficit, quàm si inertîâ careret; quæ sunt eæ ipsæ duæ res, in quibus theoria antè exposita ab experientiâ maximè dissentire deprehensa est.



§. 74. Si nunc istud penduli exemplum ad nostrum casum æstûs maris transferamus, primò ingens similitudo in situ penduli verticali ac statu maris naturali, quem obtinet remotis potentiis externis, observatur. Nam quemadmodum pendulum, si in quamcunque plagam de situ verticali declinetur, propriâ vi gravitatis se in eundem recipit, ita etiam aqua, si ex situ suo æquilibrii depellatur, vi gravitatis se ad eundem componit, ac præterea pariter ac pendulum oscillationes peragit, cujusmodi oscillationum casus in aqua observati passim inveniuntur expositi. Deinde etiam simili modo, quo pendulum, mare quò magis ex situ suo naturali fuerit deturbatum, eò majorem habebit vim sese in situm æquilibrii restituendi. Quòd si igitur mare a viribus externis, Solis scilicet ac Lunæ, mox elevetur mox deprimatur, necesse est ut inde motus oscillatorius seu reciprocus oriatur æstui maris omnino similis, qui autem per leges motus difficulter definiri queat accuratè quidem; nam vero proximè, hoc non adeo erit difficile. Duæ autem sunt res, quæ absolutam ac perfectam totius motûs determinationem summoperè reddunt difficilem, quarum altera physicam spectat, atque in ipsâ fluidorum naturâ consistit, quorum motus difficulter ad calculum revocatur, præcipuè si quæstio sit de amplissimo oceano, qui aliis in locis elevetur, aliis verò deprimatur

Altera autem difficultas in ipsâ analysi est posita, eò quòd iste motus maris reciprocus prorsus sit diversus ab omnibus oscillationibus a mathematicis adhuc consideratis: vires enim Lunæ ac Solis mare sollicitantes neque a situ corporis oscillantis, neque ab ejus celeritate pendent, uti id usu venit in omnibus oscillationum casibus etiam nunc expositis, sed eæ vires a situ luminarium respectu Terræ, ideòque a tempore determinantur, cujusmodi oscillationes nemo adhuc, quantum quidem constat, calculo subjecit.

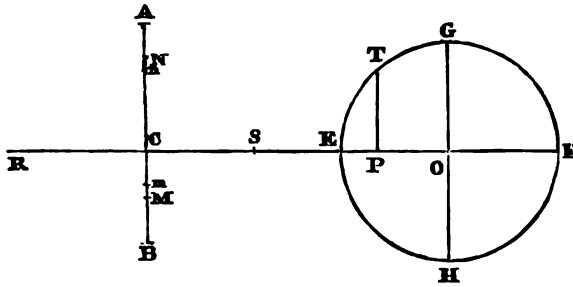
§. 75. Quod quidem ad priorem difficultatem physicam attinet, res hoc quidem tempore ferè desperata videtur; quamquam enim ab aliquo tempore theoria motûs aquarum ingentia sit assecuta incrementa, tamen ea potissimum motum aquarum in vasis et tubis fluentium respiciunt, neque vix ullum commodum inde ad motum oceani definiendum derivari potest. Quamobrem in hoc negotio aliud quicquam præstare non licet,



nisi ut hypothesis effingendis, quæ a veritate quàm minimè abludent, tota quæstio ad considerationes purè geometricas et analyticas revocetur: alteram autem difficultatem mathematicam, etiamsi difficillimis integrationibus sit involuta, tamen feliciter superare confidimus. Considero scilicet superficiem aquæ R S, quæ hoc in situ æquilibrium teneat cum reliqua aqua, remotis viribus externis; his verò accedentibus alternis vicibus attollatur in A, deprimaturque in B. Quòd si igitur aqua in M usque sit depressa, atque externæ vires Solis ac Lunæ subito cessarent, tum vi gravitatis propriæ conaretur sese elevare usque in situm R S naturalem, isteque conatus eò erit major, quò majus fuerit spatium C M quo a situ naturali distat. A veritate itaque non multum recedemus, si hanc vim ipsi spatio M C ponamus proportionalem: quamobrem posito spatio M C = s erit vis, quæ aquæ superficiem in M usque depressam attollet = $\frac{s}{g}$, quæ hypothesis ad veritatem eò propiùs accedit, quòd sponte

indicat, si aquæ superficies supra C jam sit elevata, tum vim fieri negativam, adeoque aquam deprimere. Præterea verò eadem hypothesis confirmatur pluribus phænomenis aquæ nisum respicientibus, ita ut de ejus veritate ampliùs nullum dubium supersit.

§. 76. Ponamus jam aquam in M constitutam urgeri a solâ Lunâ, atque ut calculus per se molestus minus habeat difficultatis, sit locus C sub ipso



æquatore situs, Lunæque declinatio nulla, ex quo Luna in circulo maximo per loci zenith transeunte æquatore scilicet circumferetur: sit EGFH iste circulus, cujus radius ponatur = 1, atque E F repræsentet horizontem, et G zenith. Positis his, sit Luna in T dum maris superficies versatur in M, ita ut P T = y exprimat sinum altitudinis Lunæ super horizonte; unde vis Lunæ mare attollens erit = $\frac{L(3yy-1)}{2b^3} = \frac{3yy-1}{h}$,

posito brevitatis gratiâ h pro $\frac{2b^3}{L}$. Hanc ob rem ergo superficies maris

in M duplici vi attolletur, scilicet vi = $\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}$. Quòd si ergo

ponamus aquam in M jam habere motum sursum directum, cujus celeritas tanta sit quanta acquiritur lapsu gravis ex altitudine v, atque spatium M m = - d s tempusculo infinitè parvo absolvatur, habebitur per principia motûs d v = - d s $\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$. Ponamus porrò tempus

ab ortu Lunæ in E jam elapsum, quod arcui E T est proportionale, esse = z, quæ littera ipsum arcum E T simul denotet, erit y = sin. z scilicet sinui arcus z, hoc enim modo sinus ac cosinus arcuum sumus indicaturi: unde orietur $1 - 2yy = \cos. 2z$, atque $3yy - 1 = \frac{1}{2} -$

$\frac{3}{2} \cos. 2z$, hincque d v = - d s $\left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h} \cos. 2z\right)$.

§. 77. Cùm igitur elementum temporis sit = d z, erit ex naturâ motûs

$d z = - \frac{d s}{\sqrt{v}}$, atque $v = \frac{d s^2}{d z^2}$; unde sumto elemento $d z$ pro constante,

fiet $d v = \frac{2 d s d d s}{d z^2} = - d s \left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2 h} - \frac{s}{2 h} \cos. 2 z \right)$, atque $2 d d s + \frac{s d z^2}{g} + \frac{d z^2 (1 - 3 \cos. 2 z)}{2 h} = 0$, quæ æquatio duas tantum continet

variabiles s et z , et propterea si debito modo integretur, indicabit situm seu statum aquæ ad quodvis tempus. Quoniam autem hæc æquatio est differentialis secundi gradûs, atque insuper arcus et sinus arcuum continet, facilè intelligitur ejus integrationem minus esse obviam; interim tamen cùm alterius variabilis s plus unâ dimensione nusquam adsit, ea per methodos mihi familiares tractari poterit. Soleo autem, quoties ejusmodi occurrunt, initio eos terminos in quibus altera variabilis s omnino non inest, rejicere; unde hæc considerata venit æquatio $2 d d s + \frac{s d z^2}{g} = 0$, quæ per $d s$ multiplicata fit integrabilis, existente integrali $d s^2 +$

$\frac{s s d z^2}{2 g} = c d z^2$ ob $d z$ constans. Hinc porrò elicitur $d z =$

$\frac{d s \sqrt{2 g}}{\sqrt{(2 c g - s s)}}$, atque $\frac{z}{\sqrt{2 g}} =$ arcui cujus sinus est $\frac{1}{\sqrt{2 c g}}$, ex quo ob-

tinetur $s = \sqrt{2 c g} \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}}$. Cognito autem hoc valore, idonea nas-

citur substitutio facienda pro æquatione propositâ $2 d d s + \frac{s d z^2}{g} +$

$\frac{d z^2 (1 - 3 \cos. 2 z)}{2 h} = 0$, fiat enim $s = u \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}}$, erit $d s = d u \times$

$\sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} + \frac{u d z}{\sqrt{2 g}} \cos. \frac{z}{\sqrt{2 g}}$, atque $d d s = d d u \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} + \frac{2 d u d z}{\sqrt{2 g}} \times$

$\cos. \frac{z}{\sqrt{2 g}} - \frac{u d z^2}{2 g} \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}}$. Quibus valoribus substitutis emerget ista

æquatio $2 d d u \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} + \frac{4 d u d z}{\sqrt{2 g}} \cos. \frac{z}{\sqrt{2 g}} + \frac{d z^2 (1 - 3 \cos. 2 z)}{2 h}$

$= 0$, in quâ hoc commodè accidit, ut ipsa variabilis u non insit, sed tantùm ejus differentialia.

§. 78. Quòd si ergo ponatur $d u = p d z$, erit $d d u = d p d z$, et æquatio nostra transibit in sequentem differentialem primi gradûs tantum, $2 d p \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} + \frac{4 p d z}{\sqrt{2 g}} \cos. \frac{z}{\sqrt{2 g}} + \frac{d z (1 - 3 \cos. 2 z)}{2 h} = 0$: quæ integrabilis reddi invenitur, si multiplicetur per quantitatem quampiam ex

z et constantibus compositam, eò quòd p plures unâ dimensiones habet nusquam. Ad integrationem autem absolvendam notandum est hujus æquationis $d p + p Z d z = z d z$, in quâ Z et z functiones quascunque ipsius z denotent, integrale esse $e^{\int Z d z} p = \int e^{\int Z d z} z d z$. Reductâ autem nostrâ æquatione ad hanc formam, habetur $d p +$

$$\frac{2 p d z \cos. \frac{z}{\sqrt{2 g}}}{\sqrt{2 g} \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}}} = \frac{d z (3 \cos. 2 z - 1)}{4 h \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}}}, \text{ ideòque } Z d z =$$

$$\frac{2 d z \cos. \frac{z}{\sqrt{2 g}}}{\sqrt{2 g} \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}}} = \frac{2 \text{ diff. sin. } \frac{z}{\sqrt{2 g}}}{\sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}}}; \text{ atque hinc } \int Z d z =$$

$$2 \log. \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}}; \text{ et } e^{\int Z d z} = \left(\sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \right)^2. \text{ Ex his sequitur integrale}$$

$$\text{nostræ æquationis } p \left(\sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \right)^2 = \frac{1}{4 h} \int d z \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} (3 \cos. 2 z - 1)$$

$$= \frac{3}{4 h} \int d z \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \cos. 2 z - \frac{1}{4 h} \int d z \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}}, \text{ ad quas integra-}$$

$$\text{tiones perficiendas notetur esse } \int d z \sin. \alpha z = C - \frac{1}{\alpha} \cos. \alpha z, \text{ atque}$$

$$\int d z \sin. \alpha z \cos. \zeta z = C - \frac{\zeta \sin. \alpha z \sin. \zeta z - \alpha \cos. \alpha z \cos. \zeta z}{\alpha^2 - \zeta^2}; \text{ ex}$$

$$\text{his itaque conficietur } p \left(\sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \right)^2 = C + \frac{\sqrt{2 g}}{4 h} \cos. \frac{z}{\sqrt{2 g}}$$

$$- \frac{\left(2 \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \sin. 2 z + \frac{1}{\sqrt{2 g}} \cos. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \cos. 2 z \right)^3}{\left(\frac{1}{2 g} - 4 \right) 4 h} \text{ atque } p =$$

$$\frac{C \sqrt{2 g} \cos. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \left(4 g \sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \sin. 2 z + \sqrt{2 g} \cos. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \cos. 2 z \right)^3}{\left(\sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \right)^2 + 4 h \left[\sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \right]^2 4 h (1 - 8 g) \left[\sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \right]^2}.$$

§. 59. Cùm autem posuissimus $d u = p d z$, erit $u = \int p d z =$

$$\int \frac{C d z}{\left[\sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \right]^2} + \int \frac{d z \sqrt{2 g} \cos. \frac{z}{\sqrt{2 g}}}{4 h \left[\sin. \frac{z}{\sqrt{2 g}} \right]^2} - \frac{3}{4 h} \int d z \times$$

$$\frac{\left[4 g \sin. \frac{z}{\sqrt{2} g} \sin. 2 z + \sqrt{2} g. \cos. \frac{z}{\sqrt{2} g} \cos. 2 z \right]}{(1 - 8 g) \left[\sin. \frac{z}{\sqrt{2} g} \right]^2}. \text{ Hæ autem for-}$$

$$\text{mulæ omnes sunt absolutè integrabiles, prodibitque } u = D - \frac{C \cos. \frac{z}{\sqrt{2} g}}{\sin. \frac{z}{\sqrt{2} g}} - \frac{g}{2 h \sin. \frac{z}{\sqrt{2} g}} + \frac{3 g \cos. 2 z}{2 h (1 - 8 g) \sin. \frac{z}{\sqrt{2} g}}; \text{ ex quo}$$

$$\text{tandem resultat } s = u \sin. \frac{z}{\sqrt{2} g} = D \sin. \frac{z}{\sqrt{2} g} + C \cos. \frac{z}{\sqrt{2} g} - \frac{g}{2 h} + \frac{3 g \cos. 2 z}{2 h (1 - 8 g)}, \text{ quæ est æquatio generalis ad quodvis tempus } z \text{ sta-}$$

tum aquæ, seu distantiam ejus supremæ superficiei à C indicans, ubi constantes C et D ex dato maris statu ad datum tempus definiri oportet. Quòd si igitur ponamus motum aquæ jam ad uniformitatem esse deduc- tum, ita ut aqua omnibus diebus, quando Luna in T versatur, in eodem loco M versetur, necesse erit ut valor ipsius s maneat idem, etsi arcus z integrâ peripheriâ 2π vel ejus multiplo augeatur. At posito $z + 2 \pi$

$$\text{loco } z, \text{ terminus } \cos. 2 z \text{ manet quidem invariatus, at } D \sin. \frac{z}{\sqrt{2} g} + C \cos. \frac{z}{\sqrt{2} g} \text{ fit } = D \sin. \frac{z + 2 \pi}{\sqrt{2} g} + C \cos. \frac{z + 2 \pi}{\sqrt{2} g}, \text{ quæ æqualitas}$$

adesse non potest nisi vel $\frac{1}{\sqrt{2} g}$ sit numerus integer, vel C et D = 0.

Cùm itaque g determinari non liceat, quia jam est datum, ponendum erit C = 0 et D = 0, ita ut ista habeatur æquatio $s = -\frac{g}{2 h} + \frac{3 g \cos. 2 z}{2 h (1 - 8 g)}$,

ex quâ facillimè ad quodvis tempus status maris cognoscetur: valores scilicet affirmativi ipsius s dabunt situm aquæ infra situm naturalem C, negativi verò supra C.

§. 80. Cognito autem spatio s per tempus z, celeritas quoque maris quâ in M ascendit reperietur ex æquatione $d z = \frac{-d s}{\sqrt{v}}$ erit enim $V v =$

$$\frac{-d s}{d z} = \frac{3 g \sin. 2 z}{h (1 - 8 g)}, \text{ quæ expressio ipsi celeritati, quâ aquæ superficies,}$$

dum in M versatur, elevatur, est proportionalis: hæc ergo celeritas aquæ semper est ut sinus dupli arcûs E T, vel etiam ut sinus dupli temporis, quo Luna a transitu per meridianum abest, tempore scilicet in arcum æquatoris converso. Hinc igitur celeritas aquæ erit nulla si Luna fuerit

vel in E vel in G vel in F vel in H, hoc est, vel in horizonte vel in meridiano : quare cùm his temporibus aqua vel maximè sit elevata vel maximè depressa, unâ Lunæ revolutione aqua bis elevabitur, bisque deprimetur, ideòque bini fluxus binique refluxus contingent. Aqua quidem maximè erit depressa iis ipsis momentis, quibus Luna ad horizontem appellit, tum enim fit $\cos. 2z = 1$; atque spatium C B erit $= s = \frac{g(1 + 4g)}{2(1 - 8g)}$; at

maxima elevatio incidet in ipsos Lunæ transitus per meridianum, quibus est $\cos. 2z = -1$: ac tum altitudo C A erit $= -s = \frac{g(2 - 4g)}{h(1 - 8g)}$

Quanquam autem hæc momenta cum experienciâ non satis conveniunt, tamen ea hypothesi assumptæ planè congruunt, quâ posuimus Lunam solam agere, ac perpetuò in ipso æquatore versari, ex quo æstus se tandem ad summam regularitatem componat necesse est. Quòd si enim Lunæ declinatio ponatur variabilis, atque Sol insuper agat, æstus jam formati perpetuò turbabuntur, ex quo ob æquabilitatem continuò sublatus effectus tardiores necessariò consequi debebunt. Præterea quoque nullam adhuc motûs maris horizontalis habuimus rationem, cùm enim aqua ad æstum formandum motu horizontali progredi debeat, perspicuum est hinc retardationem in æstu oriri oportere.

§. 81. Si aqua, uti in præcedentibus Capitibus posuimus, inertîâ caret, tum foret ex æquatione primâ $d v = -d s \left(\frac{s}{g} + \frac{3 y y - 1}{h} \right)$ perpetuò

tum $s = \frac{g(1 - 3 y y)}{h}$, quia aqua tum quovis momento cum viribus solli-

citantibus in æquilibrio consisteret. Maxima igitur depressio etiam tum Lunæ horizontali responderet, cùm est $y = 0$, foretque spatium depressionis C M $= \frac{g}{h}$; maxima verò elevatio, quæ circa Lunæ appulsum ad

meridianum continget, fiet per spatium C N $= \frac{2g}{h}$ ob $y = 1$. Quare si

aqua inertîâ careret, foret spatium M N, per quod aqua motu reciproco agigaretur, $= \frac{3g}{h}$; inertîâ autem admissâ agitationes perficientur in

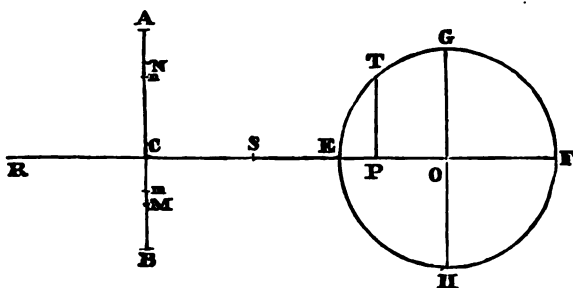
spatio majore A B $= \frac{3g}{h(1 - 8g)}$, cujus excessus super spatium M N

erit $= \frac{24g}{h(1 - 8g)}$. Quantitas itaque æstûs pendet a valore litteræ g ;

qui quidem semper est affirmativus; nam si foret $g = 0$, quod evenit si

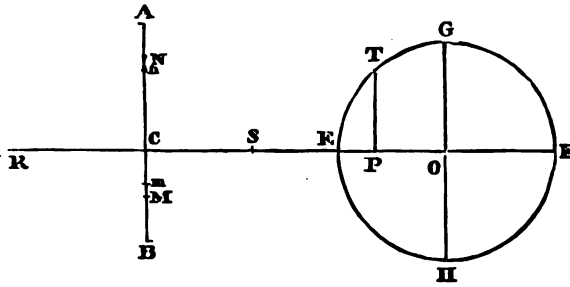
gravitatis vis esset infinitè magna respectu virium Lunæ et Solis, tum etiam nullus æstus oriretur; deinde quò magis $8g$ ad 1 accedit, eò major prodibit æstus, qui adeo in infinitum excrescere posset si foret $8g = 1$; hoc quippe casu vis Lunæ gravitatem superaret, omnesque aquas ad Lunam attraheret; quod autem fieri non potest, multo minus autem esse potest $8g > 1$, quod tamen si eveniret, maxima elevatio appulsui Lunæ ad horizontem, maximaque depressio Lunæ meridianum occupanti responderet.

§. 82. Cùm igitur aqua, si inertia careret, agitur per spatium $MN = \frac{3g}{h}$, suprâ autem §. 41. eâdem hâc hypothesi, quâ tam locus quàm Luna in æquatore ponitur, aquam elevari supra libellam per spatium 2,260 pedum, infra eam verò deprimi spatio 1,112 pedum, erit $\frac{3g}{h} = 3,372$ pedum, ideòque $\frac{g}{h} = 1,124$ pedum $= 1 \frac{1}{8}$ pedum. Quoniam verò valor ipsius g cum unitate comparatur, ideo venit, quod tempus per ipsum arcum circuli cujus radius est $= 1$ expressimus: hinc itaque valor ipsius g respectu unitatis definietur tempore eodem modo expresso, quo aqua in M usque depressa solâ vi gravitatis se in C restitueret, quod



tempus ex circumstantiis facilè poterit æstimari: prodibit autem per calculum tempus hujus restitutionis $= \frac{\pi}{2} \sqrt{2g}$, denotante π semi-peripheriam circuli radium $= 1$ habentis, seu tempus duodecim horarum lunarium. Quòd si igitur restitutio ponatur actu fieri tempore $\frac{12}{n}$ horarum, erit $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi \sqrt{2g}}{2}$ et $g = \frac{2}{n^2}$, ex quo perspicuum est, quò citiùs aqua se propriâ suâ vi restituere valeat, eò minùs excessurum esse spatium AB

spatium M N. Cùm autem de hâc restitutione non satis tutò judicare queamus, præstabit ex observationibus rationem spatii A B ad M N proximè assumere. Si enim ponamus esse A B = 2 M N, erit $\frac{3}{1-8g}$ = 6, erit $g = \frac{1}{16}$; sin autem sit A B = 3 M N, fiet $\frac{3}{1-8g} = 9$ et $g = \frac{1}{8}$: at posito A B = 4 M N, erit $g = \frac{1}{4}$. Quoniam igitur aqua ob inertiam ferè duplo majus spatium absolvere poni potest, assumamus $g = \frac{1}{8}$ seu $n = 6$, ita ut aqua propriâ vi gravitatis tempore circiter 2



horarum in statum naturalem se restituere valeat. Posito autem $g = \frac{1}{8}$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 5, 4$; spatiumque A B = 6 pedum proximè. Ne autem tractatio nimis fiat specialis, retineamus litteram n , cujus valorem esse circiter 6 vel 5 notasse sufficiet, qui valor satis propè ad æstimationem accedit: ita ut sit $g = \frac{2}{n n}$ et A B = $\frac{3 n n}{n n - 16} \cdot \frac{2}{3}$ pedum: unde satis patet n necessariò esse debere > 4 , eritque adeo vel 5 vel 6.

§. 83. Tentemus nunc idem hoc Problema in sensu latiori, ac ponamus regionis C elevationis poli sinum esse = P, cosinum = p; Lunæ verò declinationis borealis sinum esse = Q, cosinum = q; Lunamque super Terra jam per meridianum transiisse, ab eoque distare angulo horario = z, ita ut z ut antè tam tempus quàm arcum circuli radii = 1 designet; quòd si nunc arcus z cosinus ponatur = t, erit sinus altitudinis Lunæ super horizonte = $t p q + P Q$; ideòque vis Lunæ mare elevans = $\frac{L}{2b^3} \times$

$$(3(t p q + P Q) - 1) = \frac{3 p^2 q^2 t t + 6 p q P Q t + 3 P^2 Q^2 - 1}{h},$$
 posito ut antè $\frac{L}{2 b^3} = \frac{1}{h}$. Quoniam verò est $t = \cos. z$ erit $2 t t - 1 =$

$\cos. 2z$ et $t t = \frac{1 + \cos. 2z}{2}$, ex quo vis Lunæ ad mare elevandum ha-

$$\text{bebitur} = \frac{3 p^2 q^2 \cos. 2z}{2 h} + \frac{6 p q P Q \cos. z}{h} + \frac{3 p^2 q^2 + 6 P^2 Q^2 - 2}{2 h}.$$

Ponamus nunc superficiem aquæ in M versari, existente $CM = s$, et celeritatem ejus quâ actu ascendit debitam esse altitudini v , erit $dv =$

$$-ds \left(\frac{s}{g} + vi \text{ Lunæ} \right), \text{ cùm verò sit } dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}} \text{ seu } \sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} =$$

ipsi celeritati ascensûs erit $v = \frac{2 ds ds}{dz}$, posito dz constante: hinc igi-

$$\text{tur emerget ista æquatio } 2 ds + dz^2 \left(\frac{s}{g} + \frac{3 p^2 q^2 + 6 P^2 Q^2 - 2}{2 h} + \frac{6 p q P Q \cos. 2z}{h} + \frac{3 p^2 q^2 \cos. 2z}{2 h} \right) \text{ relationem inter tempus } z \text{ et}$$

statum maris s continens.

§. 84. Quòd si nunc hæc æquatio eodem modo tractetur, quo superior, ea pariter bis integrari posse deprehendetur, integrationibus autem singulis debito modo absolutis, et constantibus ita determinatis ut motus aquæ fiat uniformis, reperiatur $s = \frac{-g(3 p^2 q^2 + 6 P^2 Q^2 - 2)}{2 h} -$

$$\frac{6 g p q P Q \cos. z}{h(1 - 2g)} - \frac{3 g p^2 q^2 \cos. 2z}{2 h(1 - 8g)} \text{ ac celeritas ascensûs } \sqrt{v} =$$

$$\frac{-ds}{dz} = \frac{-6 g p q P Q \sin. z}{h(1 - 2g)} - \frac{3 g p^2 q^2 \sin. 2z}{h(1 - 8g)}. \text{ Cùm autem sit}$$

$\sin. 2z = 2 \sin. z \cos. z$, celeritas duobus casibus evanescit, quorum primus est si $\sin. z = 0$, alter si $\cos. z = \frac{-PQ(1 - 8g)}{pq(1 - 2g)}$; illi casus dabunt

aquam summam, hi verò imam. Hinc igitur patet aquam summam contingere debere iis ipsis momentis, quibus Luna per meridianum transit, imam verò non tum, cùm Luna horizontem attingit; namque Luna horizontem attingit, si est $\cos. z = \frac{-PQ}{pq}$, aqua verò est ima si est $\cos. z =$

$$\frac{-PQ(1 - 8g)}{pq(1 - 2g)} = \frac{-5PQ}{8pq} \text{ posito } g = \frac{1}{8}. \text{ Hic autem idem est}$$

notandum quod suprâ, scilicet nos posuisse motum aquæ esse uniformem seu quotidie sui similem, Lunamque in ecliptica locum tenere fixum, seu saltem suam declinationem non variare. Quoniam verò ob variabilitatem declinationis Lunæ, itemque ob actionem Solis, iste motus perpetuò turbatur, atque insuper motûs maris horizontalis nulla adhuc habita est

ratio, faciliè intelligitur, tam fluxus quàm refluxus tardiùs venire debere, quàm quidem ex his formulis sequitur.

§. 85. Bini ergo unâ Lunæ revolutione contingent fluxus, alter si Luna super horizonte ad meridianum appellit, alter si sub Terra; priori casu est $\cos. z = 1$, et $\cos. 2z = 1$, hoc itaque tempore mare supra libellam C elevabitur per spatium $\frac{g(3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2)}{2h} + \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} + \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$

Dum autem Luna sub horizonte meridianum attingit, tum aqua elevabitur per spatium $\frac{g(3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2)}{2h} + \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$,

propter $\cos. z = -1$ ac $\cos. 2z = 1$ hoc casu: harum igitur altitudinum differentia est $= \frac{12pqPQ}{h(1-2g)}$: atque mare in transitu Lunæ per

meridianum supra horizontem altiùs elevatur, si declinatio Lunæ sit borealis; contrà verò si declinatio fuerit australis, major maris elevatio respondebit appulsui Lunæ ad meridianum infra horizontem. Lunâ verò in ipso æquatore versante, ambo fluxus inter se erunt æquales. Ratione autem elevationis poli, horum binorum fluxuum successivorum inæqualitas erit maxima sub elevatione poli 45° . pro his enim regionibus fit pP maximum; atque in aliis regionibus eò minor erit inæqualitas, quò magis fuerint a latitudine 45° . remotæ. Mare autem maximè deprimetur, si fuerit $\cos. z = \frac{-PQ(1-8)}{pq(1-2g)}$; quo valore substituto, reperietur aqua infra

libellam C subsidere per spatium $= \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{g(3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2)}{2h} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$; omnino igitur aqua in æstu movebitur per spa-

tium $= \frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, quorum signorum ambiguum superius + valet si Luna super horizonte, alterum verò — si Luna sub horizonte in fluxu meridianum attingit.

§. 86. Si aqua inertiâ careret, tum superiore Lunæ transitu per meridianum elevaretur supra libellam C per spatium $= \frac{3(pq + PQ)^2 - 1}{h} g$,

inferiori verò transitu per meridianum elevaretur ad altitudinem $\frac{3(pq - PQ)^2 - 1}{h} g$, quarum altitudinum discrimen est $= \frac{12gpqPQ}{h}$;

ita ut discrimen admissâ inertiâ majus sit parte circiter octavâ, quàm idem discrimen si inertia tollatur. Maximè autem deprimetur aqua

sublatâ inertîâ, si fuerit $\cos. z = \frac{-PQ}{pq}$, tumque infra libellam erit con-

stituta intervallo $= \frac{g}{h}$; ex quo spatium, per quod æstus maris fit sublatâ

inertîâ, prodit $= \frac{3p^2q^2 + 3P^2Q^2 \pm 6pqPQ}{h} g$; cùm igitur idem

spatium concessâ inertîâ, sit $\frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)} +$

$\frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, erit excessus hujus spatii super illud $= \frac{24g^2p^2q^2}{h(1-8g)}$

$- \frac{12g^2P^2Q^2(1+g)}{h(1-2g)^2} \pm \frac{12g^2pqPQ}{h(1-2g)}$. Fieri ergo potest ut spa-

tium, in quo æstus maris continetur, majus sit sublatâ inertîâ, quàm si

ea aquæ tribuatur, id quod eveniet si $\frac{P^2Q^2(1+g)}{(1-2g)^2} > \frac{2p^2q^2}{1-8g}$ vel

$\frac{PQ}{pq} > \frac{(1-2g)\sqrt{2}}{\sqrt{(1+g)(1-8g)}}$, hoc est $\frac{PQ}{pq} > \sqrt{\frac{256}{95}}$, posito $g = \frac{1}{8}$;

quod verò si evenit, Luna ne quidem horizontem in cursu diurno attingit,

ac propterea aquam non deprimit. Ex quo sequitur æstum ubique ab

inertîâ aquæ augeri: erit autem ad usum magis accommodatè spatium

A B, per quod mare agitur, ita expressum ut sit $AB = \frac{3g}{h(1-8g)} \times$

$(pq \pm \frac{PQ(1-8g)}{1-2g})^2$, ubi signorum ambiguum superius transitum

Lunæ per meridianum super horizonte, inferius verò sub horizonte

respicit.

§. 87. Cùm sit $\frac{3g}{h} = 3,372$ pedum, Lunâ mediocrem a Terrâ distan-

tiam tenente, atque g sit circiter $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{8}$; erit posito $g = \frac{2}{3}$ spatium

$AB = \frac{2}{3} (pq \pm \frac{1}{3} PQ)^2$, 3,372 pedum; at facto $g = \frac{1}{8}$, erit spatium

$AB = \frac{2}{3} (pq \pm \frac{1}{8} PQ)^2$, 3,372 pedum. Ex his colligitur æstum fore

maximum pro eadem elevatione poli, si fuerit tangens declinationis Lunæ

$= \frac{1}{3} \frac{P}{p}$ casu $g = \frac{2}{3}$ vel $= \frac{5}{8} \frac{P}{p}$ casu $g = \frac{1}{8}$: horum autem casuum prior

veritati magis videtur consentaneus, atque hanc ob rem valorem $g = \frac{2}{3}$

retineamus: hinc igitur sequitur sub æquatore æstum fore maximum si

Luna nullam habeat declinationem, atque simul pro quaque regione de-

clinatio Lunæ poterit assignari, cui maximus æstus respondeat: uti ex

adjuncto laterculo apparet.

Elevatio Poli. Declinatio			Elevatio Poli. Declinatio			Elevatio Poli. Declinatio		
0°.	0°.	0'.	30°.	13°.	54'.	60°.		_____
5°.	2°.	8'.	35°.	16°.	42'.	65°.		_____
10°.	4°.	19'.	40°.	19°.	46'.	70°.		_____
15°.	6°.	33'.	45°.	23°.	11'.	75°.		_____
20°.	8°.	52'.	50°.	27°.	3'.	80°.		_____
25°.	11°.	18'.	55°.	maxima.		85°.		_____

In locis ergo ultra 45°. ab æquatore remotis æstus erit maximus, si Luna maximam obtineat declinationem, si quidem fuerit $g = \frac{1}{2}$, ac si per observationes constet cuinam Lunæ declinationi maximus æstus respondeat, tum inde valor litteræ g innotescet: quoniam autem sub elevatione poli 50°. æstus maximi nondum maximæ declinationi respondere observantur,

ponamus id evenire sub elevatione poli 60°. reperietur $\frac{1-8g}{1-2g} = \frac{1}{2}$

atque $g = \frac{1}{10}$, unde ipsius g tutò hi limites constitui posse videntur $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{18}$; ex hac verò hypothesi valor $\frac{1}{10}$ multo propiùs ad veritatem accedit; interim tamen etiamnum nil definimus, sed observationes hunc in finem sollicitè institutas expectamus.

§. 88. Quòd si autem ponamus $g = \frac{1}{10}$, tum bini æstus successivi, dum Luna in maximâ declinatione versatur, eò magis ad æqualitatem perdcentur, quò ipsa theoria ad experientiam propiùs accedit; cum enim si horum binorum æstuum major ad minorem uti $\left(pq + \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$

ad $\left(pq - \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, hæc ratio eò propiùs ad æqualitatem accedet,

quò minor fuerit fractio $\frac{1-8g}{1-2g}$, fit autem hæc fractio $= \frac{1}{2}$ si ponatur

$g = \frac{1}{10}$. Hæc itaque hypothesi erit quantitas æstus majoris =

$(pq + \frac{1}{2}PQ)^2$. 16. 86 pedum minoris verò $= (pq - \frac{1}{2}PQ)^2$. 16.

86 pedum. At inter hos binos æstus aqua humillima non medium inter-

jacet, sed minori est vicinior, neque tamen tantâ inæqualitate binos

fluxus dirimit, quàm fieret, si ima aqua Lunæ horizontali responderet.

Si enim tempus medium inter binos fluxus ponatur z , erit cos. $z = 0$, at

temporis, quo refluxus fluxum majorem insequitur, cosinus est =

$-\frac{PQ}{4pq}$, ejusque ergo intervalli a tempore medio sinus est $= \frac{PQ}{4pq}$, quæ

expressio adeo sub elevatione poli 60°. pro maxima Lunæ declinatione

28°. tantum fit $= 13°$. unde refluxus a tempore inter fluxus medio circiter

54' aberrabit: minor verò erit aberratio, quò propiùs cùm regio Terra

tùm Luna ad æquatorem versentur, id quod cum experientiâ mirificè convenit. Quoniam autem hæc ex valore ipsius *g* assumpto consequuntur, imprimis notari oportet, litteram *g* non posse absolutè determinari, sed ejus quantitatem, quippe quæ mobilitatem totius oceani spectat, cùm ab extensione tùm etiam profunditate maris pendere; ex quo variis in locis hæc eadem littera *g*, varias significationes sortietur.

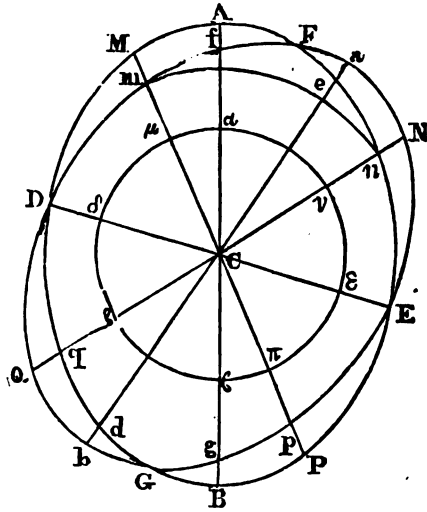
§. 89. Ex solutione horum duorum Problematum, quæ quidem in se spectata non solum sunt attentione digna, sed etiam cùm analysin tùm etiam motûs scientiam amplificant, quamvis ea casum propositum non penitus exhauriant, tamen motus in præcedentibus Capitibus definitus multò magis cum experientiâ conciliatur, id quod theoriæ nostræ jam insigne addit firmamentum. Simili autem modo vis a Sole profecta cum inertîâ aquæ potest conjungi, atque æstus maris definiri, quâtenus a solâ vi Solis oritur, quibus duobus effectibus conjungendis judicare licebit, quantus æstus quovis tempore et quovis loco debeat evenire. In hoc quidem Capite cogitationes adhuc ab omnibus obstaculis a Terrâ et littoribus oriundis prorsus abstrahimus, atque universam Terram undiquaque aquâ circumfusam ponimus; ex quo regulas hinc natas præcipuè ejusmodi observationibus, quæ in amplissimo oceano apud exiguas Insulas sunt institutæ, conferri conveniet. Quoniam autem nondum motûs aquæ progressivi, quo alternativè ad loca, in quibus fluxus et refluxus accidit, progreditur et recedit, rationem habuimus, necesse est ut etiam hunc motum et phænomena inde orta contemplemur. Ac primò quidem facîle intelligitur, cùm ob inertiam aquæ tùm etiam alia impedimenta motui opposita, aquam tam tardiùs elevari quàm deprimi oportere, quàm ex allatis hactenus consequitur: unde fluxus non ad transitus Lunæ per meridianum contingent, sed aliquanto seriùs evenient, omnino uti experientia testatur.

§. 90. Hæc autem retardatio præcisè ad calculum revocari non potest, quia a motu aquæ ejusque profunditate plurimum pendeat, prouti etiam videmus in diversis locis eam vehementer esse diversam, atque aliis locis fluxum contingere post Lunæ culminationem tribus horis nondum elapsis, aliis verò locis plus quàm duodecim horis tardiùs venire, quæ quidem insignis retardatio Terrarum positioni est adscribenda; interim tamen hinc sufficienter constat motum maris admodum posse impediri. Pro eodem verò loco satis luculenter perspicitur, quò major atque altior fluxus evenire debeat, eò tardiùs eundem accidere oportere. Quòd si enim æstus contingat infinitè parvus, dubium est nullum, quin is stato tempore adveniat, cùm impedimentis hoc casu ne locus quidem concedatur agendi:

unde dilucidè sequitur æstus eò tardiùs advenire debere, quò sint majores. Atque hoc ipsum experientia confirmat, quâ constat æstus majores, qui circa novilunia ac plenilunia contingunt, tardiùs insequi transitum Lunæ per meridianum, quàm æstus minores, qui circa quadraturas contingunt. Cùm enim Luna in quadraturis circiter 6 horis tardiùs respectu Solis per meridianum transeat, quàm in syzygiis, æstus tamen non 6 horis tardiùs, sed tantum circiter 5½ horis tardiùs accidit. Videtur verò etiam calculus, qui pro utraque vi Solis ac Lunæ conjunctim institui potest simili modo, quo pro solâ vi Lunæ fecimus, ejusmodi retardationem majorem in syzygiis quàm in quadraturis indicare, etiamsi eum ob summas difficultates ad finem perducere non valuerimus; interim tamen satis planum est præcipuam ejus causam in ipsâ naturâ aquæ esse quærendam. Hæc autem allata ratio retardationis a Flamstedio maximè probatur, quippe qui observavit maximam retardationem non tam syzygiis luminarium, neque minimam quadraturis respondere, sed iis tempestatibus, quibus æstus soleant esse maximi et minimi, id quod demum post syzygias et quadraturas contingit.

§. 91. Ad hanc autem fluxuum a syzygiis ad quadraturas accelerationem, respectu transitus Lunæ per meridianum, ac retardationem a quadraturis ad syzygias, plurimùm quoque vis Solis conferre videtur. Suprà enim jam indicavimus post syzygias fluxum transitum Lunæ per meridianum antecedere debere, ob Solem tum jam versùs horizontem declinantem; unde etiam, stabilitâ inertia, diebus novilunia ac plenilunia sequentibus æstus maris citiùs insequi debet transitum Lunæ per meridianum, quàm in ipsis syzygiis, id quod etiam observationes mirificè confirmant; inter fluxum enim quintum et sextum post syzygias retardatio respectu Solis tantum 17 minut. deprehenditur, cùm tamen Luna 24 minut. retardetur. Hanc ob rem a Sole determinatur æstus ad actionem virium magis exactè sequendam, quæ determinatio cùm duret usque ad quadraturas, mirum non est, quòd æstus tùm respectu Lunæ citiùs contingant, magisque ad calculum accedant. Contrarium evenit in progressu a quadraturis ad syzygias, quo tempore æstus a Sole continuò retardatur, hocque necessariò efficitur, ut tandem in ipsis syzygiis fluxus tardiùs insequatur Lunæ culminationem quàm in quadraturis. Hanc autem rationem cum magnitudine æstus conjungendam esse putamus ad hæc phænomena perfectè explicanda, sæpissimè enim in hac quæstione plures causæ ad eundem effectum producendum concurrunt; hoc autem est id ipsum quod calculus ille summoperè implicatus et molestus quasi per transennam ostendere visus est.

§. 92. Quò autem tam de his phænomenis quàm reliquis certiùs et solidiùs judicare queamus, ipsum motum progressivum, quem aqua ab aestu recipit, investigabimus. Cùm enim aqua eodem loco nunc elevetur, nunc subsidat, necesse est ut priori casu aqua aliunde affluat, posteriori verò ab eodem loco defluat, unde nomina fluxûs ac refluxûs originem traxerunt. Repræsentet igitur tempore quocunque figura A D B E statum aquæ totam Terram ambientis, ita ut in locis A et B aqua maximè sit elevata, in locis verò mediis ab A et B æquidistantibus, maximè depressa. Post aliquod tempus transferatur aestus summus ex A et B in a et b, sitque a D b E figura aquæ Terram circumdantis: hoc igitur tempore necesse est, ut a parte oceani D F defluerit aquæ copia F A M D m f, in partem verò F E tantundem aquæ affluerit, portio scilicet F a N E n e:

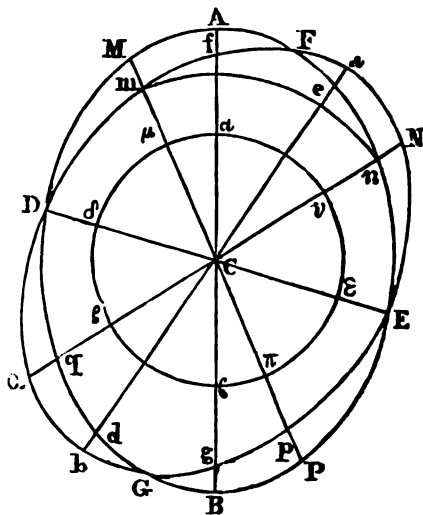


simili modo portio E G decrevit copia aquæ E P B G g p, portioque G D augmentum accepit G b Q D q d. Si nunc ponamus portionem F M m transire in locum F N n, ac portionem E P p in E N n deferri, satis clarè motum aquæ progressivum intelligere licebit. Cùm enim motus aquæ summæ A fiat ab ortu in occasum, aqua quæ circa A versùs orientem scilicet ab M ad N usque est sita, in occasum movebitur: similiterque ea quæ huic e diametro est opposita et spatium P Q occupat. Contrà verò reliqua aqua in M Q et N P contenta in ortum promovebitur. Verùm celeritas ubique non erit eadem; in punctis enim M, N, P et Q quippe limitibus inter motus versùs ortum et obitum, celeritas erit nulla, deinde ab M usque ad F crescet ubique ita ut incrementa celeritatis in punctis mediis ut A sint differentiis A f proportionalia: ab F verò usque ad N celeritas decrescere debet, et decrementum celeritatis in e erit ut a e; similique modo comparatus erit motus in reliquis portionibus figuræ propositæ.

§. 93. Si hæc diligentius prosequamur ac punctum a ipsi A proximum ponamus, reperiemus in loco quocunque M fore intervallum M m sinui dupli anguli M C A proportionale. Quare si anguli A C M sinus pona-

tur = x , cosinus = y , ac celeritas quam aqua in M habet, versùs occasum = u erit $d u$ ut $2 x y$. Cùm autem elementum arcùs $A M$ sit ut $\frac{d x}{g}$; nam figuram instar circuli considerari licet: erit $d u$ ut $2 x d x$,

atque u proportionale erit ipsi $2 x x - 1$ ejusmodi adjecta constante, ut ubi $M m$ est maximum, ibi celeritas evanescat. Hanc ob rem erit celeritas in loco quocunque M , quam aqua versùs occidentem habebit, uti cosinus dupli anguli $M C A$. Maxima igitur aquæ celeritas versùs occidentem erit in iis locis, in quibus aqua maximè est elevata; huicque celeritati æqualis est ea, quæ aqua in locis ubi maximè est depressa, versùs orientem promoveatur; si quidem hæc in circulo fieri concipiamus, nam in sphæra motus aliquantum diversus erit, sed tamen hinc intelligi poterit. At in locis quæ ab A et B 45 grad.



distant, ob cosinum dupli anguli = 0, aqua omnino nullum habebit motum horizontalem. Ex his igitur non solum motus aquæ progressivus cognoscitur, quo alterna elevatio ac depressio producitur, sed etiam luculenter perturbationes, quæ a Terris, littoribus atque etiam a fundo maris proficisci possunt, perspiciuntur. Ceterum quanquam sectio nostra plana $A D B E$ æquatorem solum denotare videtur, tamen eadem ad parallelum quemvis significandum satis commodè adhiberi potest: quin etiam motus pro sphæra hinc satis distinctè colligi poterit, opere enim pretium non judicamus, per solidorum introductionem hanc rem cognitu tantò difficiliorem reddere.

§. 94. Eò minus autem hujus accuratæ inquisitioni insistemus, quòd celeritas progressiva insuper a profunditate maris pendeat. Quòd si enim ponamus $m n$ jam esse maris fundum, ita ut profunditas maris in M major non esset quàm $M m$, tam isti aquæ tantus motus inesse debet, quo ea, dum fluxus ex A in a transit, ex situ $n F M m$ in situm $m F N$ transferri posset. Hic autem motus quamvis sit difformis et per totam massam inæquabilis, tamen si tota translatio spectetur, totus motus e

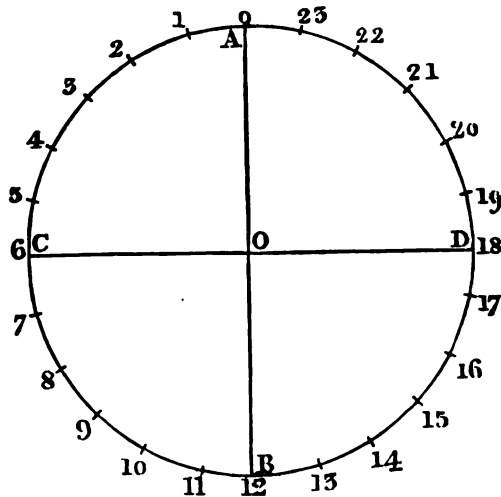
spatio a centro gravitatis interea percurso est æstimandus. Hoc igitur casu, quo Terræ superficiem solidam ad m n usque pertingere ponimus, reperietur centrum gravitatis massæ n F M m ferè æquè celeriter promoveri debere ac punctum A , ex quo ejus celeritas tanta esse deberet, quâ tempore unius horæ spatium ferè 15 graduum percurrere posset, quæ celeritas undique foret enormis ac stupenda. At si mari profunditatem majorem tribuamus, scilicet ad μ ν usque, tum illa celeritas multò fiet minor, decrescet namque in eadem ratione in qua profunditas crescit. Cum igitur celeritas maris, quæ antè in se spectata inventa est cosinui dupli anguli M C A proportionalis, eò fiat minor, quo majorem mare habeat profunditatem, tenebit ea in quoque loco rationem compositam ex ratione directâ cosinûs dupli anguli M C A atque ex inversâ profunditatis.

§. 95. Datur autem alius modus celeritatem maris horizontalem, positâ scilicet, ubique profunditate eâdem, determinandi, qui tamen ad diversas profunditates patet, si cum ratione inveniendâ conjungamus reciprocum profunditatum uti fecimus; deduciturque hic modus ex motu maris verticali, quo modò ascendit modò descendit, qui jam suprâ est definitus. Primò enim manifestum est, si mare ubique eâdem celeritate, (positâ profunditate ubique æquali) in eandem plagam promoveretur, tum etiam altitudinem mansuram esse eandem ubique, neque ullam mutationem in elevatione aquæ orturam esse. At si aqua motu inæquabili progrediatur, manifestum est iis in locis, ubi celeritas diminuitur, aquam turgescere atque adeo elevari debere, quoniam plus aquæ affluit quàm defluit; contrâ verò ubi celeritas aquæ crescat, ibi aquam subsidere oportere. Quare cùm elevatio et depressio maris a motûs progressivi horizontalis inæqualitate pendeat, licebit pro quovis loco hanc inæqualitatem definire, ex motu ascensûs et descensûs cognito. Cùm enim celeritas ascensûs sit decremento celeritatis progressivæ æqualis, celeritas descensûs verò incremento celeritatis progressivæ, ex dato motu verticali ratio motûs horizontalis definiri poterit. Invenimus autem suprâ §. 84, si Luna a meridiano versùs occasum jam recessit angulo z , hoc est cùm regio proposita ab eâ, in quâ aqua est summa, versùs orientem secundùm longitudinem distet angulo z , fore celeritatem quâ aqua ascendit =
$$\frac{-6 g p q P Q \sin. z}{h(1 - 2 g)} - \frac{3 g p^2 q^2 \sin. 2 z}{h(1 - 8 g)}.$$
 Quare cùm huic celeritati ascensûs proportionale sit decrementum motûs horizontalis, erit ipsa celeritas horizontalis versùs occasum ut
$$\frac{g(3 p^2 q^2 + 6 P^2 Q^3 - 2)}{2 h} +$$

$$\frac{6 g p q P Q \cos. z}{h (1 - 2 g)} + \frac{3 g p^2 q^2 \cos. 2 z}{2 h (1 - 8 g)}; \text{ hujus enim differentiale nega-}$$

tivè sumtum et per $d z$ divisum dat ipsam celeritatem ascensûs. Quoniam autem hæc expressio simul exhibet spatium, quo mare supra libellam elevatur, erit celeritas maris in quovis loco versûs occidentem proportionalis elevationi supra libellam, et inversè profunditati maris, quæ est vera regula pro motu maris, tam verticali quàm horizontali, definiendo; atque ita priori modo insufficienti supersedere potuissemus.

§. 96. Consideremus ergo motum, quo aqua tam verticaliter quàm horizontaliter promovetur a fluxu usque ad refluxum, indeque ad sequentem fluxum, idque sub æquatore, dum Luna pariter in æquatore versatur: erit itaque celeritas ascensûs ut $-\sin. 2 z$, celeritas autem horizon-



talis versûs occasum ut $15 \cos. 2 z + 1$ posito $g = \frac{1}{10}$, cui expressioni simul altitudo aquæ supra libellam est proportionalis. Quòd si ergo superficies Terræ seu perimeter æquatoris in 24 partes æquales dividatur, atque in locis A et B aqua sit maximè elevata, in C et D verò minimè, numeri 1, 2, 3, &c. designabunt ea Terræ loca in quibus ante unam vel duas vel tres vel, &c. horas lunares aqua maximè fuit elevata, tribuendo uni horæ lunari 62 minuta. In tabulâ ergo annexâ exhibetur motus tam verticalis, quàm horizontalis, ad singulas horas post fluxum elapsas.

<i>Horæ post Fluxum.</i>	<i>Celeritas Maris verticalis.</i>	<i>Celeritas Maris horizontalis.</i>
0	0,000 descendit.	1,067 in occasum.
1	0,500 descendit.	0,927 in occasum.
2	0,860 descendit.	0,567 in occasum.
3	1,000 descendit.	0,067 in occasum.
4	0,860 descendit.	0,432 in ortum.
5	0,500 descendit.	0,792 in ortum.
6	0,000 ascendit.	0,932 in ortum.
7	0,500 ascendit.	0,792 in ortum.
8	0,860 ascendit.	0,432 in ortum.
9	1,000 ascendit.	0,067 in occasum.
10	0,860 ascendit.	0,567 in occasum.
11	0,500 ascendit.	0,927 in occasum.
12	0,000 descendit.	1,067 in occasum.

Facile autem intelligitur pro regionibus ab æquatore remotis, præcipuè si Luna habeat declinationem, tum utrumque motum magis fore irregularem, atque mox ascensum citiùs absolvi mox verò descensum; totus autem motus faciliùs ex ipsis formulis datis cognoscetur. Hic denique profunditatem ubique eandem posuimus; quòd si enim esset diversa, motus horizontalis simul rationem inversam profunditatis tenebit.

§. 97. Denique antequam hoc Caput finiamus, notari oportet, neque maximos æstus iis ipsis temporibus evenire posse, quibus vires Solis et Lunæ maximè vigent, nec minimos æstus tum, cùm vis a Luna et Sole nata est debilissima, sed aliquanto tardiùs. Æstus enim magnitudo non solum a quantitate virium sollicitantium pendet, uti id usu veniret, si aqua inertia careret, sed insuper a motu jam antè concepto. Quòd si enim antè mare omnino quievisset, tum primus certè æstus oriundus admodum futurus esset exilis, etiamsi vires sollicitantes essent maximæ; sequentes verò æstus continuò crescerent, donec tandem post tempus infinitum magnitudinem assignatam obtinerent, si quidem vires sollicitantes idem robur perpetuò servarent: atque hoc idem evenire debet, si æstus præcedentes tantum fuerint minores, quàm is qui viribus sollicitantibus convenit. Quare cùm æstus novilunia ac plenilunia præcedentes sint minores, ii quidem his temporibus ab auctis viribus augebuntur, non verò subito totam suam quantitatem consequentur, atque hanc ob rem æstus etiamnum post syzygias augmenta accipient, donec ob tum secutura virium decrementa, æstus iterum decrescere incipiant. Ita tempore noviluniorum et pleniluniorum non tam ipsi æstus quàm incrementa eorum censenda sunt maxima, quatenus scilicet æstus præcedentes maximè deficiunt,

ab iis qui sequi deberent; ex quo manifestum est non illos æstus, qui in ipsis syzygiis luminarium contingunt, esse maximos, sed sequentes esse majores. Hocque idem intelligendum est de æstibus minimis, qui non in ipsas quadraturas incidunt, sed tardiùs sequuntur: unde ratio luculenter perspicitur, cur æstus tam maximi quàm minimi non ipsis syzygiarum et quadraturarum tempestatibus respondeant, sed seriùs observentur, tertii scilicet demum vel quarti post hæc tempora.

CAPUT SEPTIMUM.

Explicatio præcipuorum Phænomenorum circa Æstum Maris observatorum.

§. 98. IN præcedentibus Capitibus fusiùs exposuimus effectus, qui in mari a viribus illis duabus, quarum altera versùs Lunam est directa, altera versùs Solem, produci debent; eosque cùm per calculum analyticum, tum per solida ratiocinia ita determinavimus, ut de eorum existentia dubitari omnino non liceat, si quidem illæ vires admittantur. At verò istas vires in mundo existere non solum per alia phænomena evidentissimè probavimus, sed etiam earum causam physicam assignavimus, quam in binis vorticibus, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam sit constitutus, posuimus, quippè quæ est unica ratio cùm gravitatem tum etiam vires, quibus planetæ in suis orbitis circa Solem continentur, explicandi. Quin etiam hæc ipsa phænomena internam vorticum structuram et indolem commonstrarunt; ob eaque vortices ita comparatos esse statuimus, ut vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum a centris eorundem. Quare cùm in his viribus nihil gratuitò assumserimus, si effectus ex iis oriundi cum phænomenis æstûs maris conveniant, certissimè nobis persuadere poterimus, in assignatis viribus veram æstûs maris causam contineri; absonumque omninò fore, si causam æstûs maris in aliis viribus imaginariis anquirere vellemus. Quamobrem in hoc Capite constituimus omnes effectus, qui in superioribus Capitibus sparsim sunt erui, conjunctim et ordine proponere, summumque eorum consensum cum experientiâ declarare. Quoniam autem nondum impedimentorum a littoribus Terrisque oriundorum rationem habuimus, faciliè intelligitur, hinc excludi adhuc debere ejusmodi anomalias æstûs maris, quæ evidentissimè a Terris contingentibus ortum habeant, cujusmodi sunt æstus vel vehemen-

ter enormes vel vix sensibiles, uti in Mari Mediterraneo, vel insignes retardationes eorum, quibus rebus explicandis sequens Caput ultimum destinavimus: ita in hoc Capite tantum ea æstus maris phænomena explicanda suscipimus, quæ in portibus amplissimum oceanum respicientibus vel insulis observari solent in oceano sitis.

§. 99. Si omnes proprietates, quibus fluxus ac refluxus maris præditus esse observatur, distinctè enumerare atque exponere velimus, deprehendemus eas ad tres classes revocari debere. Ad primam scilicet classem referenda sunt phænomena, quæ in uno æstu in se spectato conspiciuntur, cum ratione temporis tum etiam ratione quantitatis; hæcque phænomena commodissimè sub varietatibus diurnis comprehendi possunt, quatenus ea se offerunt observatori, qui per integrum tantum diem observationes instituit, neque ea cum aliis phænomenis aliis temporibus occurrentibus comparat. Secunda classis complectitur varietates menstruas, quæ sese observatori per integrum mensem æstum maris contemplanti offerunt, quorsum pertinent æstus maximi minimique, item retardationes modò majores modò minores. Tertia denique classis comprehendit varietates annuas ac plusquam annuas, quæ sequuntur vel varias Lunæ a Terrâ distantias, vel Solis; vel etiam luminarium declinationem. Hanc ob rem phænomena uniuscujusque classis recensebimus, atque quomodo singula cum theoriâ traditâ congruant, ostendemus. Hic verò, ut jam est monitum, a perturbationibus quæ a Terris ac littoribus provenire possunt, animum prorsus abstinemus, eas sequenti Capiti reservantes. Multò minus verò ad ventum hîc respicimus, quo æstus maris cum ratione magnitudinis tum temporis plurimum affici observatur; sed tantum ejusmodi phænomena explicare hîc conabimur, quæ memoratis perturbationibus minimè sint obnoxia.

§. 100. Quod igitur ad primam classem attinet, præcipuum phænomenum in hoc consistit, quòd ubique in amplissimo oceano quotidie bini maris fluxus seu elevationes, binique refluxus seu depressiones observentur, atque tempus inter binos fluxus successivos circiter 12. hor. 24'. deprehendatur. Huic verò phænomeno, si ulli alii, per theoriam nostram plenissimè est satisfactum, ubi ostendimus maximam aquæ elevationem deberi transitui Lunæ per meridianum tam supra quàm infra Terram: ex quo cum Luna unâ revolutione diurnâ bis ad ejusdem loci meridianum appellat intervallo temporis circiter 12 hor. 24'. necessariò sequitur unâ revolutione Lunæ circa Terram binos fluxus tanto tempore a se invicem dissitos oriri debere, quemadmodum hoc ipsum calculus tam pro hypothese aquæ inertîæ carentis, quàm admissâ inertîâ, clarissimè indica-

vit. Simul autem ex iisdem determinationibus intelligitur sub ipsis polis nullum omnino æstum dari diurnum, in regionibus verò a polis non procul remotis, ubi luminaria vel non oriuntur vel non occidunt, quotidie unum tantum fluxum unicumque refluxum contingere debere; quæ consequentia theoriæ, etsi observationibus nondum satis est comprobata, tamen quia ex iisdem principiis sequitur quæ institutis observationibus satisfaciant, nulli amplius dubio subjecta videtur. In locis autem æquatori propioribus, quibus quotidie bini fluxus totidemque refluxus eveniunt, momentum, quo aqua maximè deprimitur non satis exactè medium interjacere observatur inter fluxuum momenta, sed mox priori mox posteriori est propius, quod phænomenum cum nostrâ theoriâ apprimè congruit; ostendimus enim momentum refluxûs non exactè tempori medio inter fluxus respondere, nisi vel locus situs sit sub æquatore, vel Lunæ declinatio fuerit nulla, sed modò priori modò posteriori fluxui esse propius.

§. 101. Secundum phænomenum huc redit, ut ubique locorum fluxus post transitum Lunæ per meridianum venire observetur, idque aliquot horarum spatio, in portibus versùs apertum oceanum patentibus. Nam in regionibus quæ cum oceano non liberrimè communicantur, sed ad quas aqua juxta littora deferri debet, multò tardiùs æstus advenit, quæ retardatio si ferè ad 12 horas ascendit, in causa esse solet, ut hujusmodi in locis fluxus ante transitum Lunæ per meridianum venire videatur. Ita ad Portum Gratiae videri posset fluxus 3 horis Lunæ culminationem antecedere, cum tamen, re benè consideratâ, a præcedente culminatione oriatur, atque adeò eam 9 ferè horis demum sequatur, uti apparebit si æstum momenta, quæ successivè ad littora Britanniae Minoris et Normanniae observantur continuòque magis retardantur, attentius inspiciantur. Deberet quidem ubique fluxus in ipsos Lunæ transitus per meridianum incidere, imò quandoque ob Solem præcedere, non solum demtâ inertia, sed etiam eâ positâ, si tantum aquæ motus verticalis spectetur; at si etiam motûs horizontalis ratio habeatur, tum dilucidè ostendimus fluxum perpetuò retardari, ac demum post Lunæ transitum per meridianum evenire debere. Tempus quidem hujus retardationis, cum sit admodum variabile pluribusque circumstantiis subjectum, non definivimus, interim tamen id ex §. 82. colligi poterit, remotis externis impedimentis: cum enim invenimus aquam propriâ vi gravitatis sese in situm æquilibrii recipere tempore $\frac{12}{n}$ horarum, ac numerum n esse circiter 5 vel 6, manifestum est

tanto etiam tempore opus esse, quo aqua eum situm quem vires intendunt, induat, ex quo fluxus circiter 2 horas vel $2\frac{1}{2}$ horas post transitum

Lunæ per meridianum contingere debet, id quod cum observationibus in oceano libero institutis egregiè convenit; hancque idcirco præcipuam hujus retardationis causam meritò assignamus.

§. 102. Tertium phænomenon suppeditat æstûs magnitudo, quæ autem tam diversis locis quàm diversis tempestatibus maximè est mutabilis. Interim tamen exceptis enormibus illis æstubus, qui nonnullis in portubus observari solent, reliqui cum nostrâ theoriâ egregiè consentiunt; inertîa enim sublatâ, invenimus sub æquatore maximum æstum fore per spatium circiter 4 pedum, ab inertia autem hoc intervallum augeri ita ut duplo, vel triplo, vel etiam quadruplo et plus fiat majus, prout valor ipsius g (vid. §. 82.) minor fuerit vel major, quippe qui a facultate oceani sese propriâ suâ vi in statum æquilibrii restituendi pendet; ex quo sub æquatore spatium per quod maximus æstus agitur ad 8, 12, 16 et plures pedes exurgere potest. In regionibus autem ab æquatore remotis invenimus magnitudinem æstûs tenere rationem duplicatam cosinuum elevationis poli, unde sub elevatione poli 45° , magnitudo æstûs circiter duplo erit minor quàm sub ipso æquatore; cujus veritas in locis a littoribus aliquot milliaria remotis per experientiam eximiè comprobatur. Deprehenditur enim ubique in locis a littoribus remotis æstus multò minor quàm ad littora; cujus discriminis causa in sequenti Capite dilucidè indicabitur. Quinetiam in medio mari plerumque æstus adhuc minor observatur, quàm hæc regula requirit; id autem ostendetur a non satis amplâ oceani extensione secundum longitudinem proficisci, quemadmodum in Oceano Atlantico qui versùs occidentem littoribus Americæ; versùs orientem verò littoribus Africæ et Europæ terminatur, quæ amplitudo non est satis magna, ut integram æstûs quantitatem suscipere queat.

§. 103. Quartum phænomenon varietates menstruas respicit, atque ostendit æstus, qui circa plenilunia et novilunia contingunt, inter reliquos ejusdem mensis esse maximos, æstus verò circa quadraturas luminarium minimos; quæ inæqualitas cum theoriâ nostrâ ad amussim quadrat. Cum enim æstus maris non solum ab eâ vi, quæ vortici Lunam ambienti competit, oriatur, sed etiam a vi Solem spectante pendeat, quæ ceteris paribus circiter quadruplo minor est vi Lunæ, manifestum est æstum maris maximum esse debere, si ambæ vires inter se conspirent, atque aquam simul vel elevent vel deprimant, id quod accidere ostendimus tam pleniluniis quàm noviluniis. Deinde simili modo, quoniam istæ vires inter se maximè discrepant in quadraturis, quibus temporibus dum aqua a Lunâ maximè elevatur, simul a Sole maximè deprimitur ac vicissim, perspicuum est iisdem temporibus æstum minimum esse debere. Præterea

verò ipsum discrimen cum theoriâ exactè convenit; in pluribus enim portubus æstus maximos et minimos ad calculum revocavimus, atque ex relatione eorum relationem inter vires Lunæ ac Solis investigavimus; hincque perpetuò eandem ferè rationem inter vires Solis ac Lunæ absolutas elicuimus, quemadmodum id fecit Newtonus ex observationibus Bristolii et Plymouthi, nos verò in Portu Gratiae institutis, conclusionibus mirificè inter se congruentibus: qualis consensus profectò expectari non posset, si theoria veritati non esset consentanea. Neque etiam aliæ theoriæ adhuc productæ, cujusmodi sunt Galilæi, Wallisii atque Cartesii, qui causam in pressione Lunæ collocavit, huic phænomeno perfectè satisfaciunt, sed potiùs prorsùs evertuntur.

§. 104. Quintum phænomenon in hoc consistat, quòd unius mensis intervallo maximi æstus non sint ii, qui novilunia ac plenilunia proximè insequuntur, sed sequentes tertii scilicet circiter vel quarti, similique intervallo æstus minimi demum post quadraturas contingunt. Hujus autem phænomeni ratio in §. 97. fusiùs est exposita, ubi ostendimus, cùm æstus ante syzygias incidentes essent minores, maximam vim a Sole et Lunâ ortam non subito æstum maximum producere valere, sed tantùm mare ad eum statum sollicitare. Cùm igitur post syzygias vis æstum efficiens sensibiliter non decrescat, æstus etiamnum post hoc tempus incrementa capiet, atque ideo demum post syzygias fiet maximus; similisque est ratio diminutionis æstuum, quæ etiamnum post quadraturas contingere debet, ita ut æstus minimi demum post quadraturas eveniant. Hujusmodi autem retardationes effectuum a viribus in mundo existentibus provenientium quotidie abundè experimur: ob similem enim rationem singulis diebus maximum calorem non in ipso meridie sentimus, etiamsi hoc tempore vis Solis calefaciens sine dubio sit maxima, sed demum aliquot horis post meridiem, atque propter eandem causam neque solstitii æstivi momento maximus calor annuus sentitur, neque tempore solstitii hyberni frigus summum, sed utrumque notabiliter tardiùs.

§. 105. Sextum phænomenon in hoc ponimus, quòd momenta fluxuum tempore syzygiarum multo strictiùs ordinem tenere observantur, quàm circa quadraturas. Hic verò ante omnia animadvertendum est præcipuam sensibilem anomaliam in momentis æstuum inde originem trahere, quòd hæc momenta ex tempore solari atque a vero meridie seu transitu Solis per meridianum soleant computari, cùm ea potiùs a transitu Lunæ per meridianum pendeant. Quòd si autem ad has observationes tempus lunare a transitu Lunæ per meridianum computandum adhibeatur, irregularitates apparentes maximam partem evanescent, hoc verò multò magis

in fluxibus circa syzygias quàm quadraturas: in quadraturis enim quoniam, dum Luna per meridianum transit, Sol non semper in horizonte versatur, sed vel ad horizontem demum accedit vel jam ab eo recedit, necesse est ut illo casu fluxus citius, hoc verò tardiùs contingat: quod discrimen cùm partim ab elevatione poli, partim a declinatione luminarium pendeat, momenta fluxuum in quadraturis magis irregularia reddit: interim tamen habità harum circumstantiarum ratione satis propè definiri potest. Circa tempora fluxuum autem, qui in noviluniis ac pleniluniis incidunt, hæc sola correctio seu reductio ad transitum Lunæ per meridianum omnem ferè anomaliam tollit, quorsum spectat regula a celeb. Cassino in Mem. 1710. tradita, quâ pro totidem horis, quibus plenilunium seu novilunium vel ante meridiem vel post incidit, totidem bina minuta ad tempus fluxûs medium vel addere vel ab eo subtrahere jubet, quippe quæ ex motu Lunæ est petita. Interim tamen hâc correctione adhibitâ aliqua anomalia superesse deprehenditur, cujus autem ratio ex nostrâ theoriâ sponte sequitur. Quando enim syzygia ante meridiem celebratur, tum dum Luna per meridianum transit, Sol jam ante eum est transgressus, atque ideo jam horizonti appropinquat, ex quo necesse est ut fluxus citius eveniat, quàm prima regula sola adhibita indicat. Atque etiam idem in tabulis fluxuum Dunkerquæ et in Portu Gratiae observatorum, Mem. 1710. insertis, manifestò conspicitur: quando enim novilunium pleniluniumve pluribus horis ante meridiem accidit, tum fluxus citius advenisse observatur, quàm calculus Cassinianus indicabat; contrà verò tardiùs si syzygiæ demum pluribus horis post meridiem inciderint, cujus majoris retardationis causa in Sole tum adhuc ab horizonte recedente est quærenda.

§. 106. Septimum phænomenon suppeditat diversa retardatio fluxuum in syzygiis luminarium et quadraturis respectu appulsûs Lunæ ad meridianum; tardiùs scilicet ubique locorum fluxus, qui in syzygiis contingunt, insequuntur culminationem Lunæ, quàm ii, qui circa quadraturas veniunt. Hujus autem phænomeni duplex causa potest assignari, quarum prima a solâ quantitate æstuum petitur, quia enim æstus syzygiarum multò sunt majores quàm æstus quadraturarum, consentaneum videtur illos tardiùs venire quàm hos. Altera verò causa quæ hoc phænomenon multò distinctiùs explicat, nullique dubio locum relinquit, nostræ theoriæ omnino est propria, priorique longè est præferenda. Ponamus enim t esse tempus, quo in noviluniis ac pleniluniis fluxus post appulsum Lunæ ad meridianum venire solet; sequentibus igitur diebus hoc tempus t continuò diminuetur, quia tum Sol, dum Luna in meridiano versatur,

mare jam deprimit; quæ diminutio cum duret ferè usque ad quadraturas, necesse est ut his temporibus fluxus multò citiùs post culminationem Lunæ sequantur, viribusque sollicitantibus magis obtemperent, uti hoc fusiùs §. 91. explicavimus, unde tempus retardationis in quadraturis tantum erit $t - \theta$. Post quadraturas autem Sol exerit contrarium effectum, atque adventum fluxûs continuò magis retardat, idque æquali modo, quo antè acceleraverat, ex quo usque ad sequentem syzygiam intervallum $t - \theta$ iterum ad t usque augebitur. Hujusque phænomeni solius explicatio sufficere posset ad veritatem theoriæ nostræ evincendam, cum id omnibus aliis theoriis explicatu sit insuperabile; neque a nemine adhuc saltem probabilis ejus causa sit assignata.

§. 107. Octavum phænomenon petamus ex inæqualitate duorum fluxuum sese immediatè insequentium, quorum alter transitui Lunæ superiori per meridianum respondet, alter inferiori, quæ inæqualitas maximè observatur in regionibus ab æquatore multum remotis, ac tam cum Lunæ declinatio est maxima. Theoria quidem declarat Lunam, etiamsi in ipso æquatore versetur, tamen majori vi gaudere ad mare movendum, quando super horizonte meridianum attingit, quàm infra horizontem; at discrimen sub æquatore tam est exiguum, ut vix in sensus occurrere queat, integrum enim digitum non attingit (§. 41.); atque in regionibus ab æquatore remotis fit multò minus. Vera igitur hujus phænomeni ratio in altitudine Lunæ meridianâ seu distantia ab horizonte continetur; hinc enim sequitur quò major fuerit differentiâ inter distantias Lunæ ab horizonte, dum per meridianum transit tum super horizonte tum sub horizonte, eò majorem esse debere differentiam inter binos fluxus successivos, ex quo perspicuum est istam differentiam versùs polos continuò crescere debere, si quidem Luna habeat declinationem. Quòd si ergo Luna habuerit declinationem borealem, tum in regionibus septentrionalibus fluxus erit major qui transitum Lunæ per meridianum superiorem sequitur, alter verò sequens, qui transitui inferiori respondet, minor. Contrà autem si Lunæ declinatio fuerit australis, appulsui Lunæ ad meridianum superiori fluxus succedet minor, inferiori verò major; hancque differentiam Flamstedius observavit diligenter, nullumque est dubium, quin ea per copiosissimas observationes, quas Academia celeberrima Regia Parisina collegit, omnino confirmetur. In hoc autem negotio indoles fluxuum probè est inspicienda, quoniam aliquibus in portibus tantopere retardantur, ut sequentibus Lunæ transitibus per meridianum sint propiores, quàm illi, cui suam originem debent; ita Dunkerquæ circa syzygias fluxus circiter meridie observari solet, neque verò illi ipsi

transitui Lunæ per meridianum est tribuendus qui eodem tempore fit, sed præcedenti, prouti successiva retardationis incrementa ad littora Galliæ et Belgii borealia evidentissimè testantur. Quare si verbi gratiâ Dunkerquæ quis hujusmodi observationes perlustrare voluerit, is quemque fluxum non cum transitu Lunæ per meridianum proximo comparet, sed cum eo qui propemodum 12 horis antè contigit; alioquin enim contraria phænomena esset deprehensurus.

§. 108. Commodus hîc nobis præbetur locus explicandi transitum a binis æstibus, qui quotidie in regionibus extra circulos polares sitis eveniunt, ad singulos æstus, qui secundùm theoriam nostram in regionibus polaribus contingere debent. Quoniam enim theoria nostra monstrat, in zonis temperatis et torridâ quotidie duos fluxus observari debere, in zonis frigidis autem unum tantum, transitio subitanea a binario ad unitatem maximè mirabilis ac paradoxa videri posset. Sed quia, si fluxus bini successivi inter se sunt inæquales, refluxus aquæ seu maxima depressio fluxui minori est vicinior, bini æstus quoque successivi ratione temporis inter se erunt inæquales, si quidem voce æstûs intelligamus motum aquæ a summâ elevatione ad imam depressionem usque, ac vicissim. Quò magis itaque ab æquatore versûs polos recedatur, eò major deprehendetur inter binos æstus successivos inæqualitas, cùm ratione magnitudinis tùm temporis, major enim diutiùs durabit quàm minor, ambo verò simul ubique absolventur tempore 12 horarum, cum 24'. circiter: quòd si itaque in eas regiones usque perveniatur, in quibus Luna utrâque vice vel super horizonte vel sub horizonte meridianum attingit, æstus minor omnino evanescet, solusque major supererit, qui tempus 12 h. 24'. adimplebit. Ex quibus perspicuum est, si Luna habeat declinationem, inæqualitatem binorum æstuum successivorum ad polos accedendo continuò fieri majorem, atque tandem minorem omnino evanescere debere, quod cùm evenit, bini æstus in unum coalescunt.

§. 109. Explicatis anomaliis æstûs maris menstruis, pervenimus ad anomalias annuas vel plusquam annuas, ac nonum quidem phænomenon desumimus ex variatione æstûs, quæ a diversis Lunæ a Terrâ distantîis proficiscitur. Observantur enim æstus ubique majores ceteris paribus, in iisdem scilicet luminarium aspectibus iisdemque declinationibus, si Luna in suo perigæo versetur, minores verò, Lunâ in apogæo existente. Egregiè autem hæc conveniunt cum nostrâ theoriâ, quâ demonstravimus Lunæ vires ad mare movendum decrescere in triplicatâ ratione distantiarum Lunæ a Terrâ: quòd si igitur Luna versetur in perigæo, fluxus debebunt esse majores, quàm si Luna apogæum occupat. Præterea etiam

tabula quam celeb. Cassini in Mem. 1713. pro diversis Lunæ a Terrâ distantis ex plurimis observationibus Brestiæ institutis collegit, satis accuratè cum theoriâ nostrâ conspirat, etiamsi enim pro Luna perigæa minorem elevationem aquæ tribuat, quàm ista ratio requireret, tamen discrimen valde est exiguum: quin etiam facilè concedetur Lunam perigæam totum suum effectum non tam citò consequi posse, quem consequeretur, si Luna perpetuò in perigæo versaretur. Aliter autem Luna apogæa est comparata, quæ ad diminuendum æstum maris tendit, cum enim mare ob inertiam et impedimenta ipsum ad diminutionem æstus sit proclive, sine ullâ resistantiâ Luna in apogæo constituta effectum suum exeret. Huc etiam pertinet, quod pariter celeb. Cassini se observasse testatur, similem differentiam etsi multò minorem a variis Solis a Terrâ distantis produci, id quod nostræ theoriæ non solum est consentaneum, sed inde etiam ipsa quantitas hujus differentiæ potest definiri.

§. 110. Denique decimum phænomenon sese nobis contemplandum offert, quo vulgò statui solet æstus tam noviluniorum quàm pleniluniorum, qui contingunt circa æquinoclia, cæteris esse majores, etiamsi observationes hanc regulam non penitus confirment; quomobrem videamus quomodo æstus cæteris paribus comparatus esse debeat pro diversis Lunæ declinationibus. Ac primò quidem ex nostrâ theoriâ (§. 87.) æstus dum Luna in æquatore versatur, maximos esse non posse, nisi in locis sub ipso æquatore sitis: atque eodem loco tabellam adjecimus, ex quâ patet, cuinam Lunæ declinationi maximi æstus respondeant. Ita pro elevatione poli 50° . æstus maximi incidunt Lunæ declinationi 27° . si quidem $g = \frac{2}{3}$; at posito $g = \frac{1}{10}$, quod probabilius videtur, prodit Lunæ declinatio maximum æstum producens circiter 16° . id quod mirificè convenit cum observationibus ad littora Galliæ septentrionalia institutis, quibus constat maximos syzygiarum æstus mensibus Novembri et Febuario accidere solere, quibus temporibus Luna ferè assignatam obtinet declinationem. At quod fortè illi regulæ, quâ Lunæ in æquatore versanti maximi æstus adscribi solet, ansam præbuisse videtur, est modus æstuum quantitates definiendi peculiaris ac satis perversus; cum enim crederent plerique observatores causis alienis tribuendam esse inæqualitatem, quæ inter binos æstus successivos intercedat, veram aquæ elevationem accuratiùs definire sunt arbitrari, si sumerent medium inter binos fluxus successivos. Quòd si autem hoc modo quique æstus æstimentur, tum utique maximi æstus in æquinoclia incidere observabuntur, id quod etiam nostræ theoriæ maximè est conforme, exceptis tantum regionibus polis vicinioribus. Cum enim positus sinu elevationis poli = P,

cosinu = p , sinu declinationis Lunæ = Q , cosinu = q , major æstus fiat per spatium $\frac{3g}{h(1-8g)} \left(pq + \frac{PQ(1-8g)}{1-2g} \right)^2$, minor verò per spatium = $\frac{3g}{h(1-8g)} \left(pq - \frac{PQ(1-8g)}{1-2g} \right)^2$, (§. 86.) erit per hunc

$$\text{æstum maris mensurandi modum} \quad \text{quantitas æstûs} = \frac{3g}{h(1-8g)} \left(p^2 q^2 + \frac{(1-8g)^2 P^2 Q^2}{(1-2g)^2} \right) = \frac{3g}{h(1-8g)} \left(p^2 - p^2 Q^2 + \frac{(1-8g)^2 P^2 Q^2}{(1-2g)^2} \right);$$

ex quâ expressione perspicitur maximos æstus ubique, si quidem modo recensito mensurentur, Lunæ in ipso æquatore degenti respondere, nisi sit $\frac{(1-8g)^2 P^2}{(1-2g)} > p^2$, hoc est nisi tangens ele-

vationis poli major sit quàm $\frac{1-2g}{1-8g}$: his scilicet regionibus etiam Luna

declinans ab æquatore majores æstus producet. At si ponatur $g = \frac{2}{3}$, prodit elevatio poli, ubi regula prolata fallere incipit, 66° ; sin autem ponatur $g = \frac{1}{3}$, fit elevatio poli major quàm 58° ; at posito $g = \frac{1}{10}$, provenit poli elevatio 76° . Cùm igitur in locis polis tam vicinis observationes institui non soleant, satis tutò affirmare licet, maximos æstus menstruos accidere circa æquinoclia, si quidem quantitas æstûs quotidie mensuretur per medium arithmeticum inter spatia, quæ duo æstus successivi conficiunt.

§. 111. Quid nunc aliud de theoriâ nostrâ sit sentiendum, nisi eam veram et genuinam æstûs maris causam, qualis ab illustrissima Academia Regia in propositâ quæstione desideratur, in se complecti, non videmus? Non solum enim omnia phænomena, quæ in æstu maris observantur, clarè et distinctè explicavimus, sed etiam existentiam actualem earum virium, quibus hos effectus adscribimus, evidentissimè demonstravimus; ex quo efficitur causam a nobis assignatam, non tantum omnibus phænomenis satisfacere, sed etiam esse unicam quæ cum verâ consistere queat. Quòd si enim quispiam alias vires excogitet, quibus æquè omnia phænomena explicare posset, etiamsi hoc fieri posse minimè concedamus, ejus certè explicatio subitò concideret et everteretur a viribus nostræ theoriæ, quas aliunde in mundo existere abundè constat; quoniam ab illis viribus imaginariis hisque realibus conjunctim effectus duplicatus consequi deberet, quem experientia aversatur. Nunc igitur nobis summo jure asserere posse videmur, veram æstûs maris causam in duobus vorticibus esse posi-

tam, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam agitetur, atque uterque ejus sit indolis, ut vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum a centrâ utriusque vorticis : quæ proprietas obtinetur, si celeritas materiæ subtilis gyantis in quoque vortice teneat rationem reciprocam subduplicatam distantiarum. Neque verò hi duo vortices ad libitum sunt excogitati, sed ille qui Solem circumdat est is ipse, qui omnes planetas in suis orbitis continet; alter verò Lunam circumdans, etsi ejus vis nisi in æstu maris non sentitur, tamen sine ullâ hæsitacione admitti potest, cum certò constet Terram, Jovem ac Saturnum similibus vorticibus esse cinctos, unde ejusmodi vortices nulli omnino corpori mundano denegari posse videntur. Parcîus quidem hic materiam de vorticibus tractavimus, etiamsi in illis veram æstûs maris causam ponamus; hoc autem de industriâ fecimus, cum hoc argumentum jam toties sit tractatum ac ferè exhaustum; neque nobis persuadere possumus, si hâc occasione doctrinam de vorticibus etiam meliùs, quam etiamnum a quoquam est factum, expediremus, ob eam rem præmium nobis tributum iri.



CAPUT OCTAVUM.

De Æstûs Maris perturbatione a Terris ac littoribus oriundâ.

§. 112. **P**ERVENIMUS tandem ad ultimam nostræ disquisitionis partem, quæ præcipua est, in quâ theoriam expositam ad statum Telluris, in quo reverâ reperitur, debito modo accommodabimus. Hactenus enim, quò ardua ista disquisitio facilior redderetur ab omnibus circumstantiis externis quibus effectus a viribus Solis ac Lunæ oriundis vel turbari vel determinatu difficiliore reddi possent, cogitationem abstraximus. Primò scilicet non solum totam Terram ex aquâ conflata posuimus, sed etiam inertiam aquæ mente sustulimus, ut eò pauciores res in computum decendæ superessent. Deinde inertie quidem habuimus rationem, ac præcedentes determinationes debito modo correximus, verum totam Terram aquâ undiquaque circumfusam assumimus, seu etiamnum anomalias a Terris negleximus. Nunc itaque nostra theoria eò est perducta, ut nihil ampliùs adjicere necesse foret, si quidem æstus maris a Terris littoribusque sensibiliter non afficeretur; nisi fortè anomalie quædam a ventis oriundæ commemorari deberent, quæ autem motu aquæ perspecto facile

adjudicantur, atque ad omnes theorias æquè pertinent. Quamobrem ultimum hoc Caput destinavimus explicationi phænomenorum quorundam singularium, quorum causa non tam in ipsâ aquâ viribusque eam sollicitantibus, quàm in Terrâ continenti littoribusque est quærenda: hac enim parte absolutâ nihil ampliùs restare videtur, quod vel ad theoriæ nostræ confirmationem, vel ad omnium phænomenorum adæquatam explicationem desiderari queat. Quamvis enim illustrissima Academia totum hoc argumentum non penitus exhaustiri jubeat, cùm adhuc nonnullas quæstiones de eodem in posterum proponere constituisset, tamen quia hoc tempore vera causa physica desideratur, veritatem nostræ theoriæ non satis confirmari arbitramur, nisi ejus convenientiam cum omnibus phænomenis dilucidè ostenderemus, cùm si vel unicum phænomenon refragaretur, eo ipso tota theoria subverteretur; quam ob causam prolixitatem nostræ tractationis, atque transgressionem limitum præscriptorum nobis sine difficultate condonatum iri confidimus.

§. 113. Primùm autem perspicuum est, motum maris horizontalem quo vel versùs orientem vel occidentem progreditur, ob Terram interpositam non solum perturbari, verùm etiam quandoque prorsus impediri debere. Suprà enim ostendimus, si tota Terra aquâ esset circumfusa, tum ubique ad fluxum formandum aquam ab oriente advehi debere, ante refluxum autem versùs ortum defluere. Quòd si ergo oceanus versùs orientem Terris terminetur, fieri omnino nequit tempore fluxùs ad hæc littora aqua ab oriente affluat, quo ipso cursus aquæ naturalis penitus impeditur. Quoniam autem vires Solis ac Lunæ nihilominùs his in regionibus mare attollere conantur, effectum consequi non poterunt, nisi aqua ab occidente afferatur: sic quando ad littora Europæ aqua a viribus Solis ac Lunæ elevatur, aqua ab occidente eò deferatur necesse est, ab iis scilicet regionibus, ubi aqua eodem tempore deprimetur; quod idem fieri debet ad littora Africæ et Americæ occidentalia. Contrà verò ad littora Asiæ et Americæ orientalia aqua naturali motu feretur, atque in fluxu ab oriente adveniet, in refluxu verò versùs orientem recedet. Vires namque Solis ac Lunæ motum aquæ horizontalem non per se determinant, sed cātenus tantum, quātenus aliis in locis aquam attollunt, aliis verò eodem tempore deprimunt; atque aqua ob propriam gravitatem eum seligit motum, quo facillimè a locis quibus deprimitur, ad loca quibus attollitur promoveatur: quamobrem iste motus maximè a Terris oceanum includentibus determinetur necesse est. Hinc igitur perspectâ positione littorum cujusvis maris facilè definiri poterit, a quamam plagâ aqua in fluxu venire, quorsumque in refluxu decedere debeat, si modò elevationes et

depressiones aquæ per totum mare attentè considerentur: tota enim hæc quæstio pertinebit ad hydrostaticam.

§. 114. Cùm igitur ad littora Europæ aqua elevari nequeat, nisi affluxus ab occidente fiat copiosus, ad littora quæ versùs occidentem respiciunt aqua directè ab occidente adveniet, quæ autem littora ad aliam plagam sunt disposita, aquæ cursus versùs orientem directus inflectetur juxta littora, priusquam eò pertingat, omnino uti inspectio mapparum docebit. Quoniam verò iste aquæ juxta littora fluxus tantam celeritatem, quantam habet Luna, recipere nequit, necesse est, ut fluxus ad littora magis ad orientem sita tardiùs advehatur. Hæc autem versùs littora orientiora retardatio maximè perspicua est in portubus Galliæ, Belgii, Angliæ, et Hiberniæ; cùm enim ad ostia fluviorum Garumnæ et Ligeris, quæ versùs oceanum amplissimum patent, tempore pleniluniorum ac noviluniorum fluxus adveniunt horâ tertiâ pomeridianâ, quæ retardatio naturalis censi potest, neque littoribus adhuc turbata; hinc aqua demum ad littora Britannici Minoris ac Normanniæ progreditur; atque idcirco his in regionibus fluxus tardiùs evenire observantur. Sic ad Portum S. Malo tempore syzygiarum fluxus demum horâ sextâ sequitur, ad ostia verò Sequanæ usque ad horam nonam retardatur: atque ita porro retardatio augetur, donec tandem in Freto Gallico Dunkerquæ et Ostendæ mediâ nocte incidat. Ex hac verò retardatione innotescit celeritas aquæ, quâ juxta littora progreditur, eaque tanta deprehenditur quâ unâ horâ spatium circiter (†) 8. milliarium conficiat. Denique aqua tantam fere viam absolvere debet usque ad Dublinum, quantam ad Fretum Gallicum, ex quo fluxus etiam Dublini horâ circiter decimâ pomeridianâ observari solet. Atque simili modo retardatio fluxuum ad littora aliarum regionum sine ullâ difficultate explicari poterit.

§. 115. Quod autem ad quantitatem æstûs maris ad littora attinet, facilè intelligitur æstum maris ad littora majorem esse debere, quàm in medio mari. Primò enim aqua cum impetu ad littora allidit, ex quo allapsu solo jam intumescencia oriri debet. Deinde quoniam aqua eadem celeritate, quam habebat oceano, ubi maxima est profunditas, progredi conatur, ad littora locaque vadosa vehementer inturgescet, tantum enim fere aquæ ad littora affertur, quantum sufficeret ad spatium, quod Terra occupat, inundandum. Tertiò iste aquæ affluxus in sinibus vadosis multò adhuc magis increscere debet, eò quòd aqua his in locis jam multum ap-

(†) Ita legitur in exemplari Parisino, procul dubio mendosè, sed locum restituere non sumus ausi; ab ostio Garumnæ ad Dublinum quingenta circiter Italica milliaria numerantur viâ

rectissimâ, quæ horis 7 a fluxu percurritur, qui ideo 70 milliaria singulis horis ad minimum emetiretur; unde 80 milliaria pro 800 scribenda conjectamur.

pulsa ad latera diffluere nequit, si quidem sinus directè versùs eam plagam pàteat, unde aqua advehitur. Ex his igitur non solum ratio patet, cur aqua fere ubique ad littora ad multo majorem altitudinem elevetur, quàm in medio mari, sed etiam cur Bristolii tam enormis fluxus circa syzygias luminarium observetur; cùm enim in hâc regione littus sit valdè sinuosum ac vadosum, aqua maximâ vi appellitur, neque ob sinuositatem tam citò diffluere potest. Atque ex his principiis non erit difficile rationem inconsuetorum æstuum, qui passim in variis portubus animadvertuntur, indicare atque explicare; quamobrem hujus generis phænomenis explicandis diutiùs non immoramur, cùm consideratio littorum et fluxûs aquæ eò sponte quasi manuducat.

§. 116. Quamvis autem tam affluxus aquæ ex Oceano Atlantico, quàm refluxus per Fretum Galliam ab Angliâ dirimens, ingenti fiat celeritate, tamen cùm versùs Belgium fœderatum mare mox vehementer dilatetur, ab isto alterno fluxu ac refluxu altitudo maris in Oceano Germanico sensibilibiter mutari nequit. Atque hanc ob causam statui oportet, in hoc mari æstum proficisci maximam partem ab affluxu et refluxu aquæ circa Scotiam, ubi communicatio hujus maris cum Oceano Atlantico multo major patet; quam sententiam magnopere confirmat ingens æstum retardatio ad littora Belgii et Angliæ orientalia observata: ad ostia scilicet *Thamisis* pertingit fluxus elapsis jam duodecim horis post transitum Lunæ per meridianum, atque Londinum usque tribus ferè horis tardiùs defertur; quod phænomenon consistere non posset si aqua per Fretum Gallicum solùm moveretur, cùm jam in ipso Freto duodecim horis retardetur fluxus. Interim tamen negari non potest quin communicatio Maris Germanici cum Oceano Atlantico per Fretum Gallicum æstum quodammodo afficiat, atque fluxum qui circa Scotiam advehitur vel adjuvet vel turbet, prout hi ambo motus ad mare elevandum ac deprimendum vel magis inter se conspirent vel minus. Simul autem hinc intelligitur æstum maris ex Oceano Atlantico neque cum Mari Mediterraneo neque cum Mari Baltico communicari posse, cùm intervallo sex horarum per Freta *Herculea* et *Oresundica* tantum aquæ in hæc maria neque affluere queat neque inde refluere, ut sensibilis mutatio in altitudine aquæ oriri queat. Quamobrem in istiusmodi maribus quæ a vasto oceano tantum angustis fretis separantur, æstus omnino nullus contingere potest, nisi forte talia maria Terris inclusa ipsa tam sint ampla, ut vires Solis ac Lunæ æstum peculiarem in iis producere queant; quâ de re mox videbimus.

§. 117. Quemadmodum autem vidimus in Mari Germanico duplicem

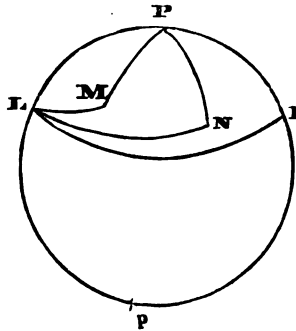
æstum, quorum alter, qui quidem longè est minor, per Fretum Gallicum, alter circa Scotiam advehitur ex eodem Oceano Atlantico: ita propter singularem littorum quorundam situm mirabilia phænomena in æstu maris evenire possunt. Quòd si enim littus quodpiam ita fuerit comparatum, ut æstus in id duplici viâ vel ex eodem oceano, vel ex diversis communicetur, ratione temporis, quo bini isti æstus adveniunt, insignes discrepantiæ oriri poterunt. Nam si per utramque viam fluxus eodem tempore advehatur, atque adeo simul refluxus congruant, æstus multo majores existere debebunt. Sin autem eo tempore, quo per alteram viam fluxus advenit, ex alterâ viâ refluxus incidat, tum æstus omnino destruetur si quidem per utramque viam aqua æqualiter vel affluat vel defluat. Ad hoc verò non sufficit ambæ viæ sint æquales, sed etiam requiritur ut bini æstus successivi sint æquales, id quod evenit si Luna vel non habeat declinationem, vel littus in æquatore fuerit positum. Quòd si autem eadem duplici communicatione positâ, tam Luna habeat declinationem, quàm littus notabiliter ab æquatore sit motum, tum ob inæqualitatem binorum æstuum sese insequentium, fluxus majores ex alterâ viâ advenientes, superabunt refluxus minores eodem tempore per alteram viam factos, atque hoc modo in tali littore singulis diebus non bini fluxus, sed unus tantum accidet; hancque rationem allegat Newtonus æstus illius singularis Tunquini observati, ubi si Luna in æquatore versatur, nullus æstus deprehenditur, sin autem Luna habeat declinationem, unus tantum unâ Lunæ revolutione circa Terram. Nos autem mox hujus mirabilis phænomeni aliam magis naturalem nostræque theoriæ conformem indicabimus causam.

§. 118. Hactenus æstum maris, quemadmodum in amplissimo oceano a viribus ad Lunam ac Solem tendentibus producat, atque vario littorum situ cùm ratione quantitatis tum retardationis diversimodè turbetur, sumus contemplati, neque necesse esse duximus ventorum marisque cursuum propriorum rationem habere: cùm satis pronum sit perspicere, quomodo his rebus æstus maris tam augeri vel diminui, quàm accelerari vel retardari debeat. Superest igitur ut exponamus, quomodo in satis amplo tractu maris, qui ab oceano vel omnino est sejunctus, vel per angustum tantum canalem conjunctus, peculiaris æstus a viribus Lunæ ac Solis produci queat. Perspicuum enim est, si talis tractus secundum longitudinem ultra 90 gradus pateat, æstum pari modo generari debere, ac in amplissimo oceano, qui totam Tellurem ambire ponitur. Nam quoniam extensio tanta est, ut vires Lunæ et Solis in eo tractu simul maximam ac minimam aquæ altitudinem inducere queant, necesse est

etiam, ut aqua alio in loco tantum eleuetur, inque alio tantum deprimatur, quantum fieret, si iste tractus omnino non esset terminatus. At si iste tractus tam fuerit parvus ut singulæ partes æqualibus fere viribus simul vel attollantur vel deprimantur, nulla sensibilis mutatio oriri poterit. Aqua enim uno in loco attolli nequit nisi in alio subsidat et contrà, si quidem eadem aquæ copia in eo tractu perpetuò conservetur. Atque hæc est ratio ut in Mari Baltico, Caspio, Nigro, aliisque minoribus lacubus nullus omnino æstus deprehendatur.

§. 119. Quòd si autem istiusmodi maris tractus tantum spatium occupet, ut vires attollentes et deprimentes in extremitatibus sensibilter differant, tum necesse est ut non solum aqua in altero extremo eleuetur in alteroque deprimatur, sed etiam ut differentia inter aquæ altitudines tanta sit, quanta in aperto oceano eidem virium differentię respondet. Quamobrem definiri conveniet, quanta in diversis Terræ locis eodem tempore in altitudinibus aquæ a viribus Lunæ ac Solis produci queat. Ne autem calculus nimium fiat prolixus, solam Lunæ vim in computum ducemus, quippe quæ vim Solis multum excedit; et quoniam effectum Lunæ cognito facile est Solis effectum æstimando vel adjicere vel auferre. Repræsentet ergo P L p l superficiem Terræ cujus poli

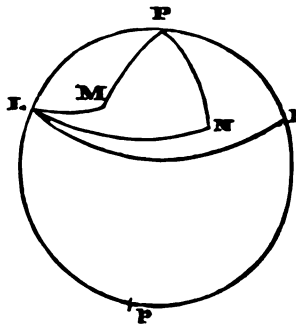
sint P et p, atque M et N sint duo termini in eodem maris tractu assumti, in quibus quantum maris altitudo quovis tempore differat, sit investigandum. Repræsentet porro L l parallelum, in quo Luna moveatur hoc tempore, sitque Luna in L; atque exprimet angulus L P M tempus, quod post Lunæ transitum per meridianum termini M est præterlapsus, angulus verò L P N tempus post transi-



tum Lunæ per meridianum alterius termini N. Ductis autem circulis maximis P M et P N, erit arcus P M complementum latitudinis loci M, arcus P N verò loci N, angulus verò M P N dabit differentiam longitudinis locorum M et N; quæ proinde omnia ponuntur cognita.

§. 120. Ducantur jam ex loco Lunæ L ad terminos M et N circuli maximi L M et L N, exhibebuntque isti arcus complementa altitudinum, quibus hoc tempore Luna in locis M et N supra horizontem elevata conspicitur. Ponatur arcus P L sinus = q, cosinus = Q, erit Q sinus declinationis borealis Lunæ, si quidem Q habeat valorem affirmativum, ac P polum borealem denotet. Deinde ponatur arcus P M sinus = p,

cosinus = P, erit P sinus elevationis poli pro loco M; similique modo sit arcûs P N sinus = r et cosinus = R, ita ut R sit sinus elevationis poli loci N: denique sit anguli M P N sinus = M et cosinus = m, anguli vero L P M sinus = T, cosinus = t; unde erit anguli L P N cosinus = m t — M T. Ex his per trigonometriam sphaericam reperietur sinus altitudinis Lunæ supra horizontem loci M seu cosinus arcûs L M = t p q + Q P: pro loco N verò erit altitudinis Lunæ sinus = (m t — M T) q r + Q R. Quare si, ut suprâ, vis absoluta ad Lunam urgens ponatur = L et distantia Lunæ a Terrâ = b, erit altitudo ad quam aqua in M elevari deberet = $\frac{L (3 (t p q + P Q R)^2 - 1)}{2 b^3}$, et altitudo



ad quam aqua in N elevari deberet = $\frac{L (3 ((m t - M T) q r + Q R)^2 - 1)}{2 b^3}$

utroque casu supra libellam naturalem. Si ergo illa expressio hanc excedat, aqua in M altiùs erit elevata quàm in N intervallo $\frac{3 L}{2 b^3} \times ((t p q + P Q)^2 - ((m t - M T) q r + Q R)^2)$, hæcque expressio, quando fiet negativa, indicabit, quantò aqua in N altiùs consistat quàm in M. In hoc verò negotio inertiam aquæ negligimus, quoniam tantum proximè phænomena hujusmodi casibus oriunda indicare annitimur; si enim hanc materiam perfectè evolvere vellemus, integro tractatu foret opus.

§. 121. Ponamus tractum nostrum maris ab oriente N versùs occidentem M sub eodem parallelo extendi, ita ut elevatio poli in locis M et N sit eadem; erit adeo R = P, et r = p. Transeat nunc Luna per meridianum loci M supra Terram, ita ut sit T = 0, t = 1; hoc ergo tempore magis erit elevata in M quàm in N intervallo $\frac{3 L}{2 b^3} ((p q + P Q)^2 - m p q + P Q^2) = \frac{3 L}{2 b^3} (M^2 p^2 q^2 + 2 (1 - m) p q P Q)$. At quando Luna per meridianum loci N supra Terram transit, aqua tantundem magis erit elevata in N quàm in M. Ex quo sequitur, dum Luna a meridiano loci N ad meridianum loci M progreditur, aquam in M sensim elevari per spatium $\frac{3 L p q}{2 b^3} (M^2 p q + 2 (1 - m) P Q)$ interea verò in N tantundem

subsideret. Sin autem Luna infra Terram a meridiano loci N ad meridianum loci M progrediatur, aqua in M elevabitur interea per spatium

$$= \frac{3 L p q}{2 b^3} (M^2 p q - 2(1 - m) P Q), \text{ per tantumque spatium aqua in N}$$

subsidet. Ponamus nunc angulum L P M esse 90 graduum, seu questionem institui, cùm Luna jam ante sex horas meridianum loci M sit transgressa, atque obtinebitur differentia inter aquæ altitudines in locis M

$$\text{et N} = \frac{3 L}{2 b^3} (P^2 Q^2 - (P Q - M p q)) = \frac{3 L p q}{2 b^3} (2 M P Q -$$

$M^2 p q$). Sex autem horis, antequam Luna ad meridianum loci M apellit, aqua in N magis erit elevata quàm in M intervallo $= \frac{3 L p q}{2 b^3} \times$

$(2 M P Q + M^2 p q)$. Sequuntur hæc si inertia aquæ negligatur; at inertia admissâ ex præcedentibus satis clarum est, cùm has differentias majores esse debere, tùm tempora mutationum tardiùs sequi debere.

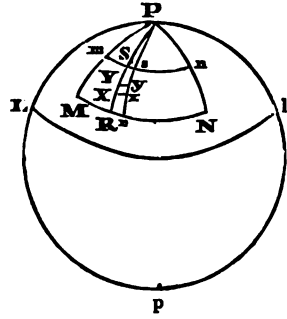
§. 122. Quoniam verò in hoc maris tractu perpetuò eadem aquæ quantitas contineri debet, necesse ut quantum aquæ unâ parte supra libellam attollatur, tantundem ea in reliquâ parte infra libellam deprimatur. Quò igitur hinc altitudinem maris quovis loco exactè determinemus, ponamus tractum nostrum secundùm longitudinem terminari binis meridianis P M et P N, secundùm latitudinem verò binis parallelis M N et m n, positâque Lunâ in L sit sinus P L = q, cosinus = Q; sinus L P M = T, cosinus = t. Porro sit sinus arcûs P M = p, cosinus = P, sinus P m = r, cosinus = R, atque anguli M P N sinus = M et cosinus = m. Præterea sit elevatio in M dum Luna in L versatur, supra libellam = α , ita ut hoc loco suprema aquæ superficies a centro Terræ distet intervallo = $1 + \alpha$, unde cùm sinus altitudinis Lunæ in M sit

= $t p q + P Q$, erit gravitatio totiùs columnæ aqueæ ab M ad centrum

$$\text{Terræ} = \frac{(1 + \alpha)^{n+1}}{n+1} + \frac{L (1 - 3 (t p q + P Q)^2)}{2 b^3} = \frac{1}{1+n} + \alpha +$$

$$\frac{L (1 - 3 (t p q + P Q)^2)}{2 b^3}, \text{ prouti suprà §. 43. et 44. demonstravimus.}$$

Consideretur jam locus quicunque X in nostro tractu, in quo aqua supra libellam sit elevata spatio = ϕ ; ac ducto per hunc locum meridiano P R, sit anguli L P R sinus = X, cosinus = x; arcûs P X sinus = z et co-

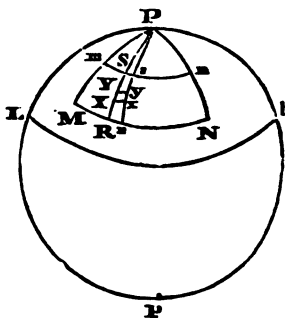


sinus = Z , unde gravitatio columnæ aqueæ ex X ad centrum Terræ per-
tingentis erit = $\frac{1}{1+n} + \varphi + \frac{L(1-3(xqz + QZ)^2)}{2b^3}$. Cùm igitur hæc

gravitatio æqualis esse debeat illi, orietur $\varphi = \alpha + \frac{3L}{2b^3}((xqz + QZ)^2$

— $(tpq + PQ)^2$), ex quâ formulâ si modò constaret elevatio aquæ in
 M , simul innotesceret elevatio vel depressio in quovis loco X .

§. 123. Cùm ergo in X aqua supra libellam elevetur spatio φ , in ele-
mento tractûs infinitè parvo XY y x , plus inerit aquæ, quàm in statu
naturali, et quidem quantitas XY , Xx . φ ,
cujus elementi integrale per totum tractum
sumtum debet esse = 0, ex quo valor ipsius
 α innotescet. Erit autem angulus $RPr =$
 $\frac{dY}{x}$, hincque arcus $Xx = \frac{z dX}{x}$, at ele-



mentum $XY = \frac{dZ}{x}$, ex quo infinitè parvum

rectangulum $XY y x = \frac{dX dZ}{x}$, in quo

ergo excessus aquæ supra statum naturalem

est = $\frac{\varphi dX dZ}{x} = \frac{dX}{x} (\alpha dZ + \frac{3L dZ}{2b^3} ((xqz + QZ)^2 - (tpq$

, $PQ)^2))$, quæ formula bis debet integrari. Ponatur primò X constans,

et integratione absolutâ reperietur in elemento RS s r excessus aquæ
supra statum naturalem = $\frac{dX}{x} (\alpha (R - P) + \frac{3L}{2b^3} (q^2 x^2 (R - P) -$

$\frac{x^2 q^2}{3} (R^3 - P^3) - \frac{2xQq}{3} (r^3 - p^3) + \frac{Q^2}{3} (R^3 - P^3) - (tpq$

+ $PQ)^2 (R - P)))$. Integretur hæc formula denuo ut integrale ad
totum tractum MN n m extendatur, prodibitque incrementum aquæ,

quod toti tractui accessisse oporteret, = $\alpha (R - P) A \sin. M + \frac{3L}{2b^3} x$

$(\frac{q^2 (3(R - P) - (R^3 - P^3))}{6} (Mm(1 - 2Tt) - 2M^2Tt) +$

$\frac{2Qq(r^3 - p^3)}{3} (T - Mt - mT) + \frac{q^2 (R - P)}{2} A \sin. M +$

$\frac{(3Q^2 - 1)(R^3 - P^3)}{6} A \sin. M - (tpq + PQ)^2 (R - P) A \sin. M)$,

quæ adeo quantitas debet esse = 0: unde oritur $\alpha = \frac{3L(tpq + PQ)^2}{2b^3}$

$$+ \frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{3L}{2b^3(R-P)A \sin. M} \\ \left(\frac{q^2(3(R-P)-R^3-P^3)}{6} (2M^2Tt - Mm(1-2TT)) + \right. \\ \left. \frac{2Qq(p^3-r^3)}{3} (T-Mt-mT) \right).$$

§. 124. Cognitâ igitur verâ elevatione aquæ in M supra libellam, quam antè posuimus = α , hinc intelligetur vera aquæ elevatio supra libellam in loco quocunque X. Ponatur enim sinus anguli M P X = S et cosinus = s, erit sin. L P R = X = Ts + tS et x = ts - TS, manentibusque arcûs P X sinu = z et cosinu = Z, erit elevatio aquæ in X = φ = $\alpha + \frac{3L}{2b^3} ((ts - TS)qz + QZ)^2 - \frac{3L}{2b^3} (tpq + PQ)^2$; quare loco α valore invento substituto, reperietur aqua in X supra libellam attolli actu per spatium = $\frac{3L}{2b^3} ((ts - TS)qz + QZ)^2 + \frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{3L}{2b^3(R-P)A \sin. M} \left(\frac{q^2(3(R-P)-R^3-P^3)}{6} (2M^2Tt - Mm(1-2TT)) + \frac{2Qq(p^3-r^3)}{3} (T-Mt-mT) \right)$. Quòd si ergo ponatur tractus

noster ita augeri ut totam Tellurem ambiat, orietur casus jam suprâ tractatus; quoniam enim fit MN = 360°. seu A sin. M = 2 π denotante 1: π rationem diametri ad peripheriam, erit M = 0 et m = 1: præterea verò quia M in polum australem p, m verò in borealem P incidit, erit p = 0, P = -1, r = 0 et R = +1: si hi valores substituantur, prodibit elevatio aquæ in X = $\frac{L}{2b^3} (3((ts - TS)qz + QZ)^2 - 1)$,

quæ expressio, quia ts - TS denotat cosinum anguli L P X atque (ts - TS)qz + QZ sinum altitudinis Lunæ supra horizontem in X, cum superioribus formulis exactissimè convenit: si quidem terminus $\frac{L}{b^4}$

negligatur. Hæc verò eadem ipsa expressio quoque emergit, si tantum alterum hemisphaerium vel boreale vel australe ponatur aquâ totum circumfusum, manent enim omnia ut antè, nisi quòd fiat p = 1 et P = 0: utroque enim casu fit R² + PR + P² = 1; ultimusque terminus ob M = 0 utroque casu evanescit.

§. 125. Ponamus nunc tractum maris secundum longitudinem MN usque ad 180 gradus extendi, erit M = 0 et m = -1 et A sin. M = π ,

per meridianum loci M supra Terram, erit $T = 0$, et $t = 1$, atque elevatio in M prodibit $= \frac{3 L p q (p q + 4 P Q)}{4 b^3} + \frac{3 L p q}{4 b^3 A \sin. M} (M m p q + 4 M P Q)$; at si per eundem meridianum infra Terram transeat, erit aquæ elevatio $= \frac{3 L p q (p q - 4 P Q)}{4 b^3} - \frac{3 L p q}{4 b^3 A \sin. M} (M m p q - 4 M P Q)$. Quòd si autem Luna versùs ortum a meridiano distet angulo horario 90 graduum, seu circiter 6 horis ante appulsum Lunæ ad meridianum in M superiorem, erit $T = -1$ et $t = 0$, unde elevatio erit $= -\frac{3 L p^2 q^2}{4 b^3} + \frac{3 L p q}{2 b^3 A \sin. M} (p q M m - 2 P Q (1 - m))$, sex verò horis post transitum Lunæ per meridianum loci M versùs occasum, erit altitudo aquæ in M supra libellam $= -\frac{3 L p^2 q^2}{4 b^3} + \frac{3 L p q}{2 b^3 A \sin. M} (2 p q M m - 2 P Q (1 + m))$.

§. 127. Tribuamus huic tractui longitudinem 90 graduum, ut sit $M = 1$, $m = 0$, et $A \sin. M = \frac{\pi}{2}$, unde oritur elevatio aquæ in $M = \frac{3 L p q (2 t t p q + 4 t P Q - p q)}{4 b^3} + \frac{3 L p q}{2 \pi b^3} (2 p q T t + 4 P Q (T - t))$. Quæ si etiam declinatio Lunæ ponatur $= 0$, fiet $= \frac{3 L p^2 q^2 (2 t t - 1)}{4 b^3} + \frac{3 L p^2 q^2 T t}{\pi b^3}$ existente $q = 1$, unde apparet maximam elevationem non accidere cùm Luna per meridianum loci M transit, sed tardiùs, et quidem si dupli anguli $L P M$ sinus fuerit $= \frac{2}{\pi}$, hoc est ferè unâ horâ post transitum Lunæ per meridianum, hoc igitur casu fluxus in M unâ ferè horâ tardiùs observetur, quàm si tota Terra aquâ esset circumfusa.

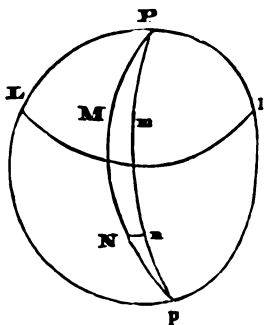
Dum autem Luna per meridianum superius transit, erit elevatio $= \frac{3 L p p}{4 b^3}$, quæ etiam valet si Luna infra Terram meridianum attingat; at sex horis vel antè vel post, quando Luna in horizonte versatur, erit aquæ depressio $= -\frac{3 L p p}{4 b^3}$. Unde intelligitur in tali maris tractu pariter quotidie

binos fluxus totidemque refluxus accidere debere, atque æstum propemodum fore similem æstui generali, nisi quòd majoribus anomalis sit obnoxius, præcipuè si Luna habeat declinationem.

§. 128. Hinc explicari potest ratio æstûs, qui in Mari Mediterraneo

observatur, et qui in ipso hoc mari generatur. Cùm enim longitudo hujus maris ne 60 quidem gradus attingat, æstus erunt multò minores; decrescunt enim si cùm longitudo diminuatur, tum elevatio poli augeatur. Quòd si ergo in his formulis angulus $M P N$ ponatur ferè 60 graduum, atque elevatio poli debita introducatur, reperientur quidem æstus bini quotidie evenire debere, qui autem futuri sint multò minores, quàm in medio mari, et pluribus anomaliiis subjecti, quas quidem omnes ex formulis definire licebit. Quoniam ergo tam exigui æstus a ventis et cursu aquæ, qui in hoc mari notabilis deprehenditur, vehementer turbantur, ad pleraque littora hujus maris vix usquam æstus regularis observabitur. Excipi autem debet Mare Adriaticum, quod cùm sinum formet amplum, advenientem aquam meliùs colliget, atque elevationem multò sensibiliorem parietur, a quo æstus maris Venetiis observatus originem habet. Tametsi enim Mare Mediterraneum non solum, satis amplam habet latitudinem, sed etiam vehementer inæqualem, tamen ejusmodi marium æstus admodum exquisitè ex præsentì casu, quo latitudinem omnino negligimus, colligi potest, quia extensio maris in longitudinem præcipuam causam æstuum binorum singulis diebus evenientium continet, neque extensio latitudinis multum conferat.

§. 129. Ponamus nunc tractûs nostri maris longitudinem evanescere, totumque tractum in eodem meridiano $P p$ ab M usque ad N extendi, ita ut sit $M = 0$, $m = 1$; sinus autem elevationis poli in M sit $= P$, cosinus $= p$, in N verò sit sinus elevationis poli $= R$, cosinus $= r$. Ex his si Luna in L versetur, ob $A \sin. M = M$, erit in M elevatio aquæ supra libellam $= \frac{3 L (t p q + P Q)^2}{2 b^3} + \frac{L (1 - 3 Q^2) (P^2 + P R + R^2)}{4 b^3} - \frac{3 L q^2}{4 b^3}$
 $+ \frac{L}{4 b^3} (q^2 (3 - P^2 - P R - R R) \times$
 $(2 T T - 1) - \frac{4 Q q t (p^3 - r^3)}{R - P} = \frac{L}{2 b^3} \times$
 $((t t q q - Q Q) (R^2 + P R - 2 P^2) + \frac{2 Q q t (3 P p R + r^3 - 3 P^2 p - p^3)}{R - P}$



Quòd si nunc ponatur alter terminus N ultra æquatorem versùs austrum situs, ita ut sinus elevationis poli australis in N duplo major sit quàm sinus elevationis borealis in M , seu $R = -2 P$ et $r = \sqrt{1 - 4 P^2}$, erit $R^2 + P R - 2 P^2 = 0$, atque elevatio aquæ in M supra libellam erit

$= \frac{L Q q t}{9 b^3 P} (9 P^2 p + p^3 - r^3)$. Ex hâc igitur formulâ sequitur, si Lunæ declinatio sit nulla seu $Q = 0$, tum nullum omnino æstum in M observari debere. Quòd si autem Luna habeat borealem, tum ad transitum Lunæ per meridianum superiorem aquam attolli ad spatium $= \frac{L Q q}{2 b^3 P} \times (9 P^2 p + p^3 - r^3)$; at dum Luna in alterutro circulo horario sexto versetur, tum aquam ad libellam naturalem fore constitutam; Lunâ autem infra horizontem ad meridianum appellente, aquam infra libellam depressum iri per spatium $= \frac{L Q q}{2 b^3 P} (9 P^2 p + p^3 - r^3)$; contrarium denique fore æstum, si Luna habeat declinationem australem. In tali igitur maris tractu quotidie semel tantum aqua affluit, semelque refluit, si quidem Luna habeat declinationem; nam si Luna æquatorem occupat, æstus omnino erit nullus.

§. 130. Ex hoc casu aptissimè explicari posse videtur phænomenon illud æstûs singularis, qui in portu Tunquini ad Batsham observatur, ubi omninò ut in præsentè casu dum Luna in æquatore versatur, mare nullum æstum sentit; at dum Luna removetur ab æquatore vel versùs boream vel versùs austrum, quotidie aqua semel tantum affluit semelque refluit, prorsus ut calculus monstravit; scilicet si Lunæ declinatio fuerit borealis, aqua versùs Lunæ occasum, hoc est post transitum Lunæ per meridianum super horizonte, affluit, versùs ortum verò defluit, quæ retardatio ab inertîâ aquæ et motu ad littora provenire intelligitur ut suprâ. Contrâ verò si Lunæ declinatio sit australis, aqua deprimitur Lunâ ad occasum inclinante, Lunâ autem oriente, attollitur: quæ phænomena apprimè conveniunt cum casu modò exposito. Est præterea elevatio poli Tunquini $20^\circ. 50'$. borealis, atque mare utrinque cùm Peninsulis tùm Insulis ab utroque Oceano Pacifico et Indico fere prorsus separatur, saltem ut libera communicatio non adsit: præterea hic idem maris tractus, qui versùs boream ad littora Regni Tunquini terminatur, extenditur ultra æquatorem ad gradus circiter 45. cujus latitudinis sinus circiter duplo major est, quàm sinus latitudinis borealis $20^\circ. 51'$.: quocirca ex his circumstantiis per nostram theoriam eadem ipsa singularia phænomena æstûs maris observari debent, quæ actu observantur: atque hoc modo si ullum adhuc dubium circa nostram theoriam reliquum fuisset, id resolutione hujus mirabilis phænomeni funditùs sublatum iri confidimus.

INTRODUCTIO

AD

LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.



TRIA sunt in Lunæ Theoriâ spectanda, in quibus versatur omnis quæstio astronomica quæ de ipsâ institui potest; primum, ejus motus quâtenus e Terrâ observatur; secundò, figura lunaris orbitæ a circulo plùs minusve recedens et apsidum ejus positio; ac tertio, ejus orbitæ ad eclipticam inclinatio.

Si extrâ Solis actionem Luna motus suos ageret, Luna ellipsim quamlibet circa Terram describere posset in plano quovis, et ea ellipsis perpetuò eadem maneret constantemque angulum cum eclipticâ efficeret; itaque tota theoria Lunæ circa hæc versaretur elementa, primò, ut ex tempore quod Luna consumeret ut a quâdam stellâ discedens ad eandem rediret, obtineatur duratio ejus mensis periodici siderei sicque motus ejus medius determinetur, unde facile obtinebitur via quam Luna dato tempore per eum motum medium emetiri potest, ita ut, datâ epochâ, hoc est, dato loco cœli in quo Luna aliquando observata fuisset, inde quem in locum migrare debuisset, dato tempore, per medii motûs calculum inveniri posset.

Postea; locus apogæi Lunæ, quod in cœlis eidem puncto semper responderet, foret requirendus, tum excentricitas ejus orbitæ, sic enim figura ellipseos quam Luna describit obtineretur, et quia, citra Solis actionem, Luna moveretur secundum legem Keplerianam, hoc est, ita ut tempora quibus durantibus Luna moveretur, non quidem sint proportionalia angulis e Terrâ spectatis, sed areis descriptis, hinc fiet ut differentia loci Lunæ per motum medium computati ab ejus loco vero, obtineatur ex orbitæ lunaris figurâ per methodos notas, quæ differentia dicitur æquatio Lunæ soluta, hoc est, æquatio a Sole non pendens, et intelligetur quibus in locis illa æquatio sit adhibenda ex situ cognito apogæi Lunæ, pendet enim omninò ea differentia ex situ Lunæ in orbe suo respectu apogæi sui.

Tertiò. Quærendum foret observationibus, quibus in locis Lunæ

eclipticam secet, cui nempe cœli loco respondeant ejus nodi, qui in hac hypothesi fixi forent, et quonam angulo orbita Lunæ foret inclinata ad eclipticam, unde quoniam ea inclinatio constans esset, distantia Lunæ a plano eclipticæ per perpendicularum mensuratâ, foret semper proportionata distantie perpendiculari Lunæ a lineâ nodorum, itaque ex cognito loco Lunæ et nodorum cognosci poterit quonam sub angulo Luna ab eclipticâ distare videatur ex ipsâ Terrâ; et ad quodnam punctum eclipticæ referri debeat.

Si itaque Lunæ motus citra actionem Solis considerentur, tabulæ astronomiæ lunares hæc continere debebunt.

Primò. Epocham loci Lunæ dato aliquo tempore; tum observationem loci apogæi quod fixum maneret, et observationem loci nodorum pariter fixorum.

Postea continere debebunt tabulam motus medii, tum tabulam æquationis Lunæ secundum ejus distantiam mediam ab apogæo; tabulam latitudinis Lunæ secundum variam distantiam Lunæ a nodo et denique tabulam reductionis Lunæ ad eclipticam, secundum eam distantiam Lunæ a nodo.

Possunt his addi, tabula distantiarum Lunæ a Terrâ secundum ejus distantiam ab ejus apogæo, tabula diametrorum ejus apparentium secundum eandem distantiam ab apogæo, et denique tabula parallaxeos quâ deprimitur Luna respectu spectatoris in superficie Telluris collocati, prout diversa est ejus a Terrâ distantia, et prout altitudo supra horizontem est diversa.

Talis foret tota de Lunâ theoria, citra Solis actionem; sed jam a longo tempore intellexerunt astronomi, lunares motus a Lunæ situ respectu Solis plurimum turbari, unde varias correctiones, sive æquationes variis titulis concinnare sunt conati.

Quàm luculenter ex gravitatis theoriâ, hæc non modò explicantur, sed etiam accurato calculo determinentur, demonstrare aggressus est Newtonus, et eas omnes æquationes quæ ex Sole pendent, calculis ex theoriâ sui deductis ita feliciter statuit ut motus Lunæ ejusve æquationes ex calculo repertæ in minuto secundo aut propè cum iis quæ ab accuratioribus observationibus determinari potuerunt, consentiant, quod auctoritatem integram illi theoriæ conciliat. Calculi autem illi, nec faciles sunt, nec compendiosi, nec semper commodè ad syntheticam formam reducendi; quos Newtonus hâc ultimâ ratione lectori suo sistere potuit, eos enucleatè tradit, cæteros omittit, et quod ex iis obtinetur strictim in Scholio indicat, et primo quales sint illæ æquationes juxta astronomorum observationes dicit, et quibusnam

AD LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.

v

legibus secundum ipsos observatores sint adstrictæ, mox tradit quales æquationes ex suis calculis emergant et quænam sint earum leges.

Ipsam tam observationibus ante ipsum institutis, quam observationibus Flamstedianis usum esse constat, imo et ipsum exinde tabulas lunares sibi construxisse liquet, ex quibus multa profert quarum pleraque in Rudolphinis, aut in Ludoviceis tabulis facile non comperiuntur, sed quæ maximè consentiunt cum novis ill. Cassini tabulis, ita ut quo perfectiùs cœli motus dignoscunt astronomi, eo propiùs ad Newtonianas theorias accedereprehendantur.

Ut itaque Solis actionis in Lunam et ejus orbitam habeatur ratio; primum fiat abstractio excentricitatis orbitæ tam Telluris quàm Lunæ, deprehenditur quod ex Solis actione mensis periodicus Lunæ longior evadat et ejus orbita ex circulari in ellipsim mutetur, cujus axes per Prop. XXVIII. sunt determinati.

Secundò, tam ex eâ figurâ quam orbita Lunæ induit, quam ex acceleratione Lunæ per eam partem actionis Solis quæ secundum tangentem orbitæ lunaris dirigitur, nascitur variatio quam Tycho primus observavit, et maximam in octantibus $40\frac{1}{2}'$. statuit, illam ill. Cassinus facit $33'. 40''$. in Elementis Astronomiæ, eam verò ipse Newtonus in hypothesi orbitas Telluris et Lunæ esse circulares $35'. 10''$. calculavit Prop. XXIX.

Tertiò, ex eâ Solis actione nascitur motus apogæi lunaris in consequentia, cujus motus fundamentum indicat Newtonus Prop. XLV. Lib. I.

Quartò, inde deducitur motus medius nodorum Prop. XXXII. observationibus proximè congruus; quintò denique, inclinationis orbitæ lunaris mutatio explicatur Prop. XXXIV. et XXXV.

Nunc verò adjungatur consideratio excentricitatis orbitæ Telluris, eâ fit ut actio Solis major sit cùm Terra est in perihelio suo quàm in aphelio; inde orientur correctiones variæ his omnibus Lunæ erroribus adjungendæ; primum cùm mensis periodicus Lunæ per actionem Solis longior evadat, et motus ejus medius augeatur, id incrementum quando Terra est in perihelio majus est quàm cùm est in aphelio, hinc ea tardatio inæqualiter in motum Lunæ distributa, efficit ut hoc nomine locus ejus per medium motum inventus ab ejus vero loco dissentiat, hinc itaque notis nostris ad initium Scholii ad calcem Prop. XXXV. adjecti, quod ad totam Lunæ theoriam pertinet, incrementum medium motus medii ex actione Solis ortum assignamus, tum postea aperimus rationem quâ obtineri potest æquatio cœu correctio motus medii adhibenda propter inæqualem Terræ a Sole distantiam, quæ quidem æquatio continetur in eâ quam ill. Cassinus, titulo *Primæ Æquationis Solaris*, tradit.

Eàdem ratione, variationes motus apogæi et motus nodorum ex situ diverso Terræ ad aphelium aut perihelium suum ex utriusque motu medio dato in secundo paragrapho derivare docetur.

His ex excentricitatē orbitæ Telluris deductis adjungatur consideratio excentricitatis orbitæ lunaris, aut ejus inclinationis ad eclipticam: inde novæ irregularitates prioribus adnascuntur.

Primò, mensis periodicus paulo major fit cùm linea apsidum per Solem transit quàm cùm ipsi est perpendicularis, hinc correctio nova æquationi motus medii, quæ in primo Scholii paragrapho exponitur, est facienda, hanc novam æquationem ill. Cassinus exhibet in tabella cujus titulus est *Secunda Æquatio Solaris* et tertio paragrapho Scholii traditur.

Itidem si linea nodorum per Solem transeat, paulo major erit Solis actio, et correctio nova exinde nascetur eidem motui medio, hanc quarto paragrapho Scholii indicat Newtonus.

Præterea excentricitas ipsa orbitæ lunaris ex diverso situ apogæi respectu Solis mutatur, nunc major nunc minor evadit, idque etiam inæqualiter pro distantia Telluris a Sole.

Rursus ipse motus apogæi prout apogæum diversimodè situm est respectu Solis mutatur, hinc æquatio apogæi nascitur eaque duplex, prima supponendo Telluris a Sole distantiam constantem, altera verò pendet ex mutatione distationæ Telluris a Sole.

Hinc tandem cùm orbitæ lunaris forma, excentricitas et apogæi positio mutetur, omninò mutantur correctiones illæ quæ deducebantur ex Lunæ excentricitate mediocri, quæ æquationem solutam constituebant; ultimo autem Scholii paragrapho Newtonus docet quâ ratione novæ illæ correctiones sint instituendæ: omnia verò in hoc Scholio sine demonstratione tradit, nec indicato suorum calculorum artificio, ideóque nostri putavimus officii, eam indagare viam cui Newtonus in iis reperiendis insistere debuit, labore quidem non parvo, successu qualicumque, utinam lectoribus non ingrato.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

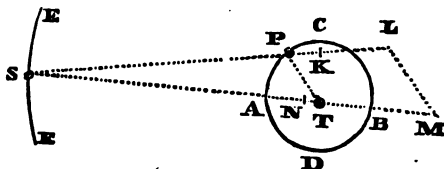
PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

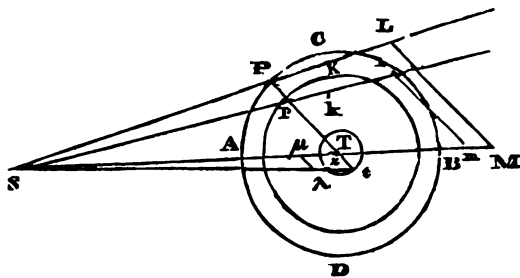
Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

DESIGNET S Solem, T Terram, P Lunam, C A D B orbem Lunæ. In S P capiat S K æqualis S T; sitque S L ad S K in duplicatâ ratione S K ad S P, et ipsi P T agatur parallela L M; et si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per distantiam S T vel S K, erit S L gravitas acceleratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus S M, L M, quarum L M et ipsius S M pars T M perturbat motum Lunæ, ut in Libri Primi Prop. LXVI. et ejus Corollariis expositum est. ^(*) Quâ-



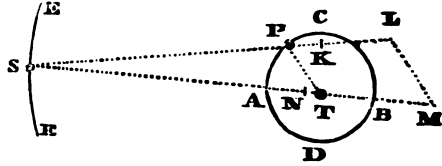
^(*) Quatenus Terra et Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus consimilibus; designet ut prius S Solem, sed sit T centrum commune gravitatis Terræ et Lunæ; sit itaque p Luna et t Terra circum commune gravitatis centrum revolventes, ita ut distantia p t sit æqualis P T, ductisque S p, S t, sumptisque in eis lineis productis si opus sit S k, S x æqualibus S T, secatisque S l et S λ ita ut sint ad S T in duplicatâ ratione S T ad S p et ad S t, actisque l m, λ μ parallelis ad p t, si exponat S T vim accelera-

trix S l et S λ vires accelerantes Lunam et Terram in Solem, et perturbabuntur utriusque



motus respectu centri communis gravitatis per vires l m et λ μ, T m et T μ; quæ vires com-

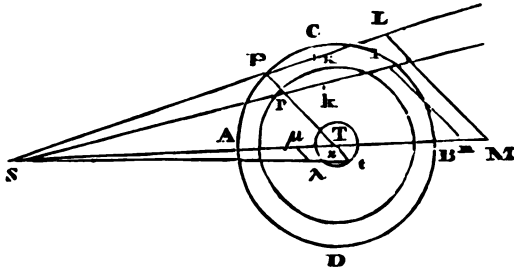
tenus Terra et Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus consimilibus; sed summas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, et summas virium per lineas ipsis analogas TM et ML designare. ⁽¹⁾ Vis ML in mediocri suâ quantitate est ad vim centripetam, quâ Luna in orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam PT revolvi posset, in duplicatâ ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram et Terræ circa Solem (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc est, in duplicatâ ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000 ad 178725, seu 1 ad 178 $\frac{7}{8}$. Invenimus autem in propositione quartâ quod, si Terra et Luna circa commune gravitatis centrum revol-



similes sunt viribus LM et TM quibus Lunam Solam perturbari dictum fuit in suppositione Terram esse immotam; nam ob maximam distantiam puncti S , lineæ PL , $p l$, TM , $t \lambda$ pro parallelis sunt habendæ, ideòque figuræ $TPLM$, $Tp l m$, $T t \lambda \mu$ pro parallelogrammis sunt habendæ, quæ angulum æqualem in T habent, præterea latera PT , TM ; $p T$, $T m$; $T t$,

licet ad Lunam. Quippe in observationibus motus Lunæ respectu Terræ, quasi hæc immota esset, consideratur, tunc autem summas virium acceleratricum, ex quibus velocitates respectue nascuntur, ipsi tribui debent, et summas virium per lineas TM et ML ipsis analogas designari. Vires enim acceleratrices $p T$ et $T t$ simul junctæ æquales sunt soli vi PT et similium effectum

edunt, admovent utique corpus p et t , secundum directionem $p T t$, si ergo vis acceleratrix PT summe utriusque æqualis admovent corpus P versus immotum T , planè idem erit effectus ex corpore t vel T apertatus: vires MT , $T \mu$ divellunt corpora a se mutuo secundum directionem ST , idem verò præstat vis TM quæ summe ambarum est æqualis, nam est $p T : T t :: m T : T \mu ::$ ergo $p T : p T + T t :: m T : m T + T \mu$ et ab-



$T \mu$, eandem habent inter se rationem; demonstratur enim in notâ 500. Lib. I. (quæ ad majorem facilitatem repetitur in notâ ⁽²⁾ subsequente) esse PT ad TM , $p T$ ad $T m$, $T t$ ad $T \mu$ ut radius ad triplum cosinus anguli ATP qui cosinus cum idem sit in tribus hisce casibus, latera parallelogrammorum circa æqualem angulum posita erunt proportionalia, ea verò, latera designant tam vires quibus Luna circa Terram immotam revolvendo perturbatur, quàm eas quibus perturbarentur Luna et Terra circa centrum commune revolvendo, illæ Vires ergo sunt consimiles.

Sed summas tam virium quàm motuum referre

nando $p T : m T :: (PT : MT) :: p T + T t : m T + T \mu$. Sed est $p T + T t = PT$ ergo etiam $m T + T \mu = MT$.

⁽¹⁾ * Vis ML in mediocri suâ quantitate, &c. Ob magnam Solis distantiam figura $PTML$ est parallelogrammum ideòque ML est proximi æqualis lineæ PT , ergo vis ML erit ad vim quâ Sol agit in punctum T , ut PT ad SK sive ST , sed vires centrales qualescumque sunt inter se directè ut radii circulorum qui per eas describuntur et inversè ut quadrata temporum periodicorum, ergo ea vis quâ Sol agit in punctum T , est ad vim quâ Luna in orbe suo retinetur (posita illam revolvi circa Terram quiescentem) ut ST

vantur, earum distantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium Terræ quamproximè. (*) Et vis quâ Luna in orbem circa Terram quiescentem, ad distantiam P T semidiametrorum terrestrium 60, revolvi posset, est ad vim, quâ eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; (†) et hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproximè. Ideoque vis mediocris M L est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 178\frac{2}{3}$, seu 1 ad 638092,6. Inde verò et ex proportionem linearum T M, M L, (‡) datur etiam vis T M: et hæc sunt vires solis quibus Lunæ motus perturbantur. Q. e. i.

ad P T directè, et ut quadratum temporis periodici Lunæ circa Terram ad quadratum temporis periodici Terræ circa Solem; ergo compositis rationibus, vis M L est ad vim quâ Luna in orbe suo retinetur, ut quadratum temporis periodici Lunæ ad quadratum temporis periodici Terræ circa Solem, hoc est in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, 43' ad 365 dies, 6 hor. 9' quæ est duratio anni sideris.

(*) * Et vis quâ Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. revolvi posset, est ad vim quâ ad distantiam 60 semid. revolvi posset eodem tempore, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60. Vires enim centrales sunt ut distantie directè et tempora periodica inversè (Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.). Cùm ergo hic tempora periodica æqualia ponantur, vires centrales sunt ut distantie. Newtonus autem loco distantie $60\frac{1}{2}$ semid. Terræ quæ revera intercedit inter Terram et Lunam, assumit distantiam 60 semid. tantum, quia in præcedente ratiocinio vim quâ Luna in orbe suo retinetur, æstimaverat quasi Terra immota esset, et Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. a Terrâ tempore 27. dier. 7 hor. 43. min. circa Terram revolveretur; verum cùm Terra revera circa centrum gravitatis commune Lunæ et Terræ revolveretur, ea vis quâ Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. tempore illo revolvi apparet, minor est eâ quâ ad eandem distantiam eodemque tempore circa Terram immotam revolveretur, et est æqualis illi quâ, eodem quidem tempore periodico, sed ad distantiam 60 semid. circa Terram immotam revolveretur, ut constat ex Prop. LX. Lib. I. Eâ enim propositione statuitur quod si duo corpora revolvantur circa centrum commune gravitatis, axis ellipseos quam unum circa alterum motum describit, est ad axem ellipseos quam

circa illud quiescens eodem tempore periodico et eadem vi describere posset, ut summa corporum amborum ad primam duarum medieproportionalium inter hanc summam et corpus alterum; quare cùm Telluris corpus sit ad corpus Lunæ ut 42 ad 1, et prima duarum medieproportionalium inter 42 et 42 sit $42\frac{1}{2}$ sitque 43 ad $42\frac{1}{2}$ ut $60\frac{1}{2}$ ad 60 proximè, vis quâ Luna in orbe suo retinetur, ea est quâ ad distantiam 60 semid. Terræ eodem ipso tempore periodico, quod observatur circa Terram immotam, revolvi posset.

(†) * Et hæc vis, &c. Per hujusce Libri Prop. IV.

(‡) * Datur etiam vis T M. Ob parallelas P T, L M et ingentem puncti S distantiam, P L et T M sunt parallele, et figura P T L M est parallelogrammum, ideoque T M sumitur ut proximè æqualis P L; est autem P L triplum cosinus anguli A T P existente T P sive L M radio: nam quia S K est æqualis S T, si centro S radio S T describatur arcus T K, erunt S T et S K in eum arcum perpendiculares, sed is arcus proximè coincidit cum rectâ T C perpendiculari lineæ S T in T (ob distantiam centri S) ergo punctum K in eâ rectâ T C occurret et S K sive P K illi rectæ T C erit perpendicularis, ideoque P K erit cosinus anguli A T P; sed, per constructionem, est SP^2 ad SK^2 — SP^2 (sive quia $SK = SP + PK$) ad $2SP \times PK + PK^2$ ut SK (sive $SP + SK$) ad $SL - SK$ (sive KL) ideoque est $KL = 2PK + \frac{3PK^2}{SP} + \frac{PK^3}{SP^2}$, sed omitteendi sunt ultimi termini propter ingentem divisorem S P, ergo est $KL = 2PK$, et $PK + KL$ sive $PL = 3PK$. Q. e. d.

quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi possint, ductâque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipsis KP, kp productis occurrens in F et f; et erit FK æqualis TK, et ^(b) Kk erit ad PK ut Pp ad Tp, ^(c) hoc est in datâ ratione, ^(d) ideòque $FK \times Kk$ seu area $FKkf$, erit ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id est, ut EL; et compositè, area tota GCKF ut sum-

ma omnium virium EL tempore toto CP impressarum in Lunam, ^(e) atque ideò etiam ut velocitas hâc summâ genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ CTP, seu incrementum momenti. ^(f) Vis quâ Luna circa Terram quiescentem ad distantiam TP, tempore suo periodico

^(b) * Kk erit ad PK ut Pp ad Tp sive TP; ex notissimâ circuli proprietate fluit hæc proportio, nam si ex puncto p ducatur lineola pq perpendicularis ad PK, ea erit parallela et æqualis lineæ Kk, formabiturque triangulum fluxionale Ppq simile triangulo PKT, nam cùm anguli pPK et KPT rectum simul efficiant, et pariter anguli KPT et PTK, æquales sunt anguli pPK et PTK, unde est pqsive Kk ad PK ut Pp ad TP.

^(c) * Hoc est in datâ ratione. Ratio enim Pp ad Tp est data, quia singulæ partes Pp sumuntur æquales, sunt itaque singulæ in eadem ratione ad radium TP.

^(d) * Ideòque $FK \times Kk$ seu area $FKkf$ ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$; cùm ratio Kk ad PK sit data,

data etiam erit ratio Kk ad 3PK, et hæc ratio manebit etiamnum data si consequens 3PK per quantitatem constantem TP dividatur; erit ergo data ratio Kk ad $\frac{3PK}{TP}$, denique non mutabitur hæc ratio si ambo termini per quantitates æquales FK et TK multiplicentur, ergo ratio $Kk \times FK$ (seu areæ $FKkf$) ad $\frac{3PK \times TK}{TP}$

est etiam data, hoc est, est area $FKkf$ ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$.

^(e) * Atque ideò etiam ut velocitas (13. Lib. I.).

^(f) * Vis quâ Luna circa Terram ad distantiam TP tempore suo periodico CADB revolvi posset, efficeret ut corpus liberè cadendo tempore CT describeret longitudinem $\frac{1}{2}$ CT, &c. Si corpus gyretur in circulo per vim ad ejus centrum tendentem, primum uniformiter girabitur; tum, quadratum arcûs quovis tempore descripti erit æquale circuli diametro ducto in altitudinem quam corpus liberè cadendo tempore eodem percurreret si uniformiter acceleraretur per vim centripetam quâ circulus describitur.

Nam si sumatur arcus quàm minimus, altitudo quæ per vim centralem liberè percurreretur dum

ille arcus quàm minimus describeretur, foret ejus arcûs minimi sinus versus; sed ex naturâ circuli, factum diametri ducti in sinum versum arcûs, est æquale quadrato chordæ illius arcûs, sive quadrato arcûs ipsius si adeo sit exiguus ut pro suâ chordâ sumi possit.

Spatia verò liberè cadendo per vim uniformiter accelerantem descripta, sunt ut quadrata temporum, arcus verò interea percursi sunt ut tempora, quia corpus uniformi celeritate giratur, ergo spatium minimum per vim centripetam liberè descriptum est ad aliud quodvis spatium per eandem vim centrifugam liberè descriptum (ideòque etiam facta horum spatorum per diametrum circuli) sunt ut quadrata arcuum correspondentibus temporibus descriptorum: sed prius factum est æquale quadrato arcûs correspondentis, ergo et alterum factum erit æquale quadrato arcûs correspondentis, hoc est altitudo quæcumque cadendo liberè descripta in diametrum ducta efficit factum æquale quadrato arcûs eodem tempore revolvens uniformiter percursi.

Quod cùm ita sit, cadat liberè corpus per $\frac{1}{2}$ CT, h. e. per radii semissem, ducaturque hæc longitudo per diametrum seu 2CT factum CT^2 sive quadratum ipsius radii æquale erit quadrato arcûs eodem tempore descripti, erit ergo is arcus æqualis radio CT, sed velocitas acquisita liberè cadendo per radii semissem $\frac{1}{2}$ CT talis est ut corpus movendo uniformiter eâ celeritate acquisitâ duplum ejus altitudinis radium, nempe integrum CT eodem tempore describere posset, quæ est ipsa longitudo arcûs quam corpus uniformiter revolvens descripsisset eodem tempore; ergo velocitas acquisita lapsu per $\frac{1}{2}$ CT ea est quâ corpus in orbe suo revolvitur.

Ea denique longitudo $\frac{1}{2}$ CT percurratur tempore quod erit ad totum tempus periodicum ut CT ad circumferentiam CADB, nam tempora sunt ut arcus uniformiter descripti; sed tempus, quo corpus per $\frac{1}{2}$ CT labitur, est æquale tempori quo arcus æqualis CT percurritur, ergo est illud tempus ad totum tempus periodicum ut CT ad totam peripheriam CADB.

$\times P p$ æqualem. (°) Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis $C P$ generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor $E L$ eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2} T P \times C P$ ad aream $K C G F$: tempore autem toto $C P A$, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2} T P \times C A$ et triangulum $T C G$, sive ut arcus quadrantalisis $C A$ et radius $T P$. Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. (P) Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, (°) addatur et auferatur dimidium velocitatis alterius; et si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, summa 11915 + 50 seu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in syzygiâ A , ac differentia 11915 — 50 seu 11865 ejusdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in syzygiis et quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium $F K C G$ ad triangulum $T C G$ (r) vel quod perinde est, ut quadratum sinûs $P K$ ad quadratum radii $T P$, (s) (id est, ut $P d$ ad $T P$) et summa exhibebit momentum areæ, ubi Luna est in loco quovis intermedio P .

(°) * Et velocitas quam vis maxima tempore quovis $C P$ generat ad velocitatem quam generant vires veræ $E L$ eodem tempore agentes ut $\frac{1}{2} T P \times C P$ ad aream $K C G F$, velocitates genitæ sunt ut vires quibus generantur, ductæ in tempus per quod generantur, cum itaque supponatur omnes arcus $P p$ temporibus quamproximè æqualibus describi, si ii arcus $P p$ æquales inter se sumantur (vid. not. * præced.) velocitates genitæ, dum arcus $P p$ percurruntur, sunt ut ipsæ vires sive ut areæ $F K k f$, ideoque summa velocitatum genitarum tempore $C P$, sive dum arcus $C P$ describitur, est ut tota area $K C G F$, sed vis in octantibus sive velocitas quæ in octante generatur durante tempore $P p$, est $\frac{T P \times P p}{2}$,

quia eo in loco is est valor areæ $F K k f$, qui valor est ipse valor areæ $P T p$, ergo si singulis momentis $P p$ similis velocitas generaretur, summa velocitatem genitarum tempore $C P$ foret area $C T P$ sive $\frac{1}{2} T P \times C P$, ergo velocitas quam vis maxima generat, est ad eam quam vires veræ generant, tempore utrinque eodem $C P$, ut $\frac{1}{2} T P \times C P$ ad $K C G F$.

(P) Huic Lunæ velocitati quæ areæ momento mediocri est analoga. Areæ momentum mediocre illud est quod Luna dato exiguo tempore verteretur si uniformi velocitate toto suo tempore ferretur, cumque Luna per vim $E L$ certis in locis plus minusve acceleretur, areæ momentum, seu ea areæ particula quæ dato exiguo tempore describitur, nunc major nunc minor est; sed cum

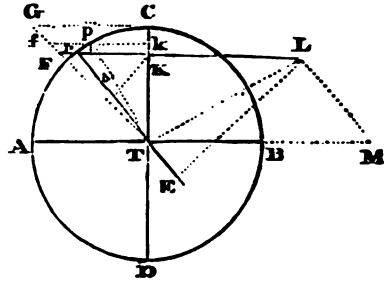
orbis lunaris circularis censeatur, areæ momenta sunt ut arcus qui sunt eorum bases, cumque iisdem temporibus illa momenta illique arcus describantur, sunt ut velocitates quibus describuntur. Hinc pro arearum momentis ipsæ velocitatum rationes assumuntur.

(°) * Addatur et auferatur dimidium velocitatis alterius. Hic assumit Newtonus velocitatem medicrem, eam nempe quæ orbita lunaris tempore suo periodico uniformiter describeretur esse mediam proportionalem arithmetice inter velocitatem minimam et maximam. Hanc tamen propositionem quasi evidentem assumere non licuit, si enim v. gr. diutius durarent parvæ velocitates quàm magnæ, velocitas medicris propior foret parvis velocitatibus quàm magnis; hinc exponenda est prius ratio quæ crescunt illæ velocitates, ut possimus asserere medicrem velocitatem Lunæ esse mediam arithmetice inter extremas. Quod quidem efficere conabimur problemate huic propositioni mox subjungendo.

(r) * Vel quod perinde est ut quadratum sinûs $P K$ ad quadratum radii $T P$ area $T C G$ est ad aream $T K F$ ut quad. $T C$ ad quad. $T K$ et dividendo $T C G$ — $T K F$ (sive $F K C G$) ad $T C G$ ut $T C^2$ — $T K^2$ (sive $P K^2$) ad $T C^2$.

(s) * Id est ut $P d$ ad $T P$ est $P d$ ad $P K$ ut $P K$ ad $T P$ propter similitudinem triangulorum $P K d$, $P T K$, ergo per compositionem rationum est $P d$ ad $T P$ ut $P K^2$ ad $T P^2$.

Hæc omnia ita se habent, ex hypothesi quod Sol et Terra quiescant, et Luna tempore synodico dierum 27. hor. 7. min. 49. revoluitur. Cum autem periodus synodica lunaris verè sit dierum 29. hor. 12. et min. 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{1100}{1101}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{1100}{1102}$. Ideoque momentum areæ in quadraturâ Lunæ erit ad ejus momentum in syzygiâ ut 11023 — 50 ad 11023 + 50, seu 10973 ad 11073, et ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad 10973 + P d, (*) existente videlicet T P æquali 100.

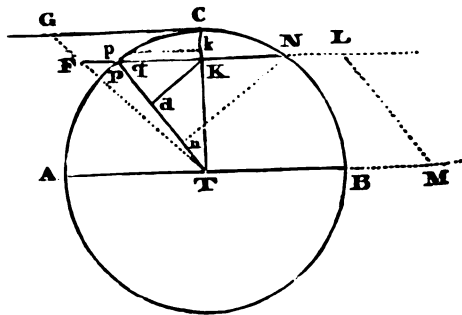


Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proximè (") ut summa numeri 219,46 et sinûs versi duplicatæ distantie Lunæ a quadraturâ proximâ, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi variatio in octantibus est magnitudinis mediocris. (x) Sin

(*) • Existente videlicet T P æquali 100: sequitur ex præcedentibus quod illud quod debet addi ad momentum minimum 10973 est ad 100 ut est P d ad P T, si ergo P T sit æqualis numero 100 erit P d æqualis illi numero qui debet addi ad momenti minimi valorem.

(") • Ut summa numeri 219,46 et sinûs versi duplicatæ distantie Lunæ a quadraturâ proximâ in circulo cujus radius est unitas; areæ momentum in puncto P est ut 10973 + P d, est autem P d dimidium sinûs versi duplicatæ distantie Lunæ a quadraturâ proximâ, nam dicatur N punctum in quo linea P K L secat circumulum, erit arcus P C N duplus distantie P C a quadraturâ proximâ, ductâque N n perpendiculari in radium P T erit P n sinûs versus duplicatæ illius distantie, sed cum N n et K d sint perpendiculares in eandem lineam ideoque parallele, et sit punctum K medium lineæ P N, erit etiam d medium lineæ P n, eritque P d = $\frac{1}{2}$ P n, sive erit P d dimidium sinûs versi duplicatæ distantie Lunæ a quadraturâ proximâ, est ergo momentum areæ ut summa numeri 10973 + $\frac{1}{2}$ P n existente radio 100, seu ut hujus quantitatis duplum 21946 + P n ideoque si radius sit 1 ut 219,46 + P n,

(x) • 112. Sin variatio ibi major sit, &c. Manente eadem hypothesi, Lunæ orbem esse circulem et Lunam aliam non pati irregularitatem præter eam quæ ab eâ parte actionis Solis nascitur quæ per lineam E L designatur, variatio Lunæ erit arcus interceptus inter locum in quo Luna esse deberet si velocitate suâ mediocri



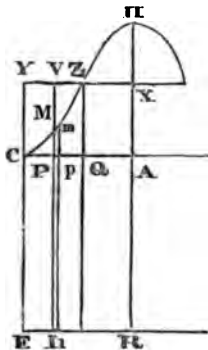
moveretur tempore dato C P, et locum in quo reverà est tunc temporis, cujus quidem variationis condiciones ex problemate sequenti exponere facile erit.

variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui sinus ille versus in eadem ratione.

PROBLEMA.

Ex hypothesibus et demonstratis in Propositione hac XXVI. exponere rationem secundum quam describuntur areæ C T P A momenta.

Designet recta C A (in 2^{da} figurâ) tempus quo arcus C A describitur, erigantur per singula puncta P rectæ P M perpendiculares in C A et proportionales velocitati tempore C P per vim E L genitæ; per ea quæ in hac Propositione demonstrantur independenter ab his, illæ velocitates in punctis P arcus C P sunt ut trapezia F K C G correspondentia, illa verò trapezia sunt ut sinus versi duplicatæ distantie Lunæ a quadraturâ proximâ, sive ut sinus versus arcus dupli C P, (ut mox in notis explicabitur) fiant ergo illæ perpendiculares P M æquales sinui verso arcus 2 C P, ultima perpendicularis A H erit æqualis ipsi diametro A B, quia est sinus versus dupli quadrantis; ducatur curva C M H per omnium perpendicularium vertices transiens, ducatur etiam A R perpendicularis ad C A, sitque A H ad A R ut velocitas ultimò acquisita in A ad velocitatem uniformem quâ Luna ferretur si



vis E L omninò non ageret, absolvaturque parallelogrammum A R E C, productaque lineâ M P usque ad lineam R E tota linea I M erit ut velocitas Lunæ tempore C P, et ducta linea quæproxima m p i erit area M P I m p i ut area descripta tempore P p, et tota area R E C M H repræsentabit totam aream tempore C A descriptam; denique secetur A H in X et ducatur X Y parallela C A quæ secet curvam C M H in Z et ex puncto Z ducatur ordinata Z Q. Liquet quod si punctum X ita sit assumptum ut parallelogrammum X R E Y sit æquale mixtilineo H A R E C M H, erit X R velocitas Lunæ mediocris, et C Q tempus quo Luna a quadraturâ profecta ad eam velocitatem mediocrem perveniet, quod quidem ex ipsâ constructione

liquet. Jam autem dico quod illud punctum X incidet in medio lineæ A H, ita ut hæc velocitas mediocris X R sit media proportionalis arithmetica inter R A et R H et præterea quod punctum Q cadet in medio inter A et C, ita ut ea celeritas mediocris in octante obtineatur, (saltem si medium arcus medio temporis respondeat, quod proximè verum est juxta notam 110 præcedentem).

Ut obtineatur itaque area H A P C M H, dicatur v arcus C P et dicatur m v recta C P quæ arcui C P est proportionalis (saltem quam proximè per not. 110.) et P p sit m d v, sinus rectus P K arcus C P dicatur y, sinus verè totalis sit r. Ex notis trigonometriæ principii sinus versus dupli arcus C P est $\frac{2yy}{r}$, ergo

ordinata P M ei æqualis est $\frac{2yy}{r}$, et elementum

areæ sive M P p m est $\frac{2yy}{r} m d v$, sed ex notâ

proprietas circuli est $\sqrt{rr-yy}$ ad r ut d y ad d v, est ergo d v = $\frac{r d y}{\sqrt{rr-yy}}$ itaque areæ

elementum evadit $\frac{2 m y y d y}{\sqrt{rr-yy}}$ conferatur illud

elementum cum elemento areæ circuli, radio T C descripti, dicatur C K, z, K k, d z, elementum P p k K est y d z, sed est T K ($\sqrt{rr-yy}$) ad P K (y) ut P q (d y) ad q p (d z) hinc d z = $\frac{y d y}{\sqrt{rr-yy}}$ et elementum a-

reæ circuli fit $\frac{y y d y}{\sqrt{rr-yy}}$ quod elementum est

ad elementum correspondens areæ H A P C M H ut 1 ad 2 m, hinc tota hæc area est ad aream quadrantis T C P A ut 2 m ad 1, sive si totus arcus C P A dicatur c et recta C P A dicatur m c, area H A P C M H erit m r c. Ergo si linea A R quæ designat velocitatem uniformem Lunæ, cum nulla foret vis E L, dicatur l, area A R E C erit m l c et tota area H A R E C H erit m l c + m r c, sive æqualis parallelogrammo cujus unum latus foret m c, alterum l + r, sed R E ex constructione est æqualis m c, ergo si sumatur R X = l + r parallelogrammum X R E Z erit æquale mixtilineo H A R E C M H, ideòque erit R X sive l + r velocitas Lunæ mediocris, sed erat A H = 2 r, ideòque R H = l + 2 r est ergo R X (l + r) media proportionalis arithmetice inter R A (l) et R H (l + 2 r), ergo velocitas mediocris Lunæ est media proportionalis arithmetice inter minimam velocitatem Lunæ (l) et maximam (l + 2 r).

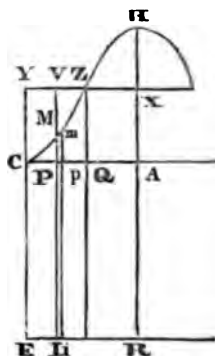
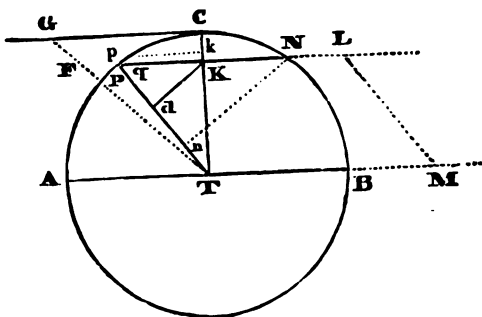
Quoniam verò ordinata Z Q = A X = r est sinus versus arcus dupli C P, et est r sinus versus arcus quadrantalis, ergo in hoc casu C P ejus

dimidius est octans circuli, in octante itaque obtinetur velocitas quæ est æqualis velocitati mediocri Lunæ. Quæ quidem in notâ superiore q demonstranda esse dixeramus.

Ex hujus autem problematis constructione liquet aream per velocitatem mediocrem Lunæ descriptam tempore C P, exprimi per aream Y E I V, et ejus valorem esse $m l v + m r v$, dum area verè per Lunam descripta exprimitur per spatium mixtilineum C E I M; spatium

3°. Quoniam quantitates $l c + r c$, et arcus quadrantis C P A sunt quantitates constantes, manifestum est quod variationes in omnibus punctis P, sunt ut $P K \times T K$, sive ut factum sinûs arcûs C P in ejus cosinum.

4°. Rectangulum $T K \times P K$ est maximum ubi punctum P est in octante, quod demonstratur eo modo quem in notâ 111. præcedente videre licet, hinc variatio maxima est in octantibus,



C E I P est $m l v$, spatium verò C P M, est ad aream C P K ut 2 m ad 1; tota area C T P est $\frac{r v}{2}$, spatium P K T est $\frac{y \times K T}{2}$, ergo area

C P K est $\frac{r v - y \times K T}{2}$, est itaque spatium

C P M = $m r v - m y \times K T$ et tota area C E I M est $m l v + m r v - m y \times K T$; unde liquet differentiam inter aream per velocitatem mediocrem descriptam et aream reverà descriptam esse $m y \times K T$, quâ deficit area reverà descripta, ab eâ quæ per mediocrem motum percurra censetur.

Hinc 1°. liquet variationem debere subtrahi ex motu medio a quadraturâ ad syzygiam, illam evanescere in syzygiâ A, quia illic $m y \times K T = 0$, a syzygiâ variationem addi debere motui medio, ut patet ex figuræ constructione.

2°. Ut quantitas $m l c + m r c$ est ad rectangulum $y K \times T K$, ita est quadrans circuli C P A T ad aream quæ (propter variationem) detrahenda est ex areâ C T P motu mediocri descripta, sive, quoniam C P A T est dimidium facti radii in arcum C P A, et ea area detrahenda est etiam dimidium facti radii in arcum variationis, erit etiam ut $m l c + m r c$ ad $m y \times T K$ ita arcus quadrantis C P A sive c ad arcum variationis qui itaque erit $\frac{y \times T K}{1 + r}$ sive $\frac{P K \times T K}{1 + r}$.

unde fuit hoc paradoxum, ubi vis E L maxime est, illic maximè retardatur Luna respectu motu sui medii.

5°. Si variatio maxima mutetur, augeri debet vel minui sinus ille versus, qui velocitatem genitam in singulis punctis exprimit in eadem ratione; nam velocitas quæ generatur, exprimitur per aream C K F G (vide figuram textûs) in octantibus autem punctum F coincidit cum puncto P, et area C K F G illic evadit æqualis areæ P K T, ergo velocitas in octantibus genita est ut T K per P K, sed area quæ variationem illic exprimit est etiam ut T K per P K, (per hujusce notæ Corol. 3.) ergo velocitas in octantibus est ut ipsa variatio in octantibus, sed velocitas in octantibus est ad velocitatem in quovis alio puncto in ratione datâ radii ad sinum versus duplicatæ distantie ejus dati puncti a quadraturâ proximâ, ergo hæc velocitas crescit ut velocitas in octantibus, ideôque etiam ut variatio maxima, ergo sinus ille versus illi velocitati proportionalis debet augeri vel minui in eadem ratione.

Verùm ex actione T M aliam variationis portionem oriri ostenditur Prop. XXIX., illam autem portionem etiam futuram ut $T K \times P K$ per not. 114. mox adjiciendam constabit, ergo tota variatio erit ut $T K \times P K$, sive, in octantibus, ut velocitas, quare manet hujus Corollarij veritas si agatur de totâ variatione.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam a Terrâ.

(?) Area, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis momentis describit, est ut motus horarius Lunæ et quadratum distantiae Lunæ a Terrâ conjunctim; et propterea distantia Lunæ a Terrâ est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione areæ directè et subduplicatâ ratione motus horarii inversè. Q. e. i.

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciproce ut ipsius distantia a Terrâ. (*) Tentent astronomi quàm probè hæc Regula cum phænomenis congruat.

Corol. 2. (*) Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs ex phænomenis quàm antehac definiri potest.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Invenire diametros orbis in quo Luna, sine excentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectory, quam mobile, si secundum trajectory illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directè et quadratum velocitatis inversè. (b) Curvaturas linearum pono esse inter se in ultimâ

(?) 115. Area quam Luna singulis momentis describit est ut motus horarius Lunæ et quadratum distantiae Lunæ a Terra. Designet TP p aream



descriptam a Lunâ quovis tempusculo, sitque P p arcus curvæ cujuslibet; centro T radio T p describatur arcus circularis P q qui pro rectâ perpendiculari in lineam T p assumi potest, ideòque area a Lunâ descripta erit ut $TP \times p q$, gradus autem, aut minuta in arcu p q contenta mensurabunt motum angularem Lunæ dato tempore, qui æqualis est motui horario Lunæ, ideòque longitudo absoluta ejus arcus p q erit ut ejus radius T p et motus horarius Lunæ conjunctim, hinc area $TP \times p q$ erit ut TP^2 et motus horarius Lunæ conjunctim.

(*) * Tentent astronomi. Observando nempe motum horarium Lunæ in variis temporibus ejus periodi et simul angulum inter Solem et Lunam interceptum ut inde habeatur ejus distantia PTC a quadraturâ proximâ C, inde enim poterunt colligi numeri proportionales distantis PT Lunæ

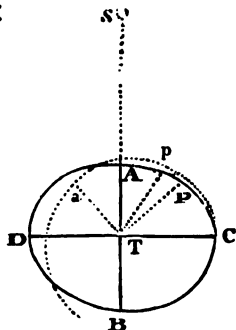
a Terrâ: nam, per præced. Prop. area a Lunâ descripta, est ut summa numeri 219.46 et sinus versi dupli anguli PTC quæ si dividatur per motum horarium qui observatione obtinetur, radix quadrata ejus quotientis erit ut distantia PT, et inversè ut Lunæ diametri apparentes. Quare si hi etiam observati fuerint, collatio observationum cum numeris sic inventis Regulam Newtonianam illustrabit.

(*) * Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs quàm antehac definiri potest. Orbis lunaris figura definiri potest per observationes diametrorum apparentium Lunæ in datis angulis a puncto quodam fixo; sicque cum distantis Lunæ sint his diametris apparentibus reciproce, longitudines distantis Lunæ proportionales in lateribus eorum angulorum secari possunt et per eas extremitates duci potest curva orbi lunari similis: sed observatio diametri cujuslibet corporis lucidi est nimis lubrica ut satis tuta esse possit hæc methodus; faciliùs tutiusque observabuntur motus horarius Lunæ ejusque distantia a quadraturâ proximâ, hinc itaque accuratiùs cognitâ ratione distantiarum Lunæ a Terrâ in datis angulis, accuratiùs definitur quàm antehac orbis lunaris.

(b) Curvaturas linearum, &c. Curvatura linæ est ejus deflexio a tangente, et æstimari

gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum 178725. vis mediocris M L, quæ in quadraturis est P T vel T K et Lunam trahit in Terram, erit 1000, et vis mediocris T M in syzygiis erit 3000; de quâ, si vis mediocris M L subducatur, manebit vis 2000 quâ Luna in syzygiis distrahitur a Terrâ, quamque jam ante nominavi 2 P K. ^(f) Velocitas autem Lunæ in syzygiis A et B est ad ipsius velocitatem in quadraturis C et D, ut C T ad A T et momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit in syzygiis ad momentum ejusdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut 11073 C T ad 10973 A T. ^(g) Sumatur hæc ratio bis inversè et ratio prior semel directè, et fiet curvatura orbis lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725 \times A T q \times C T q \times N - 120406729 \times 2000 A T q q \times C T$ ad $122611329 \times 178725 A T q \times C T q \times N + 122611329 \times 1000 C T q q \times A T$, ^(h) i. e. ut 2151969 $\times A T \times C T \times N - 24081 A T$ cub. ad 2191371 $\times A T \times C T \times N + 12261 C T$ cub.

Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice assumamus ellipsin D B C A, in cujus centro T Terra collocetur, et ejus axis major D C quadraturis, minor A B syzygiis interjaceat. ⁽ⁱ⁾ Cùm autem planum ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, et trajectory, cujus curvaturam consideramus, describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit figura, quam Luna in ellipsi illâ revolvendo describit in hoc plano, hoc est figura C p a, cujus puncta singula p



$$\frac{178725 N^2}{C T^2} + \frac{1000 C T}{N}, \text{ sive omnia dividendo}$$

per N^2 est attractio in syzygiis $\frac{178725}{A T^2} - \frac{2000 A T}{N^2 \times N}$ et in quadraturis $\frac{178725}{C T^2} + \frac{1000 C T}{N^2 \times N}$; quoniam verò N est medium arithmeticum inter A T et C T quorum differentia est exigua, pro medio geometrico inter eas quantitates proximè sumi potest, ita ut fit $N^2 = A T \times C T$, quo valore substituto loco N^2 fit attractio in syzygiis $\frac{178725}{A T^2} - \frac{2000}{C T \times N}$ et in quadraturis $\frac{178725}{C T^2} + \frac{1000}{A T \times N}$ et reductione factâ ad eandem denominatores sunt istæ quantitates ut $178725 N \times C T^2 - 2000 A T^2 \times C T$ ad $178725 N \times A T^2 + 1000 C T^2 \times A T$.

^(f) * *Velocitas Lunæ, &c.* Quoniam in syzygiis et quadraturis arcus quos Luna describit sunt perpendiculares radiis A T, C T, areæ momenta dato tempore illic descripta sunt ut illi arcus et radii A T, C T conjunctim, ii arcus, dato tempore descripti, sunt ut velocitates, ergo velocitates in syzygiis et quadraturis sunt ut arearum descriptarum momenta et radii inversè.

^(g) * *Sumatur ratio duplicata velocitatum inversè et ratio simplex attractione directè, factâque multiplicatione ut fractiones deleantur fiet curvatura orbis lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis, &c.*

^(h) * *I. e. ut.* Dividendo per $A T \times C T$, numeros signo \times conjunctos in se invicem multiplicando neglectisque quatuor ultimis productorum cifris.

⁽ⁱ⁾ * *Cùm autem planum ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur. Axis enim*

(^m) et quod curvatura ellipseos in A sit ad curvaturam circuli illius, in duplicatâ ratione T A ad T C; et (^o) curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro T intervallo T C descripti, ut T C ad T A; (^p) hujus autem curvatura ad curvaturam ellipseos in C, in duplicatâ ratione T A ad T C; (^q) et differentia inter curvaturam ellipseos in vertice C et curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ C p a in vertice C et curvaturam ejusdem circuli, in duplicatâ ratione anguli C T p ad angulum C T P. Quæ quidem rationes ex sinubus angulorum contactûs ac differentiarum angulorum facillè colliguntur. (^r) His autem

circuli ut m r — m n sive n r aut R N ad m r, simili modo patet quod curvatura circuli radio T A descripti est ad differentiam inter curvaturam ellipseos in vertice A et curvaturam ejusdem circuli ut M R ad N R. Ideoque compositis rationibus differentia inter curvaturam orbis C p a in a et curvaturam circuli radio T A descripti, est ad differentiam inter curvaturam ellipseos in A et curvaturam ejusdem circuli ut M R, ad m r, hoc est, (Cor. 1. Lem. XI. Lib. I.) in ratione duplicatâ arcûs R A ad arcum r a, sive (per const.) in ratione duplicatâ anguli C T P ad angulum C T p.

(^o) * Et quod curvatura ellipseos in A, &c. Curvatura ellipseos in A est ad curvaturam circuli radio T A descripti in ratione M N ad M R; ducatur verò N X tangenti parallela, et axi occurrans in X, et pariter R Z, erit per proprietatem ellipseos A X × X B ad N X² ut T A² ad T C², et per proprietatem circuli erit A Z × Z B = R Z², sed quia sumuntur quantitates nascentes est A X = M N, A Z = M R, X B = A B = Z B et N X = R Z, quibus valoribus suo loco substitutis prima proportio evadit M N × A B : M R × A B :: T A² : T C² ideoque est M N ad M R, sive curvatura ellipseos ad curvaturam circuli in duplicatâ ratione T A ad T C.

(^o) * Curvatura circuli, &c. Nam circulorum curvaturæ sunt inversè ut eorum radii (not. 121. Lib. I.)

(^p) * Hujus autem curvatura potest demonstrari eo ipso modo quo demonstravimus rationem curvaturæ ellipseos in A ad curvaturam circuli radio T A descripti (not. ^a).

(^q) * Et differentiam inter curvaturam ellipseos in vertice C, &c. Demonstratio ferè eadem est ac in notâ (^m): centro C intervallo T C describatur circuli arcus C R r, sit arcus C R ad arcum C r, in ratione anguli C T p ad angulum C T p ducatur tangens C M m, et radii T R M, T r m quorum prior occurrat ellipsi in N, posterior curvæ C p a in n, erit N R = n r propter aequales T N, T n per curvæ const. et radios aequales T R, T r; evanescentibus arcibus C N, C n, curvatura ellipseos in C est ad curvaturam circuli radio T C descripti ut M N ad M R, ideoque curvaturarum ellipseos et circuli differentia est ad curvaturam circuli ut R N ad M R,

simili modo curvatura circuli est ad curvaturam orbis C p a ut m r ad m n, ideoque curvatura circuli ad differentiam curvaturarum orbis C p a et circuli ut m r ad r n: itaque compositis rationibus erit curvaturarum ellipseos et circuli differentia ad curvaturarum orbis C p a et circuli differentiam ut m r ad M R hoc est in ratione duplicatâ arcûs r C ad arcum R C, sive in ratione duplicatâ anguli C T p ad angulum C T P.

(^r) His autem inter se collatis, &c. Ut pateat ordo quo istæ rationes componuntur, dicatur s tempus revolutionis synodicæ, et t tempus revolutionis periodicæ, eritque angulus C T P ad angulum C T p ut t ad s.

(1) Differentia curvaturarum orbis C p a in a et circuli radio T A descripti, est ad differentiam curvaturarum ellipseos in A et ejusdem circuli ut t t ad s s (not. ^m).

(2) Curvatura ellipseos in A ad curvaturam circuli radio T A descripti ut T A² ad T C² (not. ^a).

(3) Hinc dividendo, differentia curvaturarum ellipseos in A et circuli est ad curvaturam ejusdem circuli ut T C² — T A² ad T C²: et per compositionem 1^{am} et 3^{am} proportionis.

(4) Est differentia curvaturarum orbis C p a in a et circuli radio T A descripti ad curvaturam ejusdem circuli ut s t × T A² — T C² ad s s × T C².

(5) Hinc, convertendo curvatura orbis C p a in a ad curvaturam circuli radio T A descripti ut s s T C² — t t × T C² — T A² ad s s × T C².

(6) Curvatura circuli radio T A descripti, ad curvaturam circuli radio T C descripti ut T C ad T A.

(7) Curvatura circuli radio T C descripti ad curvaturam ellipseos in C ut T A² ad T C².

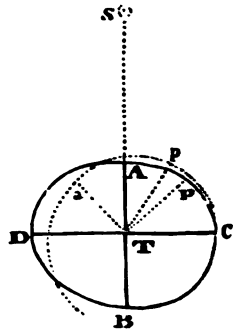
(8) Hinc, convertendo curvatura circuli radio T C descripti ad differentiam curvaturarum ejus circuli et ellipseos in C ut T A² ad T C² — T A².

(9) Differentia curvaturarum ellipseos in C et ejus circuli radio T C descripti ad differentiam curvaturarum figuræ C p a in C et ejusdem circuli ut s s ad t t; et per compositionem 8^{am} et 9^{am} proportionis est.

(10) Curvatura circuli radio T C descripti ad differentiam curvaturarum figuræ C p a in C et

inter se collatis, prodit curvatura figuræ C p a in a ad ipsius curvaturam in C, ut A T cub. + $\frac{16824}{100000}$ C T q \times A T ad C T cub. + $\frac{16824}{100000}$ A T q \times C T. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum C T P et C T p applicatam ad quadratum anguli minoris C T P, seu (quod perinde est) differentiam quadratorum temporum 27^d. 7^h. 43', et 29^d. 12^h. 44', applicatam ad quadratum temporis 27^d. 7^h. 43'.

Igitur cùm a designet syzygiam Lunæ, et C ipsius quadraturam, proportio jam inventa eadem esse debet cum proportionem curvaturæ orbis Lunæ in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio C T ad A T, duco extrema et media in se invicem. Et termini prodeuntes ad A T \times C T applicati, fiunt 2062.79 C T q q — 2151969 N \times C T cub. + 368676 N \times A T \times C T q + 36342 A T q \times C T q — 362047 N \times A T q \times C T + 2191371 N \times A T cub. + 4051.4 A T q q = 0. Hic pro terminorum A T et C T semisummâ N scribo 1, et pro eorundem semi-differentiâ ponendo x, fit C T = 1 + x, et A T = 1 — x: (*) quibus in æquatione scriptis, et æquatione prodeunte resolutâ, obtinetur x æqualis 0.00719, et inde semi-diameter C T fit 1.00719, et semi-diameter A T 0.99281, qui numeri sunt ut 70 $\frac{1}{3}$ et 69 $\frac{1}{3}$ quam proximè. (†) Est igitur distantia Lunæ a Terrâ in syzygiis ad ipsius distantiam in quadraturis (sepositâ scilicet excentricitatis consideratione) ut 69 $\frac{1}{3}$ ad 70 $\frac{1}{3}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.



ejusdem circuli ut T A \times s \times s ad t t \times T C \times — T A \times .

(11) Et convertendo curvaturam circuli radio T C descripti ad curvaturam figuræ C p a in C ut T A \times s \times s ad T A \times s \times s + t t \times T C \times — T A \times .

Hinc tandem ex æquo et per compositionem 5^m. 6^m et hujus 11^m. proportionis, est curvatura orbis C p a in a, ad ejus curvaturam in C ut

$$\begin{aligned} & s^2 \times T C^2 - t t \times T C^2 - T A^2 \times T C^2 \\ & \times T A^2 \times s^2 \text{ ad } s^2 \times T C^2 \times T A \times (T A^2 \\ & \times s^2 + t t \times (T C^2 - T A^2)) \text{ quæ divisa} \\ & \text{per } s^2 \times T C \times T A \text{ fiunt ut } \frac{s^2 - t t}{T C^2 \times T A} \\ & + \frac{t^2 \times T A^3 \text{ ad } s^2 - t t \times T A^2 \times T C}{t t \times T C^3}, \text{ omnibusque di-} \\ & \text{visis per } t t \text{ et inverso terminorum ordine fiunt} \\ & \text{ut } T A^3 + \frac{s^2 - t t}{t t} \times T C^2 \times T A \text{ ad} \\ & T C^3 + \frac{s^2 - t t}{t t} \times T A^2 \times T C. \text{ Q. e. i.} \end{aligned}$$

(*) Quibus in æquatione scriptis. Hæc æquatio fit 42456.19 x \times 4 — 5082017.44 x \times 3 + 148262.14 x \times 2 — 12307251.44 x + 88487.19 = 0, sed cùm x debeat esse quantitas exigua, omnes terminos præter duos ultimos negligit, et ex æquatione 12307251.44 x = 88487.19 valorem obtinet x = $\frac{88487.19}{12307251.44}$ = 0.00719.

(†) * Est igitur distantia Lunæ a Terrâ, &c. Astronomis est cognitum, quod si distantia mediocris Lunæ a Terrâ incidat in tempus syzygiarum, ea distantia mediocris minor erit quàm si incidat in tempus quadraturarum; clar. Halles ex observationibus astronomicis deduxit, distantiam mediocrem Lunæ a Terrâ in syzygiis esse ad ipsius distantiam mediocrem in quadraturis ut 44 $\frac{1}{2}$ ad 45 $\frac{1}{2}$; quod si vel tantillum propter observationum lubricitatem de hoc ultimo numero detrahatur, facillè accedit hæc ratio ad eam quam Newtonus deprehendit suo calculo.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire variationem Lunæ.

(^o) Oritur hæc inæqualitas partim ex formâ ellipticâ orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto describit. Si Luna P in ellipsi D B C A circa Terram in centro ellipseos quiescentem moveretur, et radio T P ad Terram ducto describeret aream C T P tempori proportionalem: esset autem ellipseos semi-diameter maxima C T ad semi-diametrum minimam T A ut 70 ad 69: (¹) foret tangens anguli C T P ad tangentem anguli motûs medii a quad-

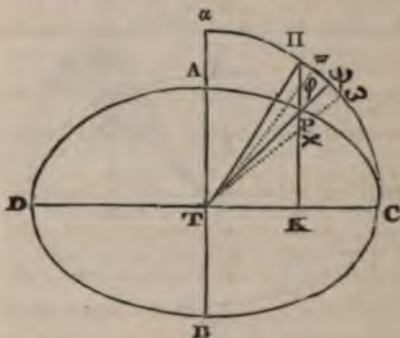
(^o) * *Oritur hæc inæqualitas, &c.* Pergit Newtonus in hypothese quod semotâ Solis actione orbis Lunæ circularis foret; in præcedenti verò Propositione, determinavit quamnam mutationem induceret illi circulo vis Solis, quatenus ea ejus portio assumitur quæ ad centrum Terræ spectat et cum gravitate Lunæ versus Terram sociatur; itaque, sumpto novam figuram orbis lunaris ad ellipsim posse revocari, demonstrat in Prop. præcedente eam ellipsim talem esse ut axis major sit ad minorem ut 70 ad 69; motus autem Lunæ in tali ellipsi debet fieri ita ut areæ descriptæ circa centrum Terræ sint temporibus proportionales, quia vires quæ assumuntur, ad id centrum diriguntur; cùmque areæ illæ ellipticæ, angulis in centro factis proportionales non sint, sequitur illos angulos in centro facto temporibus proportionales non esse, ideòque aliquid corrigendum esse motui medio Lunæ, in quo anguli in centro Terræ facti proportionales temporibus assumuntur, ut habeatur Lunæ motus verus; et hæc correctio constituet partem variationis, quæ est, in hac hypothese, arcus interceptus inter locum medium Lunæ et locum ejus verum, et hæc pars variationis ex formâ ellipticâ, quam assumit orbis lunaris per Solis actionem, oritur.

Altera pars variationis oritur ex eâ actione Solis parte quam consideravit Newtonus Prop. XXVI. et quâ fit ut ipsæ areæ a Lunâ descriptæ temporibus non sint proportionales; area itaque tempori proportionalis corrigenda est, idque detrahendum vel addendum quod debetur illi actioni, quodque per constructionem Probl. nostri n. 112. determinare facillimum erit; quam quidem constructionem non dedit Newtonus, quasi mediocribus uteretur quantitibus ex æquo, ut aiunt, et bono assumptis, verum vix dubitandum quin ad hanc vel similem constructionem, respexerit, si enim non erant casus quibus hæc media sine demonstratione assumi possent a viro summè accurato et perspicace.

(¹) * *Foret anguli tangens.* Sit C A D B ellipsis quam Luna describit, ita ut areæ circa

centrum T sint temporibus proportionales, describatur circulus eodem centro, radio T C, in ejus circuli circumferentiâ moveatur Luna motu medio, sumaturque in eo circulo arcus C Π tempori cuivis dato proportionalis, ducta ordinata Π P K, dico quod area elliptica T C P erit tempori proportionalis, hoc est quod tota area elliptica erit ad eum sectorem T C P ut est tempus periodicum Lunæ ad tempus datum.

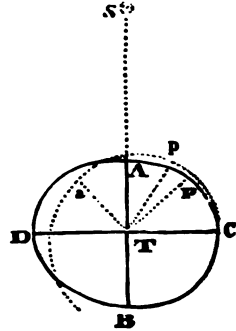
Est enim tota circuli circumferentia ad arcum C Π, sive totus circulus ad aream C T Π, ut tempus periodicum totum ad tempus datum ex constructione, sed ex notâ circuli et ellipseos proprietate, est tota area elliptica ad totam aream circuli ut T A ad C T, et pariter est sector



C T P ad C T Π ut T A ad C T (nam triangula rectilinea T P K, T Π K sunt ut bases P K, Π K; areæ curvilineæ C P K, C Π K sunt etiam, ex notâ ellipseos et circuli proprietate ut P K ad Π K, ergo toti sectores C T P, C T Π sunt ut P K ad Π K, quæ sunt ut T A ad C T,) ergo tota area elliptica est ad aream circuli ut sector C T P ad C T Π, et alternando, tota area elliptica ad sectorem C T P, ut est circuli area ad C T Π, seu ut est tempus periodicum, ad tempus datum.

Si ergo area C T P sit tempori proportionalis,

raturâ C computati, ut ellipseos semi-diameter T A ad ejusdem semi-diametrum T C seu 69 ad 70. (*) Debet autem descriptio areæ C T P, in progressu Lunæ a quadraturâ ad syzygiam, eâ ratione accelerari, ut ejus momentum in syzygiâ Lunæ sit ad ejus momentum in quadraturâ ut 11073 ad 10973, utque excessus momenti in loco quovis intermedio P supra momentum in quadraturâ sit ut quadratum sinus anguli C T P. Id quod satis accuratè fiet, si tangens anguli diminuatur in subduplicatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli C T P jam erit ad tangentem motûs medii ut 68,6877 ad 70, et angulus C T P in octantibus, ubi motus medius est 45°. invenietur 44°. 27'. 28". qui subductus de angulo motûs medii 45°. (*) relinquit variationem maximam 32'. 32". Hæc



motus Lunæ qui a Terrâ videri debuisset sub angulo C T P si Luna motu medio fuisset lata, videbitur sub angulo C T P, et si linea T K pro radio assumatur, erit K P tangens anguli C T P, et K P tangens anguli C T P, sed est P K ad P K ut T A ad C T, ergo tangens an-

guli C T P quæ secet lineam P K in φ triangulum P T φ simile erit triangulo T K φ, sive propter exiguitatem anguli P T φ triangulum P T φ simile erit triangulo T K P, hinc erit T K ad T P (r) sicut P φ = $\frac{K P \times T K}{1 + r}$ ad P φ

quod erit itaque $\frac{r \times P K}{1 + r}$, ideoque erit K φ
 $(= P K - P φ) = \frac{1 + r \times P K - r \times P K}{1 + r}$

$= \frac{1 \times P K}{1 + r}$, unde habetur hæc proportio

$1 + r : 1 :: P K : φ K$; si verò sumatur T K pro radio, erit P K tangens motûs medii et φ K tangens motûs medii imminuti hac variationis portione; debet minui in eadem ratione quam proxime tangens P K motus Lunæ in ellipsei apertate sit saltem in ratione paulo minore; cum itaque $1 + r$, sit medium arithmeticum inter $1 + 2r$ sive 11073 et 1 sive 10973, et ratio medii arithmetici ad minimum extremorum sit paulo major quàm medii geometrici ad

eum extremum, satis accurate fieri dicit si sumatur tangens P K ad tangentem anguli motûs veri Lunæ ut medium geometricum inter 11073 et 10973 ad 10973, sive in subduplicatâ ratione 11073 ad 10973; quæ est æqualis rationi 69 ad 68,6877; cum ergo sit P K ad P K ut 70 ad 69, et cum sit P K ad tangentem motûs Lunæ ultimò correcti ut 69 ad 68,6877, erit ex æquo tangens motûs medii ad tangentem motûs veri ut 70 ad 68,6877. Q. e. d.

guli C T P est ad tangentem anguli motûs medii ut T A ad T C seu 69 ad 70.

(*) Debet autem descriptio areæ, &c. Manentibus iis omnibus quæ in notis 112. et 113., exposita fuerunt, arcus variationis erit $\frac{P K \times T K}{1 + r}$ (per Cor. 2. not. 113.) sumatur ergo in arcu C P versus C arcus P φ = $\frac{P K \times T K}{1 + r}$ sive (quia in hac figura P respondet litteræ P in not. 112. assumptæ) = $\frac{P K \times T K}{1 + r}$, ducatur

(*) 114. Relinquit variationem maximam. Ex Cor. 4. not. 113. arcum variationis quæ

ita se haberent si Luna, pergendo a quadraturâ ad syzygiam, describeret angulum C T A graduum tantum nonaginta. Verùm ob motum Terræ, quo Sol in consequentia motu apparente transfertur, Luna, prius quam Solem assequitur, describit angulum C T a angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris synodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id est, in ratione $29^d. 12^h. 44'$. ad $27^d. 7^h. 43'$. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum T dilatantur in eâdem ratione, et variatio maxima quæ secus esset $32'. 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'. 10''$.

Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantia Solis a Terrâ, ^(a) neglectis differentiis quæ a curvaturâ orbis magni majorique Solis actione in Lunam falcata et novam quàm in gibbosam et plenam, oriri possint. ^(b) In aliis

pendet ex inæqualitate momentorum areæ, maximum esse in octantibus constat; eam autem variationis portionem quæ pendet ex formâ ellipticâ orbis lunaris, etiam maximam esse in octantibus hoc modo patet, producat T P in Ψ et cùm arcus $\Pi \Psi$ vix excedat semi-gradum ubi maximus est pro recta sumatur, erit triangulus $\Pi \Psi P$ similis triangulo T K P, sive T K Π , ideoque est T Π ad T K ut ΠP ad $\Pi \Psi$ qui erit ergo ubivis æqualis $\frac{\Pi P \times T K}{T \Pi}$, sed quoniam est ubivis 70 ad 69 ut ΠK ad P K, erit dividendo 70 ad 1 ut ΠK ad ΠP , ideoque est $\Pi P = \frac{\Pi K}{70}$ et arcus $\Pi \Psi$ erit $\frac{\Pi K \times T K}{70 T \Pi}$,

jam autem demonstratum est notâ 111. quod maximum hujus quantitatis $\Pi K \times T K$ est in octantibus, ergo arcus $\Pi \Psi$ sive ea variationis portio quæ pendet ex formâ ellipticâ orbis lunaris, est maxima in octantibus sicut et altera portio, ergo variatio tota est maxima in octantibus.

^(a) * Neglectis differentiis quæ a curvaturâ orbis magni oriri possint. Hactenus suppositum est, lineam D T C representare orbis magni portionem, et fieri quadraturas in punctis D et C; quod quidem absolute verum non est, quippe semi-diameter orbis lunaris sub angulo 10 circiter minorum a Sole videtur, unde arcus D C est 20' circiter et aliquam habet curvaturam, hinc revera utraque quadratura est circiter 20' propior conjunctioni quàm oppositioni, quæ consideratio hic neglecta est.

Majorique Solis actione in Lunam falcata et novam quàm in gibbosam et plenam, si vis Solis in punctum T exprimitur per $\frac{1}{S T^2}$ erit vis in

Lunam novam et falcata ut $\frac{1}{(S T - T A)^2}$ et

vis in Lunam plenam et gibbosam ut $\frac{1}{(S T + T A)^2}$

revocentur omnia ad communem denominationem, erit vis in punctum T ut $S T - T A$ $\frac{1}{S T + T A}$ \times $S T + T A$ $\frac{1}{S T - T A}$ sive $S T^4 - 2 S T^2 \times T A^2$

$+ T A^4$, vis in Lunam novam $S T^4 + 2 S T^2 \times T A + T A^2 \times S T^2$, vis in Lunam plenam $S T^4 - 2 S T^2 \times T A + S T^2 \times T A^2$; hinc excessus vis in Lunam novam supra vim mediocrem est $2 S T^2 \times T A + 3 S T^2 \times T A^2 - T A^4$; et excessus vis mediocris supra vim in Lunam plenam est $2 S T^2 \times T A - 3 S T^2 \times T A^2 + T A^4$, qui quidem excessus differunt, et prior posteriorem superat quantitate $6 S T^2 \times T A^2 - 2 T A^4$; verùm propter magnitudinem linæ S T præ lineâ T A, evanescit ferè hæc excessuum differentia respectu quantitatis communis $2 S T^2 \times T A$, ideo pro æqualibus fuerunt habiti.

^(b) In aliis distantis Solis a Terrâ. Duplex est causa quæ errores ab actione Solis pendentes mutet, primum vis Solis mediocris mutatur inversè ut quadrata distantiarum, et præterea cùm Sol celerior vel tardior fiat prout propior est vel remotior a Terrâ, Luna e converso ipsum tardius vel celerius attingit, unde mensis synodicus in perigæo Solis fit longior quàm idem mensis synodicus in apogæo; ex hac ultimâ causâ, si sola consideretur, fiet ut variatio maxima in ratione duplicatâ temporis revolutionis synodicæ crescat, quod quidem separatim demonstrandum de utraque variationis portione $\Pi \Psi$ et $\Psi \omega$; et quidem in octantibus cùm triangulum $\Pi P \Psi$ sit rectangulum isosceles, est $\Pi \Psi = \frac{\Pi P}{\sqrt{2}}$, est verò ΠP

$= \frac{a A}{\sqrt{2}}$ nam ex naturâ circuli et ellipsæos est $a T$ ad $A T$ ut ΠK ad P K et dividendo $a T$ ad $a A$ ut ΠK ad $\Pi P = \frac{a A \times \Pi K}{a T}$ sed in

octante est $\Pi K = \frac{a T}{\sqrt{2}}$ ergo $\Pi P = \frac{a A \times a T}{a T \sqrt{2}}$

$= \frac{a A}{\sqrt{2}}$ hinc $\Pi \Psi = \frac{a A}{2}$, est autem $a A$ effectus virium Solis Lunam retrahentium a suo circulo, durante quartâ parte temporis revolutionis synodicæ Lunæ, ergo si id tempus crescat manentibus iisdem viribus similiter agentibus,

distantiis Solis a Terrâ, variatio maxima est in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis synodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, et triplicatâ ratione distantie Solis a Terrâ inversè. (°) Ideoque in apogæo Solis variatio maxima est 33'. 14'', et in ejus peri-

effectus totus $\propto A$ erit ut quadratum temporis per quod illæ vires egerunt per Cor. 1. Lem. X. Lib. I. ideoque $\Pi \Psi$ crescit secundùm quadrata temporum.

Idem demonstrabitur de portione variationis $\Psi \propto$ quæ pendet ex acceleratione descriptionis areæ; quippe manentibus omnibus ut in not. 112. et fig. 3^a. recta CA majus tempus designare censeatur, et partes Pp tempuscula in eadem ratione longiora, lineæ PM designant velocitates genitas durante momento Pp , si ergo id momentum crescat viribus generatricibus iisdem manentibus, velocitates genitæ PM crescent in proportionem temporis, et quia $Pp \cdot M$ designat spatium illâ velocitate percursum, crescuntque et PM et Pp in ratione temporum, crescit $PM \cdot m$ in ratione duplicatâ temporum, cùmque singula elementa curvæ in eâ proportionem crescant, et tota area CAH , et ei æqualis $CAXY$, ejusque dimidia $CQZY$ in eadem proportionem crescent; ex quâ si detrahatur CQZ quod in eadem proportionem crevit, reliquum CZY quod areæ variationi maximæ $\Psi T \propto$ est proportionale, crescit etiam in eadem duplicatâ ratione temporum, manente itaque radio $T \propto$, ipse arcus $\Psi \propto$ crescit in duplicatâ ratione temporum.

Hinc cùm $\Pi \Psi$ crescat in duplicatâ ratione temporum, tum etiam $\Psi \propto$, summa itaque $\Pi \propto$ sive tota variatio crescit in eadem duplicatâ temporum ratione.

Dico præterea quod si spectetur imminutio actionis Solis propter auctam distantiam, variatio maxima decrescit in ratione triplicatâ distantiarum, nam designetur vis mediocris Solis per $\frac{1}{SK^2}$, est ex constructione SK ad TM ut vis

Solis sive ut $\frac{1}{SK^2}$ ad vim TM , ergo ea vis TM est ut $\frac{TM}{SK^3}$ manente ergo TM quæ est

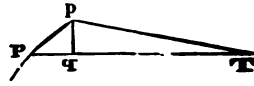
æqualis PT ; vis TM ex actione Solis pendens decrescit ut distantiarum cubus augetur; manente ergo tempore, sed vi mutatâ secundùm rationem triplicatam, eadem ferè ratione ac prius ostendetur utramque variationis maximæ partem $\Pi \Psi \propto$ et $\Psi \propto$ fore inversè in ratione triplicatâ distantiarum Solis; hincque in variis Solis a Terrâ distantiiis quæ in datis anni temporibus reocurrunt, variationes maximæ erunt inter se in ratione duplicatâ durationis mensis synodici eo tempore, et triplicatâ inversè distantie Solis a Terrâ.

(°) Ideoque, &c. Ex his et præcedentibus facile intelligitur Newtoni calculus, si prius hæc Principia revocentur.

1°. Si dicatur m distantia mediocris Solis,

sit $\pm e$ excessus vel defectus ejus distantie a mediocri distantia in loco quovis dato; denique dicatur s Solis motus horarius mediocris, dico quod Solis motus horarius in loco quovis sue orbitæ exprimitur per quantitatem $\frac{m^2 s}{m \pm e}$.

Sit enim T Terra; P Sol; TP p area hora tempore descripta, ejus areæ valor ubivis erit semper idem, sit p q arcus radio Tp descriptus,



qui ob exiguitatem sumi potest ut ipsum perpendicularum in basim PT demissum, ideoque ob areas ubivis æquales is arcus erit ubivis inversè ut basis TP , sed numerus graduum ejus arcus p q est directè ut is ipse arcus et inversè ut ejus radius Tp sive TP , ergo numerus graduum ejus arcus p q est in ratione duplicatâ inversè radii TP , is verò numerus exprimit motum Solis horarium, ergo Solis motus horarius, et inversè ut quadratum radii TP ; cùm ergo in distantia mediocri est $TP = m$, in quavis aliâ distantia est $TP = m \pm e$, ergo est $\frac{1}{m \pm e}$ ad

$\frac{1}{(m \pm e)^2}$ ut s ad $\frac{s m^2}{(m \pm e)^2}$ quod exprimit motum horarium Solis in quavis distantia TP .

In distantia mediocri evanescit quantitas $\pm e$ ideoque motus horarius illic evadit $\frac{m^2 s}{m^2} = s$ secundùm hypothesim.

2°. Posito Lunam semper moveri motu suo horario mediocri, qui dicatur l , sique p ejus tempus periodicum inter fixas, duratio mensis synodici quovis in loco orbitæ Telluris circa Solem,

exprimitur per quantitatem $\frac{m \pm e}{m \pm e} \times \frac{1}{p}$

sive divisâ hâc quantitate per constantem $\frac{1}{m^2}$ fiet

mensis synodicus ut $\frac{m \pm e}{1 - s \pm \frac{2le}{m} + \frac{e \cdot l}{m^2}}$

Nam dicatur x numerus graduum quem Sol emittitur durante quovis mense synodico, numerus graduum quem Luna eodem tempore excutitur, erit $360 + x$, erit ergo motus horarius

Lunæ l ad motum horarium Solis $\frac{m^2 s}{m \pm e}$ ut

$360 + x$ ad x , et dividendo $m^2 \pm 2me + l$

gæo 37'. 11'', si modò excentricitas Solis sit ad orbis magni semi-diameter transversam ut 16½ ad 1000.

Hactenus variationem investigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique Luna in octantibus suis semper est in mediocri suâ distantia a Terrâ. Si Luna propter eccentricitatem suam, magis vel minus distat a Terrâ quàm si locaretur in hoc orbe, variatio paulo major esse potest vel paulo minor quàm pro Regulâ hic allatâ : sed excessum vel defectum ab astronomis per phænomena determinandum relinquo.

$e^2 l - m^2 s$ ad $m^2 s$ ut 360 ad x , itaque erit $x = \frac{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}{360 m^2 s}$. Hinc cùm Luna percurrat 360 gr. tempore p , absolvat 360 gr. + $\frac{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}{m^2 s p}$ tempore p + $\frac{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}{m^2 s p}$ sive reductione factâ, tempore $m^2 l p \pm 2 m e l p + e^2 l p - m^2 s p + m^2 s p$ $\frac{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}{m^2 s}$ sive $\frac{m \pm e}{1 - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}} \times \frac{1 p}{m^2}$ quæ quantitas divisa per constantem $\frac{1 p}{m^2}$, relinquit quantitatem

$\frac{m \pm e}{1 - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ quæ erit ut duratio mensis synodici in distantia quavis $m \pm e$. Q. e. d.
In distantia mediocri, evanescente quantitate $\pm e$ mensis synodici erit $\frac{m^2 l p}{m^2 l - m^2 s} = \frac{1 p}{1 - s}$ et erit ad menses synodicos in aliis quibusvis distantibus ut $\frac{m^2}{1 - s}$ ad $\frac{m \pm e}{1 - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$.

3. Variatio maxima erit ubivis ut $\frac{m \pm e}{1 - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ nam ex hac ipsâ Propositione variatio maxima est directè ut quadratum temporis synodici et inversè ut cubus distantie sive in ratione compositâ quantitatum $\frac{m \pm e}{1 - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ et $\frac{1}{m \pm e}$ ideòque ut $\frac{m \pm e}{1 - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$.

Corol. In distantia mediocri variatio maxima exprimitur per quantitatem $\frac{m}{1 - s}$ et eam su-

perius determinavit Newtonus ferè 35''. 10''. sive 2110''; hinc itaque ut habeatur variatio maxima in quovis orbitæ solaris puncto fiat ut $\frac{m}{1 - s}$

ad $\frac{m \pm e}{1 - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ ita 2110''. ad variationem maximam quæritam, quæ itaque erit $\frac{m \pm e}{1 - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}} \times \frac{m}{m} \times 2110''$, (sive accuratius $\times 2109.8''$).

Ratio autem motûs horarii Lunæ l ad motum horarium Solis s obtinetur ex tempore periodico utriusque inter stellas fixas, itaque cùm tempus periodicum Lunæ sit 27^d. 7^h. 43'. et annus sideræus Solis 365^d. 6^h. 9'. et velocitates mediocres sive motus horarii mediocres sint inversè ut ista tempora periodica, erit l ad s ut 1.081 ad .081 ideòque erit $1 - s = l$, et variationis maxime expressio fiet $\frac{1}{1 \pm \frac{2.162 e}{m} + \frac{1.081 e^2}{m^2}}$ \times

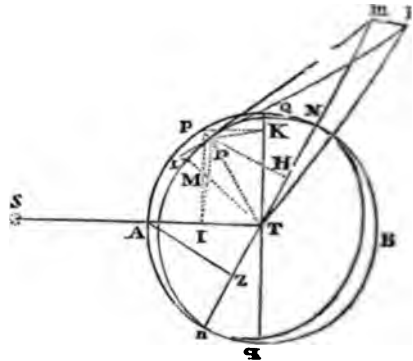
$\frac{m \pm e}{m} \times 2109.8''$. Cùmque m sit 1000 et in apogæo $\frac{m + e}{m}$ sit 1.016½ in perigæo verò sit $\frac{m - e}{m} = .983½$ hæc ducta in 2109.8''. efficiunt in apogæo 2145.5''. et in perigæo 2074'', sed cùm sit $e = 16½$ quantitas $\frac{2.162 e}{m}$ evadit .036618875 et $\frac{1.081 e^2}{m^2}$ est .00031027. Unde quantitas $1 + \frac{2.162 e}{m} + \frac{1.081 e^2}{m^2}$ fit 1.03665 et $1 - \frac{2.162 e}{m} + \frac{1.081 e^2}{m^2}$ fit .9637.

Dividatur ergo bis 2145.5''. per 1.037 quotiens dabit variationem maximam in apogæo 1994''. sive 33''. 14'', et dividatur bis 2074''. per .964 quotiens dabit variationem maximam in perigæo quàm proximè 2231''. sive 37''. 11''.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe circulari.

Designet S Solem, T Terram, P Lunam, N P n orbem Lunæ, N p ⁽⁴⁾ vestigium orbis in plano eclipticæ; N, n nodos, n T N m lineam nodorum infinitè productam; P I, P K perpendiculara demissa in lineas S T, Q q; P p perpendiculum demissum in planum eclipticæ; A, B syzygias Lunæ in plano eclipticæ; A Z perpendiculum in lineam nodorum N n; Q, q quadraturas Lunæ in plano eclipticæ, et p K perpendiculum in lineam Q q quadraturis interjacentem. Vis Solis ad perturbandum motum (per Prop. XXV.) duplex est, altera lineæ L M in schemate Propositionis illius, altera lineæ M T proportionalis. Et Luna vi priore in Terram, posteriore in Solem secundùm lineam rectæ



S T a Terra ad Solem ductæ parallelam trahitur. Vis prior L M agit secundùm planum orbis lunaris, et propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis posterior M T quâ planum orbis lunaris perturbatur, ⁽⁵⁾ eadem est cum vi 3 P K vel 3 I T. ⁽⁶⁾ Et hæc vis (per Prop. XXV.) est ad vim quâ Luna in circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset, ut 3 I T ad radium circuli multiplicatum per numerum 178.725, sive ut I T ad radium multiplicatum per 59.575. Cæterum in hoc calculo, et eo omni qui sequitur, considero lineas omnes a Lunâ ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ a Terrâ ad Solem ducitur, ⁽⁷⁾ propterea quod inclinatio tantùm ferè

⁽⁴⁾ * Vestigium orbis in plano eclipticæ. Hoc est orbis genitus demittendo ex singulis punctis orbitæ lunaris perpendiculara ad planum eclipticæ.

⁽⁵⁾ * Eadem est cum vi 3 P K (Prop. XXV. not. ^u).

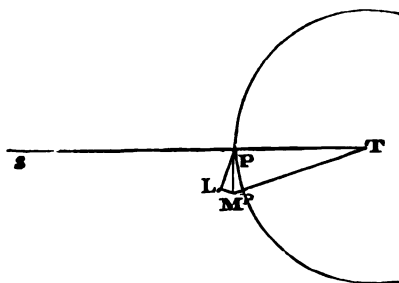
⁽⁶⁾ * Et hæc vis est ad vim quâ Luna in circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset. Vis T M est ad vim M L ut est 3 P K sive 3 I T ad radium (Prop. XXVI. not. 1.); vis M L est ad vim quâ Luna circa Terram tempore suo

periodico revolvi posset, ut 1 ad 178.725 (Prop. XXV. not. ^v). Ergo, ex æquo, et conjunctis rationibus, est vis M T ad vim quâ Luna circa Terram tempore suo periodico revolvi posset ut est 3 I T ad radium circuli multiplicatum per 178.725.

⁽⁷⁾ * Propterea quod inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus quantum auget in aliis. Exempli gratiâ, sine nodi in quadraturis, specteturque Luna in punctis P et R æqualiter a quadraturis N et n distantibus et

in $P l$ æqualis. Hoc autem in casu, angulus $m P l$ est ad angulum $P T M$, quem Luna eodem tempore motu suo apparente circa Terram describit, ut 1 ad 59, 575. Nam angulus $m P l$ æqualis est angulo $L P M$, id est, angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem sola vis præfata solaris $3 I T$, si tum cessaret Lunæ gravitas, dato illo tempore generare posset; ^(m) et angulus $P T M$ æqualis est angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem vis illa, quâ Luna in orbe suo retinetur, si tum cessaret vis solaris $3 I T$, eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59, 575. ⁽ⁿ⁾ Ergo cùm motus medius horarius Lunæ respectu fixarum sit $32'. 56''. 27'''$. $12\frac{1}{2}''$, motus horarius nodi in hoc casu erit $33''. 10'''$. $33''$. $12''$. Aliis autem in casibus motus iste horarius erit ad $33''. 10'''$. $33''$. $12''$. ut contentum sub sinubus angulorum trium $T P I$, $P T N$, et $S T N$ (seu distantiarum Lunæ a quadraturâ, Lunæ a nodo, et nodi a Sole) ad cubum radii. ^(o) Et quo-

^(m) • Et angulus $P T M$ æqualis est angulo deflexionis. Angulus $M P p$ est angulus deflexionis de quo nunc agitur, triangula verò



$M P p$, $M P T$ sunt similia ob angulum communem $P M T$, et angulos rectos $T P M$ et $P p M$, hinc anguli residui $P T M$, $M P p$ sunt æquales.

⁽ⁿ⁾ • Ergo, &c. Isti anguli deflexionis debent esse ut vires illas deflexiones producentes, in hoc enim casu, utraque vis agit perpendiculariter ad tangentem $P M$, hinc lineolæ $M p$, $M L$ per eas vires genitæ tempore eodem, eo nempe quo percurreretur tangentis portio $P M$, debent esse ut ipsæ illæ vires; eæ verò lineolæ sumpto $P M$ pro radio sunt tangentes angulorum deflexionis $p P M$, $M P L$, et anguli quàm minimi sunt ut ipsorum tangentes, ergo anguli illi deflexionis sunt ut vires illas producentes, motus autem horarii Lunæ et nodorum sunt ipsi anguli $P T M$ et $m T l$, qui sunt ex demonstratis æquales angulis deflexionum $M P p$, $M P L$, ergo motus horarii sunt ut vires illas deflexiones producentes. Q. e. o.

^(o) • Et quoties signum alicujus anguli de affirmativo, &c. Angulos $Q T P$ et $N T P$, positivos vocat Newtonus, quando punctum P est in consequentia respectu punctorum Q vel N ad quæ referuntur, hoc est angulus $Q T P$ est positivus quoties arcus $Q P$, ab ultimâ quadraturâ Q numeratus in consequentia non excedit 180 gr. negativus verò cùm arcus $Q P$ excedit 180 gr.; angulus $N T P$ pariter est positivus cùm arcus $N P$ a nodo ascendente in consequentia numeratus non excedit 180 gr. negativus verò est cùm is arcus $N P$ excedit 180 gr. Quando enim arcus $Q P$, $N P$ excedunt 180 gr. tunc anguli $Q T P$, $N T P$ non amplius numerantur secundum Lunæ directionem, seu secundum viam quam Luna est emensa, sed secundum viam quæ ipsi describenda superest ut ad puncta Q et N redeat, hinc illi anguli negativi dicuntur, eorum respectu qui secundum viam a Lunâ descriptam mensurantur.

Angulus verò $S T N$ positivus dicitur quando arcus $A N$ a loco conjunctionis Lunæ cum Sole usque ad nodum contra ordinem signorum numeratus, est minor 180 gr., negativus verò dicitur cùm excedit 180 gr., quia, cùm nodi moveantur contra ordinem signorum sive in antecedentia, angulus $S T N$ primo casu exprimit viam nodi a syzygia, secundo casu viam quam emetiri debet ut ad syzygiam redeat.

Probandum autem 1^o. quod si tres illi anguli $Q T P$, $N T P$, $S T N$, sint positivi motus nodorum est regressivus: 2^o. quod si unus eorum sit negativus, reliqui positivi, motus nodorum est progressivus. 3^o. Quod si unus eorum sit positivus, duo negativi, motus nodorum est regressivus. 4^o. Denique quod si omnes sint negativi, motus nodorum iterum sit progressivus, sic enim quoties signum alicujus anguli de affirmativo in negativum, deque affirmativo in negativum mu-

ties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debet motus regressivus in progressivum et progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut nodi progrediantur quoties Luna inter quadraturam alterutram et nodum quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, et per excessum regressus supra progressum singulis mensibus feruntur in antecedentia.

tatur, debet motus regressivus in progressivum et progressivus in regressivum mutari.

Art. 1. Si tres anguli sint positivi, nodorum motus erit regressivus.

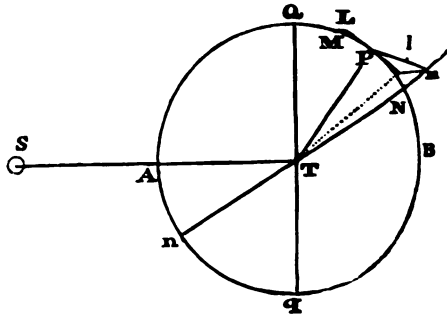
In hoc casu, arcus $A N$ contra ordinem signorum sumptus non excedit semi-circulum, ideoque punctum N erit in semi-circulo $A Q B$; præterea arcus $Q P$ secundum ordinem signorum sumptus, 180 gr. non excedit, erit itaque punctum P in semi-circulo $Q A q$; denique arcus $N P$ semi-circulo major esse non debet, sed potest vel quadrante minor vel quadrante major, sit $N P$ quadrante minor ut in figurâ textus, in quâ reliquæ hujus casus conditiones occurrunt, ex ipsâ hujusce proportionis constructione liquet quod ductâ $M L$ quæ exprimit actionem Solis, productâ $M P$ quæ lineæ nodorum occurrit in m , productâ $L P$ quæ occurrit plano eclipticæ in l , ita ut $m l$ sit parallela lineæ $M L$, cum L sit versus Solem respectu puncti M et lineæ $M P m$, $L P l$ sese decussent, punctum l erit remotius a Sole quàm punctum m , ideoque angulus $A T l$ major erit quàm angulus $A T m$, ergo nodus promotus est contra ordinem signorum, hoc est, ejus motus est regressivus.

Sit $N P$ quadrante major, tum lineæ $P M$, $P L$ non amplius erunt retroproducendæ ut cum lineâ $T N$ concurrant, sed antorsum productæ concurrent cum

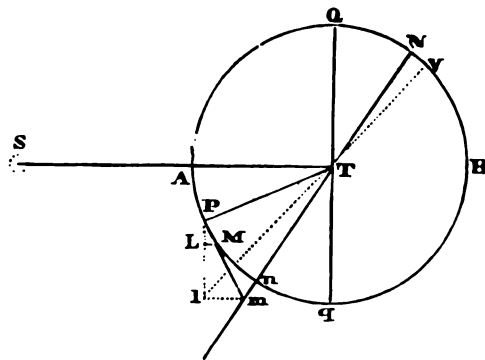
gulo $A T m$, ideoque productâ lineâ $l T$ in V , angulus $A T V$ complementum ad duos rectos anguli $A T l$, major erit angulo $A T N$ complemento ad duos rectos anguli $A T m$, ergo nodus N promotus est contra ordinem signorum ut prius; ergo ubicumque sit punctum P si tres anguli $Q T P$, $N T P$, $S T N$ sint positivi, motus nodi est regressivus.

Art. 2. Mutetur horum angulorum quivis ex positivo in negativum manentibus positivis angulis duobus reliquis, motus nodorum est regressivo progressivus fiet.

Cas. 2. Fiat angulus $Q T P$ negativus, hoc est, punctum P sit in semi-circulo $Q B q$, se-

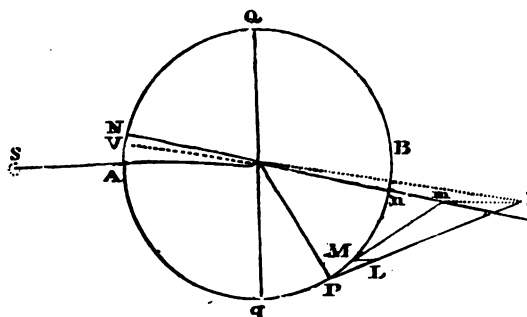


nente positivo angulo $S T N$ ita ut N sit in semi-circulo $A Q B$, et pariter manente positivo angulo $N T P$; observandum quod lineæ $M L$ in semi-circulo $Q B q$ positionem habet oppositam illi quam habebat in semi-circulo $Q A q$ ut constat ex Prop. LXXVI. Lib. I. ita ut punctum L sit a Sole remotius quàm punctum M ; itaque si $P N$ sit minor quadrante, lineæ $L P$ retroproducendæ erunt, et punctum l erit propius Soli quàm punctum m ; ideoque angulus $A T l$ minor erit angulo $A T m$, ergo (cum diminuatur angulus $A T N$ qui remittitur contra ordinem signorum) nodus secundum ordinem signorum est promotus, ejusque motus progressivus est.



ejus productione $T n$, et quoniam sese non decussant, manebit punctum l propius Soli quàm punctum m ; et angulus $A T l$ minor erit an-

Si verò $N P$ sit major quadrante antorsum productis lineis $P M$, $P L$ punctum l manebit remotius a Sole quàm punctum m , ideoque



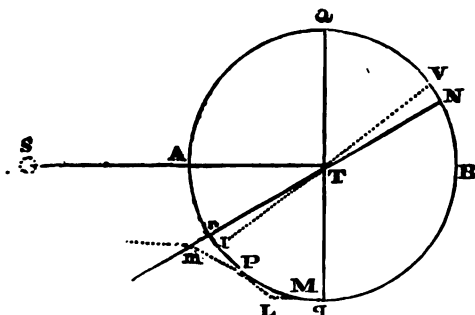
angulus $A T l$ major erit angulo $A T m$, producta itaque $l T$ in V , angulus $l T V$ anguli $A T l$ complementum minor erit angulo $A T N$,

nodus ergo ab N versus A in consequentia processerit, itaque motus nodi est ut prius progressivus.

Cas. 2. Sit angulus $N T P$ negativus; hoc est sit punctum N in consequentia respectu puncti P , sit verò $Q T P$ positivus, hoc est sit punctum P in semi-circulo $Q A q$ et pariter sit

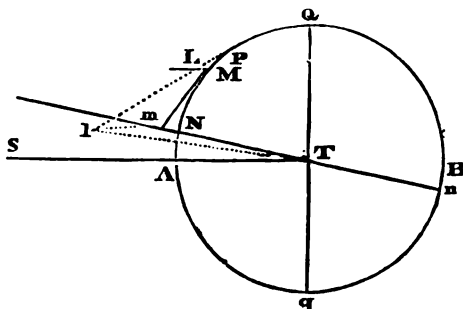
angulus $A T l$ minor erit angulo $A T N$, nodus ergo ab N versus A processit, et motus nodi est progressivus.

Cas. 3. Sit angulus $S T N$ negativus positivo existentibus angulis $Q T P$, $N T P$. Sit $N P$ minor quadrante, retroproducendæ sunt lineæ $P M$, $P L$ ideòque l erit remotior a Sole quàm m , et angulus $A T l$ major erit quàm $A T m$, vel $A T N$, cum ergo N sit in consequentia respectu puncti A , quia angulus $S T N$ est negativus, punctum l magis adhuc in consequentia processerit, motus ergo nodi erit progressivus. Sit $N P$ major quadrante, antrorsum producendæ erunt lineæ $P M$, $P L$ ut cum ecliptica concurrant, a parte nodi n , ideòque L erit propius Soli quàm m , et angulus $A T l$ minor erit angulo $A T n$; ideòque angulus $A T V$ major



$S T N$ positivus, ita ut N sit in semi-circulo $A Q B$, si $N P$ (secundum consequentia) sit minor tribus quadrantibus, P distabit a puncto n minus quadrante, ideòque retroproductis lineis $M P$, $L P$ in m et l , cum L sit Soli propius quàm M , erit l a Sole remotius quàm m , ideòque angulus $A T l$ major erit angulo $A T n$, et angulus $A T V$ prioris complementum minor erit angulo $A T N$ qui est anguli $A T m$ complementum; processit ergo nodus ab N versus A , motus ergo nodi est progressivus.

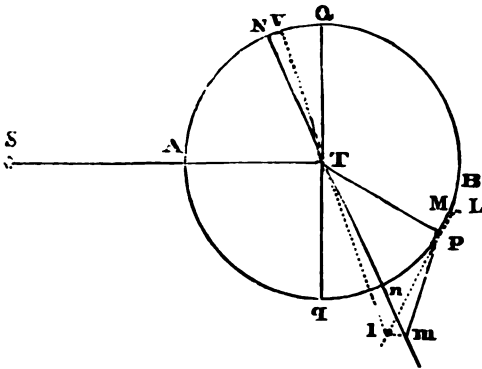
Si $N P$ sit major tribus quadrantibus, P minus quadrante a puncto N distabit, cumque N sit in consequentia respectu puncti P ut et puncta M et L antrorsum producendæ sunt lineæ $P M$, $P L$ ut plano eclipticæ occurrant in m et l , et cum L sit Soli vicinior quàm M , pariter l erit Soli vicinior quàm m , hinc an-



erit quàm $A T N$, ergo processit nodus ex N in V , secundum consequentia.

Art. 3. Sint duo ex tribus angulis $Q T P$, $N T P$, $S T N$ negativi, tertius positivus, motus nodorum ex progressivo regressivus fiet.

Casus 1. Sint Q T P et N T P negativi, solus S T N sit positivus, distet P a nodo N minus tribus quadrantibus, sive minus quadrante a puncto n, idque in consequentia, retroproducendæ erunt lineæ P M, P L, ut P M lineæ nodorum occurrat in m, et L P in l vicinius Soli, hinc A T l minor erit A T m et ideo A T V major quàm A T N, sed punctum N est in antecedentia respectu puncti A, ergo V est in antecedentia respectu puncti N, ergo nodus regre-



ditur; distet P ab N plus tribus quadrantibus, antrosum producendæ sunt lineæ P M, P L ut occurrant lineæ nodorum et l manebit a Sole remotius quàm m, et angulus A T l major erit angulo A T N, regreditur ergo nodus.

Cas. 2. Sint Q T P et S T N negativi, solus verò N T P positivus, sit N P minor quadrante, retroproductis lineis, cum L sit remotius a Sole quàm M, erit l ob decussationem linearum propius Soli et angulus A T l sive A T V minor angulo A T N, sed quia hic angulus est negativus, complementa ad quatuor rectos erunt sumenda, et arcus A Q P V major erit arcu A Q P N, ergo nodus regreditur.

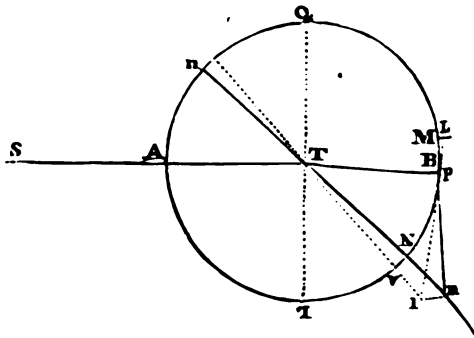
Sit N P major quadrante, lineis P M, P L productis occurrent eclipticæ a parte puncti n, et propter angulum Q T P negativum cum P sit in semi-circulo q B Q erit l ut et L remotius a Sole quàm m et M, ideo angulus A T n minor est angulo A T l et complementum prioris anguli A T N major est angulo A T V, sed A est in antecedentia respectu puncti N, ergo etiam V est in antecedentia respectu puncti N, regreditur ergo nodus.

Cas. 3. Sint S T N et N T P negativi, Q T P verò positivus, punctum L est ubivis propius Soli quàm M, si P minus tribus quadrantibus distet ab N, retroproducendæ sunt lineæ P M, P L, a parte puncti n et erit A T l majus quàm A T n, sed quia S T N est negativus, n est in

semi-circulo superiori A Q B, et n est in antecedentia respectu A, ideoque l est in antecedentia respectu n, ut etiam V respectu N, regreditur ergo nodus, sit N P tribus quadrantibus major, lineæ P M, P L antrosum sunt producendæ, l erit propius Soli quàm m, et A T l sive A T V minor quàm A T N, sed quia A T N est negativus, ideoque A est in antecedentia respectu puncti N, erit etiam V in antecedentia respectu puncti N, regreditur ergo nodus.

Art. 4. Si tres anguli Q T P, N T P, S T N sint negativi, motus ex regressivo progressivus fiet; ut hypothesis hujus articuli obtineat, oportet ut nodus N et Luna P sit in quadrante q B; nam cum angulus Q T P sit negativus, P debet esse in semi-circulo q B Q; cum S T N sit negativus, N debet esse in semi-circulo A q B, et cum N T P sit negativus, N debet esse in consequentia respectu P; ergo, N non potest versari in quadrante A q, nec P in quadrante B Q: antrosum ergo erunt producendæ lineæ P M, P L ut eclipticæ occurrant, erit l remotius a Sole quàm m, et angulus A T V major angulo A T N, sed hic angulus est negativus, sive est N in consequentia respectu A, erit ergo etiam V in consequentia respectu puncti N, nodus itaque progreditur.

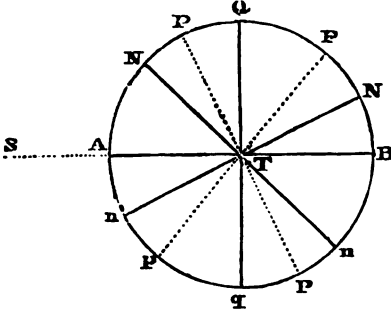
His positis dico, quod motus nodi progressivus evadit dum Luna versatur inter alterutrum nodum et quadraturam ipsi proximam; quadraturam nodo proximam vocat Newtonus, si



quadraturæ a nodo distantia quadrante major non sit.

Sit enim angulus A T N positivus, quoniam Luna sive punctum P est inter puncta Q et N vel q et n ex hypothesi, alteruter ex angulis Q T P, N T P erit positivus, alter negativus; nam sit N vel n in semi-circulo Q B q, tum quia P est inter Q vel q et N vel n, erit P in eodem semi-circulo Q B q, ideoque angulus Q T P erit negativus, sed angulus N T P erit positivus,

nam quia P est inter N et Q aut q et n, et Q est in consequentia respectu N, erit etiam P in consequentia respectu puncti N, et pariter dum n versatur in semi-circulo Q B q, n est in consequentia respectu puncti q et arcus Nq in consequentia sumptus nec non arcus NP singuli minores erunt arcu NN sive minores semi-cir-



culo, ergo utroque casu angulus NTP erit positivus.

Manente ATN positivo sint N vel n in semi-circulo QAq, tum quia P est inter Q et N aut n et q, erit etiam P in semi-circulo QAq, ideoque angulus QTP erit positivus, sed angulus NTP erit negativus, nam quia Q est in antecedentia respectu puncti N, P inter Q et N positum erit in antecedentia respectu N; et in casu quo P foret inter n et q quia q est in hac hypothesis in consequentia respectu n, P foret etiam in consequentia respectu n, ideoque plus semi-circulo a puncto N distaret, utroque ergo casu angulus NTP negativus foret.

Sit angulus ATN negativus, sitque N in quadrante qA, vel n in quadrante AQ, et Luna P inter N et q vel n et Q, liquet angulum QTP fore positivum, quia est P in semi-circulo QAq; angulus autem NTP erit etiam positivus, nam sit N in quadrante qA, q est in con-

sequentia respectu N, ergo P quod est inter N et q est etiam in consequentia respectu N; sit n

in quadrante AQ, cum n sit in consequentia respectu Q, erit etiam in consequentia respectu P, hinc arcus NP in consequentia minor erit semi-circulo, utroque ergo casu angulus NTP est positivus.

Itaque si angulus ATN sive STN sit posi-

tivus, ubivis sit N in semi-circulo AQ B et si

angulus STN sit negativus, sed ita ut sit N in

quadrante qA, quando Luna erit posita inter

nodum utrumvis N vel n, et quadraturam proxi-

am, unus e tribus angulis duntaxat erit nega-

tivus, duo reliqui erunt positivi, itaque per Arti-

culum 2. motus nodi progressivus erit.

Existente verò angulo STN negativo, et N

in quadrante qB vel n in quadrante BQ, Luna

verò posita inter utrumvis nodum et quadraturam

proximam, reliqui duo anguli QTP, NTP

negativi erunt, liquet enim facile punctum P in

hac hypothesis versari in semi-circulo qBQ ideo-

que angulum QTP esse negativum; præterea

quia q est in antecedentia respectu N ex hypo-

thesi, P est etiam in antecedentia respectu N, et

quia Q est in consequentia respectu n, erit etiam

P in consequentia respectu n, ideoque punctum

N plus semi-circulo a puncto P distabit, itaque

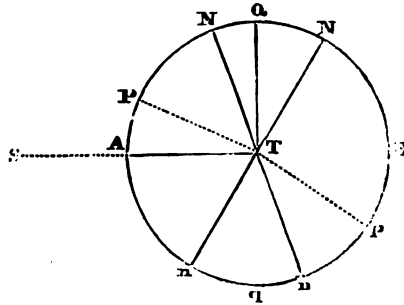
sive sit P inter q et N, sive inter n et Q in semi-

circulo qBQ, tres anguli erunt negativi, sed

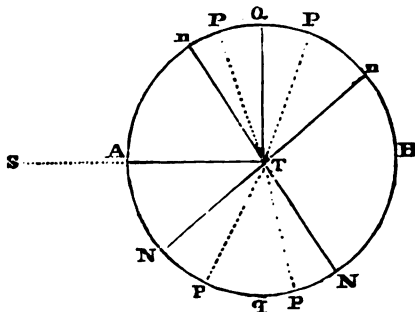
per Art. 4. eo casu motus nodi est progressivus;

ergo in omni casu, si Luna sit inter nodum et

quadraturam proximam, nodi progrediuntur.



In omnibus aliis casibus motus nodi est regressivus; nam quando omnes anguli sunt positivi, vel quando duo anguli sunt negativi, et tertius positivus, motus nodi regressivus est per Art. 1. et 3., alterutrum autem evenire necesse est cum P non est inter nodum et quadraturam proximam; hoc enim posito, sit, ut prius, angulus STN positivus, et N in quadrante QTA, et P ubivis inter N et remotiorem quadraturam q, vel inter n et remotiorem quadraturam Q; si P sit inter N et q, angulus QTP est positivus, siquidem P est in semi-circulo QAq, et quia N est nunc inter P et Q, et N est in consequentia respectu Q, erit P in consequentia respectu N ergo angulus NTP est positivus; si P sit inter n et Q, angulus QTP est negativus, sed et pariter angulus NTP, nam cum P sit in consequentia respectu n, plus semi-circulo a puncto N distabit.



sequentia respectu N, ergo P quod est inter N et q est etiam in consequentia respectu N; sit n

tentum $Kk \times PD \times AZ$, et $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ qu. id est, ut area $PDdM$ et AZ qu. conjunctim. Q. e. d.

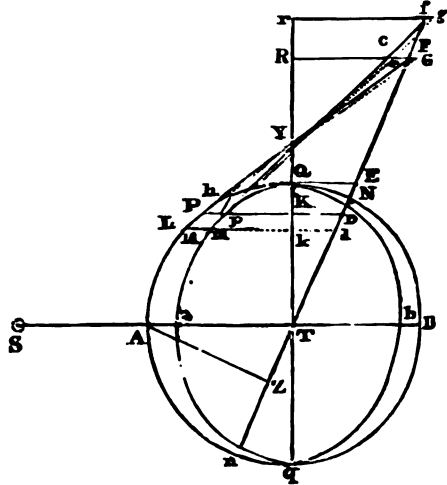
Corol. 2. In datâ quâvis nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motûs horarii in syzygiis Lunæ, ideóque est ad $16''. 35'''$. 16^{iv} . 36^v . ut quadratum sinus distantiae nodorum a syzygiis ad quadratum radii, sive ut AZ qu. ad AT qu. Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semi-circulum QAq , summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna pergit a Q ad M , erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; et quo tempore Luna attingit punctum n summa illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD describit, dein Lunâ pergente ab n ad q , linea PD cadet extra circulum, et aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam describet; quæ, quoniam nodi prius regrediebantur, jam verò progrediuntur, subduci debet de areâ priore, et cum æqualis sit areæ QEN , relinquet semi-circulum $NQAn$. Igitur summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna semi-circulum describit, est area semi-circuli; et summa omnium quo tempore Luna circulum describit, est area circuli totius. At area $PDdM$, ubi Luna versatur in syzygiis, est rectangulum sub arcu PM et radio PT ; et summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentiâ totâ et radio circuli; et hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quàm rectangulum prius. Proinde nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in syzygiis lunaribus, spatium duplo majus describerent quàm reverâ describunt; et propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium a se inæquabili cum motu reverâ confectum describere possent, est semissis motûs quem habent in syzygiis Lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si nodi in quadraturis versantur, sit $33''. 10'''$. 33^{iv} . 12^v , motus mediocris horarius in hoc casu erit $16''. 35'''$. 16^{iv} . 36^v . ^(*) Et cum motus horarius nodorum semper sit ut AZ qu. et area $PDdM$ conjunctim, et propterea motus horarius nodorum in syzygiis Lunæ ut AZ qu. et area $PDdM$ conjunctim, id est (ob datam aream $PDdM$ in syzygiis descriptam) ut AZ qu. atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas versantur, erit ad $16''. 35'''$. 16^{iv} . 36^v . ut AZ qu. ad AT qu. Q. e. d.

(*) • Et cum motus horarius nodorum sit, &c. per Corollarium præcedentem.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe elliptico. (¹)

Designet $Q p m a q$ ellipsin, axe majore $Q q$, minore $a b$ descriptam, $Q A q B$ circulum circumscriptum, T Terram in utriusque centro communi, S Solem, p Lunam in ellipsi motam, et $p m$ arcum quem datâ temporis particulâ quam minimâ describit, N et n nodos lineâ $N n$ junctos, $p K$ et $m k$ perpendicularia in axem $Q q$ demissa et hinc inde producta, donoc occurrant circulo in P et M , et lineâ nodorum in D et d . (²) Et si Luna, radio ad Terram ducto, aream describat temporî proportionalem, erit motus horarius nodi in ellipsi ut area $p D d m$ et $A Z q$ conjunctim.



(¹) * *In orbe elliptico*, illo nempe orbe in quem figura circularis orbitæ lunaris mutatur per actionem Solis, quique axem habet majorem ad axem minorem in ratione 70. ad 69. per Prop. XXVIII. hujusce.

(²) * *Et si Luna radio ad Terram ducto describat aream temporî proportionalem*, &c. Liqueat ex Prop. XXVIII. Lunam hanc ellipsim de quâ agitur ita non describere ut areæ sint temporibus proportionales, sed hæc hypothesis ad solutionem hujus Problematis erit necessaria; ut scilicet Luna possit fingi versari in puncto p ordinatæ $P K$ eodem tempore quo si circulum describeret in ejus extremitate P versata esset, quod tunc tantum obtineret si hæc ellipsis ita describatur ut areæ sint proportionales temporibus; notum enim est areas ellipticas $T p Q$ proportionales fore areis $T P Q$, areas $T P Q$ proportionales esse arcibus $P Q$, arcus verò $P Q$ proportionales temporibus, si quidem Luna citra Solis actionem in circulo lata, uniformiter moveretur.

Verùm hæc falsa hypothesis corrigitur in eâ solutionis hujus Problematis parte quæ post Collarium adjicitur.

(³) * *Conveniant autem hæc tangentes in axe*

T Q ad Y. Liqueat ex not. 257. Lib. I. quod si duæ curvæ communem axem habentes, sint tales ut ipsarum ordinatæ datam inter se rationem servant, et in summo ordinatarum correspondentium ducantur tangentes, illæ tangentes in eodem axeos puncto concurrent; nam cum ordinatæ datam rationem servant (ex Hypoth.) oportet ut ipsarum fluxiones eandem etiam servant rationem, ita ut ratio fluxionis ordinatæ ad ordinatam ipsam, eadem sit in utraqve curvâ. Est verò semper fluxio ordinatæ ad ordinatam ut fluxio abscissæ ad subtangentem; ergo in hac hypothesi, ratio fluxionis abscissæ ad subtangentem est etiam eadem in utraqve curvâ, sed fluxio abscissæ ipsa est eadem pro utraqve curvâ, ergo etiam subtangens eadem est, hinc itaque tangentes in extremitatibus ordinatarum correspondentium ducta in eodem puncto axem attingunt quando utrusque curvæ ordinatæ ad eadem axeos puncta pertinentes, constantem rationem servant: notum autem est, ex not. 247. Lib. I. quod si circulus describatur super axem ellipseos, ordinatæ circuli et ellipseos erunt inter se in ratione datâ axeos communis circuli et ellipsei ad alterum axem, sive esse $P K$ ad $p K$ ut $A T$ ad $a T$. hinc ergo tangentes in punctis P et p ductæ au occurrunt in eodem puncto Y .

Nam si P F tangat circulum in P, et producta occurrat T N in F et p f tangat ellipsin in p et producta occurrat eidem T N in f, (*) conveniant autem hæc tangentes in axe T Q ad Y; et si M L designet spatium quod Luna in circulo revolvens, interea dum describit arcum P M, urgente et impellente vi prædictâ 3 I T, seu 3 P K motu transverso describere posset, et m l designet spatium quod Luna in ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi 3 I T seu 3 p K, describere posset, et producantur L P et l p donec occurrant plano eclipticæ in G et g; et jungantur F G et f g, quarum F G producta secet p f, p g et T Q in c, e et R respectivè, et f g producta secet T Q in r. Quoniam vis 3 I T seu 3 P K in circulo est ad vim 3 I T seu 3 p K in ellipsi, ut P K ad p K, seu A T ad a T; erit spatium M L vi priore genitum, ad spatium m l vi posteriore genitum, ut P K ad p K, id est, ob similes figuras P Y K p et F Y R c, ut F R ad c R. Est autem M L ad F G (ob similia triangula P L M, P G F) ut P L ad P G, hoc est (ob parallelas L k, P K, G L) ut p l ad p e, id est (ob similia triangula p l m, c p e) ut l m ad c e; et inversè ut L M est ad l m, seu F R ad c R, ita est F G ad c e. Et propterea si f g esset ad c e ut f Y ad c Y, id est, ut f r ad c R (hoc est, ut f r ad F R et F R ad c R conjunctim, id est, ut f T ad F T et F G ad c e conjunctim) quoniam ratio F G ad c e utrinque ablata relinquit rationes f g ad F G et f T ad F T, foret f g ad F G ut f T ad F T; (**) atque ideo anguli, quos F G et f g subtenderent ad Terram T, æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propositione exposuimus) sunt motus nodorum; quo tempore Luna in circulo arcum P M, in ellipsi arcum p m percurrit: et propterea motus nodorum in circulo et ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modò f g esset ad c e ut f Y ad c Y, id est, si f g æqualis esset $\frac{c e \times f Y}{c Y}$. Verùm ob similia triangula f g p, c e p, est f g ad c e ut f p ad c p; ideòque f g æqualis est $\frac{c e \times f p}{c p}$; (†) et propterea angulus, quem f g reverâ subtendit, est ad angulum priorem quem F G subtendit, hoc est, motus nodorum

(*) * Atque ideo anguli quos F G et f g subtenderent ad Terram T æquarentur inter se, nam cum lineæ F G et f g sint inter se parallelæ et proportionales lineis T F, T f, recta T G producta transibit etiam per g, ideòque per eundem angulum videbuntur lineæ F G et f g ex Terrâ T.

(†) * Et propterea angulus quem f g reverâ subtendit est ad angulum priorem ut hæc f g ad priorem f g. Cum enim linea f g sit minima,

respectu lineæ T g linea T g eadem manere censenda est in utraq; magnitudine lineæ f g hic assumptâ; sed in triangulo utroque T f g. Sinus anguli f est ad lineam T g, ut sinus anguli f T g ad lineam f g; ergo cum maneat angulus f, et linea T g, ratio sinus anguli f T g ad lineam f g erit data, sive quia anguli minimi sunt ut sui sinus, erit angulus quem f g reverâ subtendit ad angulum quem ficta f g subtendebat, ut vera f g ad fictam f g.

augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis Lunæ ad ejus momentum in syzygiis ut 10973 ad 11073, et propterea momentum mediocre in octantibus est ad excessum in syzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum semi-summa 11023 ad eorundem semi-differentiam 50. Unde cum tempus Lunæ in singulis orbis particulis æqualibus sit reciproce ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad excessum temporis in quadraturis, ac defectum in syzygiis, ab hac causâ oriundum, ut 11023 ad 50 quam proximè. (*) Pergendo autem a quadraturis ad syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in quadraturis, sit ut quadratum sinûs distantiae Lunæ a quadraturis quam proximè; et propterea differentia inter momentum in loco quocunque et momentum mediocre in octantibus, est ut differentia inter quadratum sinûs distantiae Lunæ a quadraturis et quadratum sinus graduum 45, seu semissem quadrati radii, et incrementum temporis in locis singulis inter octantes et quadraturas, et decrementum ejus inter octantes et syzygias, est in eâdem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicatâ ratione temporis. (b) Est enim motus iste, dum Luna percurrit P M (cæteris paribus) ut M L, et M L est in duplicatâ ratione temporis. (c) Quare motus nodorum in syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicatâ ratione numeri 11073 ad numerum 11023; (d) estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum verò totum ut

(*) * Pergendo autem a quadraturis. Vide not. (†) Prop. XXVI. et locum ad quem refertur.

(b) * Est enim motus iste (cæteris paribus) ut M L, et M L est in duplicatâ ratione temporis, motus nodorum generatur per actionem vis solaris S I T quæ uniformis manere censetur dum describitur arcus P M, hinc crescit L M in duplicatâ ratione temporis Lem. X. Lib. I., expressit autem Newtonus motum nodorum fingendo in puncto ipso P, a Sole simul et semel eam actionem imprimi quæ toto tempore quo arcus P M describitur ab ipso exercita fuisset, et lineam L M esse spatium quod velocitate ita productâ ipso eo tempore quo arcus P M percurritur, describeretur, hinc itaque constat eam lineam fore in duplicatâ ratione temporis, (vid. not. 28. et 30. Lib. I.) hæc autem linea L M est proportionalis vero effectui actionis Solis (vid. not. (h) Prop. XXX. hujusce).

(c) * Quare motus nodorum. Momentum areæ in syzygiis sive velocitas Lunæ in syzygiis est ad velocitatem medicrem in octantibus ut 11073 ad 11023 ergo tempus quo Luna æquales

arcus P M describet in syzygiis, est ad tempus quo eos arcus P M describere censebatur velocitate mediocri ut 11023 ad 11073, motus ergo nodorum in syzygiis fit minor quàm adsumptus fuerat in ratione duplicatâ numerorum 11023 et 11073.

(d) * Estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum totum ut 100 ad 11073. Motus reliquus est ad motum totum ut $\frac{11023^2}{11073^2}$ ad $\frac{11073^2}{11073^2}$ sive ut $\frac{11073-50}{11073}$ ad $\frac{11073^2}{11073^2}$; sive priorem quantitatem ad quadratum evehendo secundum formulam vulgarem dignitatum ut $\frac{11073^2}{11073^2} - 2 \times 50 \times \frac{11073}{11073^2} + \frac{50^2}{11073^2}$ ad $\frac{11073^2}{11073^2}$ negligatur terminus $\frac{50^2}{11073^2}$, cæterorum enim respectu evanescit, fiet motus reliquus ad totum ut $\frac{11073^2}{11073^2} - 2 \times 50 \times \frac{11073}{11073^2}$ ad $\frac{11073^2}{11073^2}$, et dividendo per 11073, ut $\frac{11073-2 \times 50}{11073}$ ad $\frac{11073}{11073}$.

Est ergo differentia motûs reliqui et motus totius h. e. motûs decrementum ad motum totum, ut 2×50 sive 100 ad 11073, ideoque etiam est motûs decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973.

duo æqualiter ab octante hinc inde distantia, et alia duo a syzygiâ et quadraturâ iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter syzygiam et octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter octantem et quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in syzygiâ: uti rationem ineunti facîle constabit. (5) Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in syzygia.

intervallis D A, G N quæ æqualia sint inter se, et eadem ac intervalla M E, M F, sumantur decrementsa motûs nodorum in punctis E et D et ex summâ eorum decrementorum subducatur summa incrementorum in punctis G et F, et residuum erit ipsum decrementum in syzygia A.

Etenim, per præcedentia, decrementsa sive incrementa sunt ut motus totus nodorum et differentia quadrati sinus distantie Lunæ a quadraturâ et semissis radii conjunctim; est verò motus totus nodorum ut contentum sub sinibus distantiarum Lunæ a quadraturâ, Lunæ a nodo, et nodi a Sole (per Prop. XXX.) sinus autem distantie nodi a Sole in hoc casu est ipse radius, estque constans pro omnibus incrementis decrementisque assumendis, distantia verò Lunæ a nodo eadem est ac distantia Lunæ a quadraturâ, cum nodi sint in quadraturis; ergo motus totus nodorum est ut quadratum sinus distantie Lunæ a quadraturâ, et decrementsa sive incrementa sunt ut contentum sub quadrato sinus distantie Lunæ a quadraturâ et sub differentiâ ejusdem quadrati et semissis radii.

Dicatur itaque radius r , sinus arcus N G dicatur s , erit incrementum motus nodorum in G ut $ss \times \frac{1}{2} rr - ss$ sive $\frac{1}{2} r^2 s^2 - s^4$.

Ut obtineatur incrementum motus nodorum in F, observandum, quod siquidem arcus F M est æqualis arcui N G cujus sinus est s , et N F \perp F M est æqualis octanti cujus sinus est $r \sqrt{\frac{1}{2}}$ et per principia trigonometrica, sinus arcus qui est differentia duorum arcuum quorum sinus sunt dati, est æqualis differentie factorum sinûs majoris arcus per cosinum minoris et sinus minoris arcus per cosinum majoris, divisæ per radium, hinc sinus arcus F N est æqualis $r \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{rr - ss} - sr \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{rr - ss} - s \sqrt{\frac{1}{2}}$, itaque incrementum nodorum in F erit $\frac{1}{2} \times rr - ss - s \sqrt{rr - ss} + \frac{ss}{2} \times \frac{1}{2} rr - \frac{1}{2} rr - ss + s \sqrt{rr - ss} - \frac{ss}{2}$ sive deletis terminis æqualibus et oppositis $\frac{1}{2} rr - s \sqrt{rr - ss} \times s \sqrt{rr - ss}$, et multiplicatione factâ $\frac{1}{2} r^2 s \sqrt{rr - ss} - r^2 s^2 + s^4$. Ideoque summa incrementorum in G et F est $\frac{1}{2} r^2 s \sqrt{rr - ss} - \frac{1}{2} r^2 s^2$.

Sinus autem in E et D sunt cosinus arcuum F et G, ergo quadratum sinus arcus N E est $rr - \frac{1}{2} \times rr - ss + s \sqrt{rr - ss} - \frac{1}{2} ss = \frac{1}{2} rr + s \sqrt{rr - ss}$; ideoque decrementum motus nodorum in E est $\frac{1}{2} rr + s \times \sqrt{rr - ss} \times (\frac{1}{2} rr + s \sqrt{rr - ss}) - \frac{1}{2} rr = \frac{1}{2} r^2 s \sqrt{rr - ss} + r^2 ss - s^4$.

Quadratum sinus arcus N D est $rr - ss$, ideoque decrementum motus nodorum in D est $rr - ss \times rr - ss - \frac{1}{2} rr = \frac{1}{2} r^4 - \frac{3}{2} r^2 s^2 + s^4$; sicque summa decrementorum est $\frac{1}{2} r^4 + \frac{1}{2} r^2 s \sqrt{rr - ss} - \frac{1}{2} r^2 s^2$.

Denique in ipsâ syzygiâ quadratum sinus arcus N D est rr ideoque decrementum motus nodorum in syzygia est $r^2 \times r^2 - \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} r^4$.

Si ergo ex summâ decrementorum quæ inventa est $\frac{1}{2} r^4 + \frac{1}{2} r^2 s \sqrt{rr - ss} - \frac{1}{2} r^2 s^2$ detrahatur summa incrementorum quæ inventa est $\frac{1}{2} r^2 s \sqrt{rr - ss} - \frac{1}{2} r^2 s^2$ decrementorum residuum est ipsum $\frac{1}{2} r^4$ quod decrementum motus nodorum in syzygia exprimit. Q. e. d.

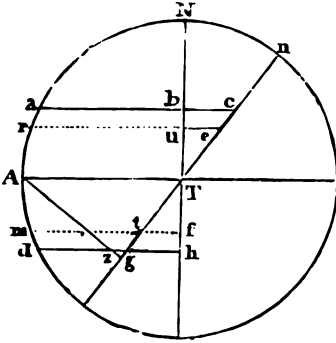
(5) * Proindeque decrementum mediocre, &c. In toto arcu N A, puncta assumantur quàm proxima quotquot lubebit, quæ quaternatim sumantur, ita ut quatuor quæ simul assumuntur ita disponantur ut duo ab octante æqualiter distent hinc inde, et alia duo tantumdem a syzygiâ et quadraturâ distent; decrementum motus nodorum in duobus punctis quæ sunt inter syzygiam et octantem superat incrementum ejus motus in aliis duobus punctis quantitate æquali decremento in ipsâ syzygiâ; si itaque motus mediocris assumendus sit, id decrementum quadrifariam dividi debet, et de motu mediocri singula quarta pars detrahi debet, sic enim motus mediocris ille æquipollebit motui vero peracto in illis quatuor punctis simul sumptis; ille decrementi excessus idem est pro quibuscumque punctis ita quaternatim sumptis, itaque motus mediocris nodorum in omnibus punctis, adjectâ consideratione inæqualitatis motus Lunæ ex actione Solis orta, erit motus mediocris nodorum prius inventus, multatus quartâ parte illius decrementi.

Cum ergo ille excessus decrementorum super incrementa sit ipsum decrementum motus in syzygiâ seorsim considerata, et id decrementum in syzygiâ seorsim inventum sit, decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in syzygiâ.

Motus totus horarius nodorum in syzygiis, ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem describere supposebatur, erat $32''$. $42'''$. 7^{iv} . Et decrementum motûs nodorum, quo tempore Luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073; ideóque decrementum illud est $17'''$. 43^{iv} . 11^v . cujus pars quarta $4'''$. 25^{iv} . 48^v . motui horario mediocri superius invento $16''$. $21'''$. 3^{iv} . 30^v . subducta, relinquit $16''$. $16'''$. 37^{iv} . 42^v . motum mediocrem horarium correctum.

(^b) Si nodi versantur extra quadraturas, et spectentur loca bina a syzygiis hinc inde æqualiter distantia, summa motuum nodorum, ubi Luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi Luna in iisdem locis et nodi in quadraturis versantur, ut A Z qu. ad A T qu. (¹) Et decreméta motuum, a causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, ideóque motus reliqui erunt ad invicem ut A Z qu. ad A T qu. et motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus mediocris horarius

(^b) * Si nodi versantur extra quadraturas puta in locis n et spectentur loca bina a et d a syzygiâ A hinc inde distantia, erit motus nodorum in loco a ut elementum a c e r et quadratum lineæ A Z conjunctum (Cor. 1. Prop. XXX.); similiter motus nodorum in loco d erit ut elementum m t g d et quadratum lineæ A Z conjunctum; si verò nodi versentur in quadraturis, erit (ibid.)



summa motuum in binis locis a et d ut a b u r + m f h d vel 2 a b r u et quadratum radii A T conjunctum; sed ob æqualia intervalla T b, T h summa arearum a c e r + m t g d = 2 a b r u. Quare summa motuum nodorum ubi Luna versatur in locis a, d nodis existentibus extra quadraturas, erit ad summam motuum ubi Luna in iisdem locis et nodi in quadraturis versantur ut 2 a b r u \times A Z² ad 2 a b r u \times A T² hoc est ut A Z² ad A T².

(¹) * Et decreméta motuum in loco a quando

nodi sunt extra quadraturas, et quando nodi sunt in quadraturis, sunt ut ipsi motus; nam cum arcus a r in utroque casu æquali tempore percurratur, differentiâ ejus temporis a tempore mediocri utrinque eadem erit; ac per consequens error nodi, a loco in quo eo tempore mediocri procedere debuisset, est ut ejus motus horarius in eo loco; ergo decrementum motûs nodi in a ubi nodi sunt in quadraturis est ad decrementum motûs in a cum nodi extra quadraturas versantur, ut a b u r \times A T² ad a c e r \times A Z², et pariter decrementum motûs nodi in d ubi nodi sunt in quadraturis, est ad decrementum motûs in d cum nodi sunt extra quadraturas, ut m f h d \times A T² ad m t g d \times A Z², decreméta autem motûs in a et d æqualia sunt quando nodi sunt in quadraturis, ob æquales distantias a syzygiâ, et m f h d = a b u r; hinc decrementum motûs in a cum nodi extra quadraturas versantur, est ad a c e r \times A Z² ut decrementum motûs in d cum nodi extra quadraturas versantur, est ad m t g d \times A Z², et etiam ut decrementum in a, aut d cum nodi sunt in quadraturis ad a b u r \times A T²; ergo summa decremétorum in a et d cum nodi sunt extra quadraturas, est ad (a c e r + m t g d) \times A Z² ut summa decremétorum in a et d cum nodi sunt in quadraturis ad 2 a b u r \times A T², sed a c e r + m t g d = 2 a b u r per notam præcedentem, ergo, summa decremétorum in binis locis a syzygiis hinc inde æqualiter distantibus, cum nodi sunt extra quadraturas, est ad summam decremétorum in iisdem locis cum nodi sunt in syzygiis, ut A Z² ad A T², cum ergo summæ motuum ipsorum in eâ sint ratione, reliqui motus erunt in eâ ipsâ ratione, ideóque et motus mediocres; est itaque &c.

$\frac{1}{4}$ A Z ut A T q ad 9,0827646 A T q + A Z q; (9) rectangulum d Z in Z Y designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus A a percurritur. (r) Et si punctum d tangit curvam

(9) * Rectangulum d Z in Z Y designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum; nam, ex superioribus, tempus quo Sol percurrit arcum A a sine motu nodi, est ad tempus quo Sol a nodo discedet eo arcu A a si (ipse nodus moveatur) ut 9.0827646 A T q + A Z q ad 9.0827646 A T q; hinc convertendo, differentia eorum temporum est ad prius tempus ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q, sed, ex hypothesi, sectoris particula A T a designat prius tempus, ea ergo quantitas d Z \times Z Y quæ est ad A T a ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q exprimet decrementum temporis ex motu nodi oriundum.

(r) * Et si punctum d tangit curvam N d G n. Numerus 360 designetur per a, numerus 39,6355 dicatur b, ideoque 9.0827646 sit $\frac{a}{b}$, A T dicatur r, et A Z, y, eritque d Z = $\frac{\frac{1}{4} r^2 y}{b r^2 + y^2}$ = $\frac{\frac{1}{4} b r^2 y}{a r^2 + b y^2}$ et in puncto T ubi A Z evadit A T sive ubi fit y = r est d Z = $\frac{\frac{1}{4} b r}{a + b} = \frac{r}{20.1655292}$; ita ut d Z ad vicesimam radii partem nusquam assurgat.

Est autem ex naturâ circuli T Z = $\sqrt{r r - y y}$, et T Z ad A Z ut fluxio ordinatæ A Z ad Z Y, ideoque Z Y = $\frac{y d y}{\sqrt{r r - y y}}$, hinc elementum d Z \times Z Y = $\frac{\frac{1}{4} b r^2 y^2 d y}{(a r^2 + b y^2) \sqrt{r r - y y}}$ et elementum segmenti N A Z est $\frac{y^2 d y}{\sqrt{r r - y y}}$.

Est verò $\sqrt{r r - y y}$ æqualis seriei $r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^6}{16r^5} - \frac{5y^8}{128r^7} - \frac{7y^{10}}{256r^9}$, &c. et $\frac{y^2}{\sqrt{r r - y y}}$ æqualis seriei $\frac{y^2}{r} + \frac{y^4}{2r^3} + \frac{3y^6}{8r^5} + \frac{5y^8}{16r^7} + \frac{35y^{10}}{128r^9} + \frac{63y^{12}}{256r^{11}}$, &c. quæ series parùm convergit quando y accedit ad valorem r, unde prudenter est adhibenda.

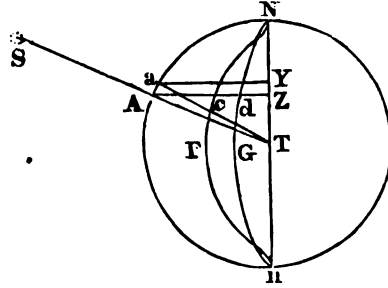
Multiplicetur verò hæc series per d y et fiat integratio, obtinetur sequens series quæ exprimit segmentum N A Z, $\frac{y^3}{3r} + \frac{y^5}{10r^3} + \frac{3y^7}{56r^5} + \frac{5y^9}{144r^7} + \frac{35y^{11}}{1408r^9}$, &c. quæ series parùm convergit quando y = r sed tunc segmentum N A Z est quadrans circuli qui per alias commodiores approximationes obtinetur.

Dividatur $\frac{1}{4} b r^2$ per $a r^2 + b y^2$, fit series $\frac{b}{2a} \times (1 - \frac{b y^2}{a r^2} + \frac{b^2 y^4}{a^2 r^4} - \frac{b^3 y^6}{a^3 r^6} + \frac{b^4 y^8}{a^4 r^8}$, &c.) quæ plurimum convergit propter dignitates crescentes fractionis $\frac{b}{a}$ quæ est circiter $\frac{1}{9}$.

Multiplicetur itaque per hanc seriem, series $\frac{y^2}{\sqrt{r r - y y}}$ superius inventa et obtinebitur hæc series $\frac{b}{2a} \times \frac{y^2}{r} + \frac{y^4}{2r^3} + \frac{3y^6}{8r^5} + \frac{5y^8}{16r^7} + \frac{35y^{10}}{128r^9} + \frac{63y^{12}}{256r^{11}}$, &c. $- \frac{b^2}{2a^2} \times \frac{y^4}{r^3} + \frac{y^6}{2r^5} + \frac{3y^8}{8r^7} + \frac{5y^{10}}{16r^9} + \frac{35y^{12}}{128r^{11}}$, &c. $+ \frac{b^3}{2a^3} \times \frac{y^6}{r^5} + \frac{y^8}{2r^7} + \frac{3y^{10}}{8r^9} + \frac{5y^{12}}{16r^{11}}$, &c. $- \frac{b^4}{2a^4} \times \frac{y^8}{r^7} + \frac{y^{10}}{2r^9} + \frac{3y^{12}}{8r^{11}}$, &c.

et multiplicetur hæc series per d y et integretur, fiet series quæ exhibebit valorem areæ N d Z

N d G n, area curvilinea N d Z erit decrementum totum, quo tempore arcus totus N A percurritur; et propterea excessus sectoris N A T supra aream N d Z erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore



$$\begin{aligned}
 & \frac{b}{2a} \times \frac{y^3}{3r} + \frac{y^5}{10r^3} + \frac{3y^7}{56r^5} + \frac{5y^9}{144r^7} + \frac{35y^{11}}{1408r^9} + \frac{63y^{13}}{3308r^{11}}, \&c. \\
 & - \frac{b^2}{2a^2} \times \frac{y^5}{5r^3} + \frac{y^7}{14r^5} + \frac{3y^9}{72r^7} + \frac{5y^{11}}{176r^9} + \frac{35y^{13}}{1664r^{11}} \\
 & + \frac{b^3}{2a^3} \times \frac{y^7}{7r^5} + \frac{y^9}{18r^7} + \frac{3y^{11}}{88r^9} + \frac{5y^{13}}{208r^{11}} \\
 & - \frac{b^4}{2a^4} \times \frac{y^9}{9r^7} + \frac{y^{11}}{22r^9} + \frac{3y^{13}}{104r^{11}}
 \end{aligned}$$

Termini variables primæ lineæ hujusce seriei, seriem ipsam illam constituunt quæ est valor segmenti N A Z, ejus itaque primæ lineæ valor est $\frac{b}{2a} N A Z$.

Si dividantur omnes termini secundæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, observabitur quotientes hanc habere relationem ad terminos correspondentes primæ lineæ, ut, si exponens litteræ y in termino quovis primæ lineæ dicatur ζ , quantitas eadem quæ in primâ lineâ dividitur per ζ , in secundâ lineâ dividitur per $\zeta + 2$; sic termino primo secundæ lineæ diviso per $\frac{y^2}{r^2}$ ut evadat $\frac{y^3}{5r}$, quantitas communis $\frac{y^3}{r}$ in primâ lineâ dividitur per 3, in secundâ per 5, sicque in omnibus terminis utriusque lineæ, ut facile constabit ex ipsâ origine istius seriei, et integrationis lege; hinc si ad communem denominatorem reducantur termini utriusque lineæ, ducendus erit numerator primæ lineæ in $\zeta + 2$, numerator secundæ in ζ , et denominator communis erit $\zeta \times \zeta + 2$; quare subductis terminis secundæ lineæ a terminis primæ differentia exprimitur per terminos primæ seriei ductos in $\frac{2}{\zeta + 2}$ quod æ-

riæ convergentiam plurimum augebit; ideoque termini variables secundæ lineæ erunt $\frac{y^2}{r^2} \times N A Z - \frac{y^2}{r^2} \times \left(\frac{2y^3}{15r} + \frac{2y^5}{70r^3} + \frac{6y^7}{504r^5} + \frac{10y^9}{1504r^7}, \&c. \right)$ dicatur ad brevitatem series horum terminorum D et valor verus istius secundæ lineæ est $-\frac{b^2 y^2}{2a^2 r^2} N A Z + \frac{b^2 y^2}{2a^2 r^2} \times D$.

Simili ratiocinio, ut referantur termini variables tertie lineæ ad secundam, dividantur omnes termini tertie lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, et si dicantur y exponentes terminorum, differentia terminorum secun-

dæ et tertie lineæ exprimitur per terminos secundæ seriei ductos in $\frac{2}{y + 2}$, ideoque termini variables tertie lineæ erunt $\frac{y^4}{r^4} \times N A Z - \frac{y^4}{r^4} \times D - \frac{y^2}{r^2} \times \left(\frac{2y^5}{35r^3} + \frac{2y^7}{126r^5} + \frac{6y^9}{792r^7}, \&c. \right)$ dicatur E series horum terminorum et valor verus tertie lineæ erit $+\frac{b^3 y^4}{2a^3 r^4} \times N A Z - \frac{b^3 y^4}{2a^3 r^4} \times D - \frac{b^3 y^2}{2a^3 r^2}$ E ex quibus facile intelligitur valorem arcæ N d Z exprimi posse hac ratione

minore minor est in ratione temporis, debeat etiam area $A a Y Z$ diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in $A Z$ longitudo $e Z$, quæ sit ad longitudinem $A Z$ ut $A Z q$ ad $9,08276 A T q + A Z q$. (*) Sic enim rectangulum $e Z$ in $Z Y$ erit ad aream $A Z Y a$ ut decrementum temporis, quo arcus $A a$ percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, si nodus quiesceret: et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus nodi. Et si punctum e tangat curvam $N e F n$, area tota $N e Z$, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus $A N$ percurritur; et area reliqua $N A e$ respondebit motui reliquo, qui verus est nodi motus, quo tempore arcus totus $N A$ per Solis et nodi conjunctos motus percurritur. (†) Jam verò area

$$\begin{aligned} & \frac{b}{2a} \times N A Z. \\ & - \frac{b^2 y^2}{2a^2 r^2} \times N A Z + \frac{b^2 y^2}{2a^2 r^2} D \\ & + \frac{b^3 y^4}{2a^3 r^4} \times N A Z - \frac{b^3 y^2}{2a^3 r^4} D - \frac{b^3 y^2}{2a^3 r^2} E \\ & - \frac{b^4 y^6}{2a^4 r^6} \times N A Z + \frac{b^4 y^6}{2a^4 r^6} D + \frac{b^4 y^4}{2a^4 r^4} E + \frac{b^4 y^2}{2a^4 y^2} F, \&c. \end{aligned}$$

Unde summæ coefficientium quantitatum $N A Z$, D , E , F , &c. qui progressionem geometricam formant juxta regulas vulgares obtineri possunt, ideòque tandem area $N d Z$ est $\frac{\frac{1}{2} b r^2}{a r^2 + b y^2} \times$

$$N A Z + \frac{\frac{1}{2} b^2 y^2}{a^2 r^2 + a b y^2} D - \frac{\frac{1}{2} b^3 y^2}{a^2 r^2 + a^2 b y^2} E + \frac{\frac{1}{2} b^4 y^2}{a^4 r^4 + a^3 b y^2} F, \&c.$$

Cor. 1. Primus terminus seriei quæ exprimitur per D est $\frac{2}{3}$ primi termini seriei quæ exprimit segmentum $N A Z$, et reliqui termini seriei D sunt minores respectu reliquorum terminorum seriei quæ exprimit id segmentum, ergo D minor est quàm $\frac{2}{3} N A Z$, et pariter E minor est quàm $\frac{3}{7} r^2 D$, et F minor quàm $\frac{5}{9} r^2$, &c. hinc valor

$N d Z$ major esse nequit quantitate $\frac{\frac{1}{2} b r^2}{a r^2 + b y^2} \times$

$$N A Z + \frac{\frac{1}{2} b^2 y^2}{a^2 r^2 + a b y^2} N A Z = \frac{b N A Z}{a r^2 + b y^2}$$

$\times \frac{1}{2} r^2 + \frac{b}{5a} y^2$ nec minor esse potest quan-

titate $\frac{b N A Z}{a r^2 + b y^2} \times \frac{1}{2} r^2$.

Cor. 2. Hinc ubi $r = y$ et $N A Z$ est quadrans circuli valor areæ $N d Z$ major non est

quantitate $N A Z \times \frac{b}{a+b} \times \frac{1}{2} + \frac{b}{5a}$ nec mi-

nor quàm $N A Z \times \frac{b}{a+b} \times \frac{1}{2}$; si vero major non

est quadrantis portio $\frac{1}{20.1655292} +$

$\frac{1}{457.8068865}$ sive quadrantis $\frac{1}{19.3147492}$ nec

minor quadrantis portio $\frac{1}{20.1655292}$

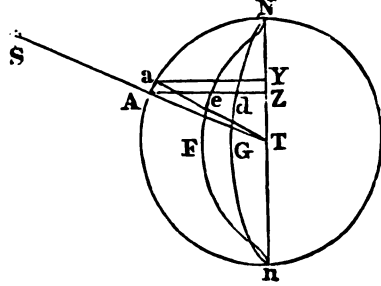
Cor. 3. In casibus in quibus y est quàm minima, ita ut $a r^2 + b y^2$ pro $a r^2$ sumi possit, valor $\frac{b N A Z}{a r^2} \times \frac{1}{2} r^2$ ad verum valorem satis

accedet, fietque valor areæ $N d Z = \frac{1}{18.1655292}$ segmenti $N A Z$, unde habentur velut limites valoris areæ $N d Z$ in variis punctis curvæ.

(*) Sic enim rectangulum $e Z$ in $Z Y$ erit ad aream $A Z Y a$, &c. Ex præcedentibus, area $A Z Y a$ motum nodorum mediocrem exprimit posito Solem sine motu nodi percurrere arcum $A a$, si itaque cæteris manentibus celerius percurratur is arcus, motus nodorum sive spatium a nodis percursum minus erit, prout tempus erit brevius; cum ergo tempus quo Sol percurrit $A a$ sine motu nodi, sit ad tempus quo percurreretur $A a$ posito motu nodi ut $9,0827646 A T q + A Z q$ ad $9,0827646 A T q$ si fiat $A Z$ ad $A e$ in eâ ratione, et utrumque ducatur in $Z Y$, erunt areæ $A Z \times Z Y$, ad $A e \times Z Y$ ut motus nodorum in hypothesis priori ad eorum verum motum; et convertendo erit $E \times Z Y$ ad $A Z \times Z Y$ ut differentia motuum ad motum priorem, sive ut $A Z q$ ad $9,0827646 A T q + A Z q$.

(†) 116. Jam verò area semi-circuli est ad aream $N e F n$. Commodius calculi ducuntur si prius quæramus aream $N A n$ et N inter semi-peripheriam $N A n$ et curvam $N e n$ contentam, quàm detrahemus ex semi-circuli areâ; tumque

semi-circuli est ad aream figuræ N e F n, per methodum serierum infinitarum quæsitum, ut 793 ad 60 quamproximè. Motus autem qui respondet circulo toti, erat 19^{gr}. 49'. 3". 55"". et propterea motus, qui figuræ N e F n duplicatæ respondet, est 1^{gr}. 29'. 58". 2"". Qui de motu priore subductus relinquit 18^{gr}. 19'. 5". 53"". motum totum



residuum erit area N e F n, quàm cum semi-circuli areâ conferre licebit.

Sit ergo ut prius $360^\circ = a$, $39^\circ.6355 = b$, $A T = r$ et $A T = r$ et $A Z = y$; erit ex notâ præcedenti 9.0827646 $A T q + A Z q$ (sive $\frac{a r^2}{b} + y^2$ ad 9.0827646 $A T q$ sive $\frac{a r^2}{b}$)

ut $A Z$ (sive y) ad A e quod erit itaque $\frac{a r^2 y}{a r^2 + b y^2}$;

est verò $Z Y = \frac{y dy}{\sqrt{r r - y y}}$; hinc elementum

areæ $a A$ e est $\frac{a r^2 y dy}{a r^2 + b y^2 \sqrt{r r - y y}}$ sed elementum areæ curvæ $N d G n$ notâ superiore $\frac{1}{2} b r^2 y^2 dy$

115. inventum erat $\frac{(a r^2 + b y^2) \sqrt{r r - y y}}{a r^2 + b y^2}$

ergo elementum areæ curvilineæ $N A n F N$ est ad elementum areæ $N d G n$ in ratione datâ a ad $\frac{1}{2} b$; unde si valor hujus areæ $N d G n$ in notâ (*) inventus per $\frac{1}{2}$ dividatur, et multiplicetur per a , habebitur valor areæ $N A n F N$ qui itaque prodibit $\frac{a r^2}{a r^2 + b y^2} N A Z + \frac{b y^2}{a r^2 + b y^2} \times D - \frac{b^2 y^2}{a^2 r^2 + b a y^2} E + \frac{b^3 y^2}{a^3 r^2 + a^2 b y^2} F$,

Tollatur verò hæc area ex segmento $N A Z$, sive $\frac{a r^2 + b y^2}{a r^2 + b y^2} N A Z$ residuum erit $\frac{b y^2}{a r^2 + b y^2} \times N A Z - \frac{b y^2}{a r^2 + b y^2} D + \frac{b^2 y^2}{a^2 r^2 + b a y^2} \times E - \frac{b^3 y^2}{a^3 r^2 + a^2 b y^2} F$, &c. idque residuum est area quæsita $N e Z$, quod brevius expressum fit $\frac{b y^2}{a r^2 + b y^2} \times (N A Z - D + \frac{b}{a} E - \frac{b^2}{a^2} F, \&c.)$

Jam autem ut habeatur ratio semi-circuli ad aream $N e F N$, sive, quod idem est, quadrantis circuli ad $N F T$ ejus areæ $N e F n$ diuidium; dicatur c quadrans peripheriæ cujus radius est r ; sitque m ad n ut c est ad r ; valor quadrantis est

$\frac{r c}{2}$, et cùm $N A Z$ est quadrans, tum $y = r$

ergo valor dimidii areæ $N e F n$ est $\frac{b}{a + b} \times \frac{r c}{2} - D + \frac{b}{a} E - \frac{b^2}{a^2} F + \frac{b^3}{a^3} G$, &c. ex iis autem quæ in notâ (*) dicta sunt, valor D (ponendo r loco y) est

$r^2 \times (\frac{2}{15} + \frac{2}{70} + \frac{6}{504} + \frac{10}{1584} + \frac{70}{18304})$; qui termini ad decimales reducti faciunt .184^r.

Omittantur reliqui termini quantitatis D ut et quantitates E, F de quâ omissione postea dicemus, et quoniam est $r = \frac{n c}{m}$ ideòque $r^2 = \frac{n r c}{m}$

$\frac{2 n}{m} \times \frac{r c}{2}$. Valor areæ evadit $\frac{b}{a + b} \times (\frac{r c}{2} - \frac{r c}{2} \times \frac{2 n}{m} \times .184)$ qui valor est ad valorem quadrantis $\frac{r c}{2}$, ut $\frac{b}{a + b} \times (1 - \frac{2 n}{m} \times .184)$ ad 1, substituendo autem loco b et a eorum valores, est $\frac{b}{a + b}$

$= .099$; et ex naturâ circuli est $2 n$ ad m , sive diameter ad quartam peripheriæ partem ut 1.574 ad 1 ideòque $\frac{2 n}{m} \times .184 = 1.27 \times .184 = .23$.

quod detractum ex unitate relinquit .766; quod tandem ductum in $\frac{b}{a + b}$ sive .099 efficit .0758

qui valor est ad 1; ut area quæsita ad quadrantem; manebit eadem ratio si uterque terminus per 793 ducatur, sed .0758 in 793 efficit 60.10. Ergo est area quæsita $N e F n$ ad semi-circulum ut 60. proxime ad 793. Q. e. i.

Omissis terminis seriei D præter quinque priores, et terminos serierum E, F , &c. facile enim deprehenditur ex Corollariis notæ (*) ultimos illos terminos seriei D , prope æquales seriei terminis seriei E ducte in $\frac{a}{b}$ qui termini negati

tivi sunt, sique mutuò destrui, reliquæ vero series cùm per dignitates fractionis $\frac{b}{a}$ ducantur, brevi evanescent, ut quidem exploravimus calculo ad plures terminos producta.

nodi respectu fixarum inter sui ipsius conjunctiones cum Sole; et hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit $341^{\text{gr.}} 40'. 54''. 7'''$. motum Solis inter easdem conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annum 360^{gr.} ut nodi motus jam inventus $18^{\text{gr.}} 19'. 5''. 53'''$. ad ipsius motum annum, qui propterea erit $19^{\text{gr.}} 18'. 1''. 23'''$. Hic est motus medius nodorum in anno sidereo. ^(u) Idem per tabulas astronomicas est $19^{\text{gr.}} 21'. 21''. 50'''$. Differentia minor est parte trecentesima motus totius, et ab orbis lunaris eccentricitate et inclinatione ad planum eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, et per ejus inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, et ad justam velocitatem reducitur.

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum nodorum Lunæ.

In tempore quod est ut area $N T A - N d Z$, motus iste est ut area $N A e$, et inde datur. ^(x) Verùm ob nimiam calculi difficultatem, præstat

^(u) * *Idem per tabulas astronomicas.* Cassinus ex antiquis observationibus nodorum motum determinat in anno communi $19^{\circ} 19'. 45''$. quibus additis $49'$. pro motu nodi per $6^{\text{h.}} 10'. 54''$. quibus annus sidereus excedit annum communem, motus ergo nodorum in anno sidereo est $19^{\circ} 20'. 34''$. ita ut exigua duntaxat quantitate differat motus nodorum per calculum inventus, ab eo qui ex observationibus deducitur, et ideo dissensus est adeo parvus, ut nequaquam turbet argumentum quo confirmetur Newtoniana theoria ex calculo motus nodorum cum observationibus collato; imo dissensus istius causas ex orbis Lunæ excentricitate et inclinatione fluere indicat Newtonus, sed hæc hujus non sunt loci.

^(x) 117. * *Verùm ob nimiam calculi difficultatem.* Satis liquet maximam futuram calculi difficultatem ex ipsis seriebus in notis 115. et 116. adhibitis, quæ cum parum convergant, regressum non tantum difficilem, sed etiam parum tutum habent; hinc alia artificia commodiora adhibet Newtonus, quæ ut intelligantur, duas hypotheses assumere liceat quibus pedetentim ad ipsam constructionem Newtonianam deveniemus.

Prior ergo hypothesis ea sit quam in Prop. XXXII. fingit Newtonus, singulis horis retrahi nodum in locum suum priorem, ut non obstante motu suo proprio datum servet situm ad fixas; interea verò Solem progredi a nodo: eâ quippe in hypothesis, ex Prop. XXXII. tota area circuli representat totum nodorum motum integro anno sidereo, ideòque sectores $N A T$ representabant motum medium eo tempore quo Sol discedit a nodo arcu $N A$ et segmenta $N A Z$ representa-

bunt motum verum eo ipso tempore, ideòque triangulum $A T Z$ representabit differentiam motus medii a motu vero, quæ debet subtrahi a motu medio ut verus motus habeatur in primo quadrante, et tertio ut ex ipsâ figurâ liquet; addi autem in secundo et quarto: cum itaque tota area circuli sive factum totius peripheriæ in $\frac{1}{2} r$, designet totum motum nodorum durante anno sidereo, representabit $A T Z$ eam æquationem, quæ æquatio cum $A Z$ sit y et $T Z = \sqrt{rr - yy}$ est $\frac{1}{2} y \sqrt{rr - yy}$: dividatur ergo tam circuli valor quam arcus $A T Z$ valor per $\frac{1}{2} r$, erit peripheria tota ad $\frac{y \sqrt{rr - yy}}{r}$ ut totus motus no-

di anno sidereo ad æquationem quæsitam, sive primum consequenter duplicando et secundi antecedentis dimidium sumendo, quod proportionem non turbat, erit peripheria tota ad $\frac{2y \sqrt{rr - yy}}{r}$, ut motus semestris nodi ad æquationem quæsitam: sed ex principiis trigonometricis, sinus ejus arcus qui foret duplus arcus $N A$ cujus sinus est y foret $\frac{2y \sqrt{rr - yy}}{r}$;

ergo si describatur circulus radio quocumque $C B$, et sumatur arcus $B F$ duplus, arcus $N A$, hoc est duplus distantie Solis a nodo (quæ distantia per motus medios Solis et nodi haberi potest) erit peripheria tota ad $F H$ sinum ejus arcus $B F$ ut motus semestris nodi ad æquationem quæsitam; ideo producatur $D C B$ in A , ita ut radius $A D$ sit ad radium $C D$ ut periphe-

motum medium nodorum addatur ubi nodi transeunt a quadraturis ad syzygias, et ab eodem motu medio subducatur ubi transeunt a syzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proximè cum motu vero qui prodit exponende

$a + \frac{1}{2}b$, centro C erigatur perpendicularis C Φ ad circumulum usque, et pariter in extremo diametri D ducatur tangens, ductaque linea A Φ donec secet tangentem in G, liquet quod A C sive $a + \frac{1}{2}b$ est ad A D sive $a + \frac{1}{2}b$ ut est C Φ sive r ad D G quæ erit $\frac{a + \frac{1}{2}b}{a + \frac{1}{2}b} r$, ideòque erit tota circumferentia ad dimidium motûs inter syzygias ut D G ad æquationem quæsitam: sive invertendo terminos omnes et alternando ut Newtoni expressio habeatur, est æquatio ad motum nodi inter syzygias proximas ut D G ad circuli B E D circumferentiam.

Illa autem æquatio quæsitâ, erit prope æqualis angulo D A G; nam in triangulo D A G est D G ad sinum anguli D A G sive ad ipsum angulum D A G (nam in parvis angulis, angu-

D Φ B D, sumatur arcus D L æqualis D G, erit ut 360^{gr} , ad dimidium motûs nodi, ita numerus graduum in arcu D L contentorum ad numerum graduum æquationis; centro A radio A D describitur arcus et in eo sumatur longitudo D G æqualis D L, erit ut radius A D sive $a + \frac{1}{2}b$ ad radium C D sive $\frac{1}{2}b$; ita numerus graduum arcûs D L ad numerum graduum arcûs D G, numeri enim graduum in arcubus æqualibus sunt inversè ut eorum radii, sed $a + \frac{1}{2}b$ est ad $\frac{1}{2}b$ ut 360^{gr} , sive a ad dimidium motûs nodi sive ad $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{2(a + \frac{1}{2}b)}$; est ergo 360 ad dimidi-

um motûs nodi inter syzygias ut numerus graduum arcûs D L ad numerum graduum arcûs D G, sed ita etiam erat numerus graduum arcûs D L ad numerum graduum æquationis quæsitâ, ergo numerus graduum arcûs D G est ipsa æquatio quæsitâ, sed A G secabit arcum D G in puncto tali ut arcus inter eam lineam et punctum D interceptus sit proximè æqualis tangenti D G, nam in parvis arcubus, tangentes prope æquantur suis arcubus, ergo linea A G secabit arcum D G in G quamproximè, sed arcus D G cujus gradus sunt ipsa æquatio, est mensura anguli D A G, ergo angulus D A G pro æquatione usurpi potest.

Dicit autem Newtonus lineam A B debere esse ad lineam A C ut motus medius ad so-

lus pro sinubus sumere licet) ut est A G vel A D, quod est $a + \frac{1}{2}b$, ad sinum totum sive ad radium C D quod est $\frac{1}{2}b$; sed si $a + \frac{1}{2}b$, et $\frac{1}{2}b$ dividantur per $a + b$, quod rationem non mutat, fiatque $\frac{a + \frac{1}{2}b}{a + b}$ ad $\frac{\frac{1}{2}b}{a + b}$ ita a sive gradus 360 ad quartum, invenitur is quartus terminus $\frac{\frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{2}ab^2}{(a + \frac{1}{2}b)(a + b)}$; divisione factâ per $a + \frac{1}{2}b$ quotiens est $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{a + b}$ omissis, ut licet, dignitatibus altioribus $\frac{1}{2}b$, is verò quotiens est ipsa quantitas $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{2(a + \frac{1}{2}b)}$ quæ exprimit

dimidium motûs nodi inter syzygias; ergo resumendo cum sit D G ad angulum D A G ut $a + \frac{1}{2}b$ ad $\frac{1}{2}b$ sive ut circumferentia tota ad dimidium motûs nodi inter syzygias, in eâque ratione sit D G ad æquationem, ipse angulus D A G est æqualis æquationi.

Idem alio modo constabit; in ipsâ peripheriâ

missem motûs veri mediocris quando nodi sunt in quadraturis, id est, ut 19^{gr} , $18'$, $1''$, $23'''$, ad 10^{gr} , $49'$, $3''$, $55'''$. In hac autem constructione fecimus A B = $a + \frac{1}{2}b$ et A C = $a + \frac{1}{2}b$, res autem eodem redit, cum enim motus nodi

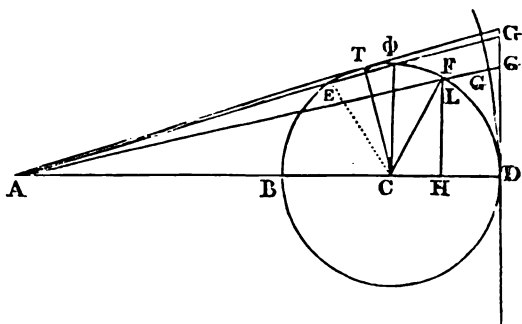
inter syzygias sit $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{a + b}$ dematur ex a habebitur motus Solis inter syzygias

$\frac{a + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}b^2}{a + b}$, iste motus Solis erit ad ejus motum annum 360^{gr} , sive a ut motus nodi

inter syzygias $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{a + b}$ ad motum annu-

um nodi qui itaque erit $\frac{\frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{8}ab^2}{a + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}b^2}$

is itaque motus erit ad $\frac{1}{2}b$ quod exprimit semissem motûs veri mediocris ubi nodi sunt in quadraturis ut $\frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{8}ab^2$ ad $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}b^2$ sive omissis termino $\frac{1}{8}b^2$, divisus reliquis terminis per a b et duplicatus ut $a + \frac{1}{2}b$



tempus per aream $N T A - N A Z$, et motum nodi per arcum $N A e$; ut rem perpendiculari et computationes instituenti constabit. Hæc est

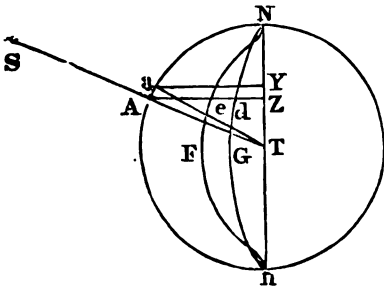
ad $a + \frac{1}{2}b$; ergo in constructione nostrâ est
 A B sive $a + \frac{1}{2}b$ ad A C sive $a + \frac{1}{2}b$ ut mo-
 tus annuus nodi, ad semissem ejus quod toto
 anno describeretur eo motu quem habent nodi
 in quadraturis; itaque erit etiam $a + \frac{1}{2}b$ ad
 $a + \frac{1}{2}b$ sive A B ad A C ut motus medius no-
 di ad semissem motûs veri in quadraturis, ut
 statuit Newtonus; observandum quidem ex hâc
 constructione æquationem futuram maximam
 quando linea A G tangit circulum, quod quidem
 incidit paulò ante punctum Φ , et si a puncto A
 ducatur tangens A T erit ut A C ad C T ita
 sinus totus ad cosinum anguli B C T, qui angu-
 lus B C T deprehendetur esse $88\frac{1}{2}^\circ$, cujus di-
 midium $44\frac{1}{2}^\circ$ est verus locus medius in quo
 maxima fit æquatio, ab octante adeo parum di-
 stans ut in sequentibus æquationem maximam
 fieri in octantibus supponere liceat, tanto magis
 quod hæc æquatio, quæ verè maxima foret, ab
 eâ quæ fit in octantibus insensibiliter differret.

3. *Hypoth.* Finximus arcum A N esse octantem peripheriam, et eo in casu ostendimus constructionem Newtonianam exhibere aequationem illi loco debitam, in aliis distantis Solis a nodo paulo minus accurata est constructio, sed errore exiguo; ubi vis enim, aequatio erit $\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2 = \frac{a^2 r}{2 r c (a + b)}$

$$(T A Z + N A Z - \frac{a^2 r}{a^2 r^2 + b^2 y^2} N A Z) = \frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2$$

$$\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2 (T A Z + \frac{b y^2}{a^2 r^2 + b^2 y^2} N A Z)$$

sumatur N A Z esse ad T A Z ut $r - \sqrt{r r - y y}$ ad $\sqrt{r r - y y}$, quod quidem verum est de spa-



tio rectilineo $N A Z$ non verò de curvilineo
 $N A Z$, sed propter exiguitatem fractionis
 $\frac{b y^2}{a r^2 + b y^2}$ errorem non magnum pariet; fit

equatio $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)} \left(\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2 + by^2} \right)$
 XTAZ sive numeratore et denominatore quad-
 ruplicato quod valorem non mutat, fit

$\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{ac \times 2(a+b)} \left(\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2 + by^2} \right) \frac{4TAZ}{r}$
 que quantitas ad hanc proportionem revocatur,
 $4c$ sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$
 quod est dimidium motus nodi inter syzygias ut
 $\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2 + by^2} \times \frac{4TAZ}{r}$ ad æquationem
 quasitam.

Ut construatur hæc quant. $\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}}{ar^2 + by^2}$

$\times \frac{4 \text{ T A Z}}{r}$, fiat ut prius circulus B F D cujus
 radius B C = $r = \frac{1}{2} b$, ideoque $b = 4 r$, pro-
 ducaturque C B in A ita ut sit A B = $a + \frac{1}{2} b$,
 sumatur arcus B F duplus arcus A N, ductoque
 perpendiculari F H, et tangente erecta in D ducta-
 que A F G erit D G prope aequalis quantitati

$$\frac{a r^2 + \frac{b r y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}}{a r^2 + b y^2} \times \frac{4 \text{ T A Z}}{r}$$
; est enim ex
 constructione A H ad A D ut F H ad D G
 ideoque $D G = \frac{A D}{A H} \times F H$ est autem

$$\frac{a r^2 + \frac{b r y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}}{a r^2 + b y^2} \times \frac{4 \text{ T A Z}}{r} = \frac{A D}{A H} \times$$

 F H, nam posito 4 r loco b et utroque termino

$$\text{diviso per } r^2, \text{ si ha } \frac{a + \frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a + \frac{4y^2}{r}}; \text{ valor me-}$$

diocris quadrati y^2 est $\frac{4}{3} r^2$, unde $\frac{4 y^2}{\sqrt{r r - y y}}$
 $= \frac{4 y^2}{r \sqrt{\frac{1}{2}}}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$ est paulo major quàm $\frac{2}{3}$ hinc
 $\frac{4 y^2}{r \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{6 y^2}{r} = 3 r$; præterea $\frac{2 y^2}{r}$ valore
suo mediocris est, est etiam $\frac{2 y^2}{r}$ sinus versus.
arcus dupli ejus cujus sinus est y , ideoque $\frac{2 y^2}{r}$

est accurate égale B H unde $a + \frac{4y^2}{r}$ est
 $a + r + B H$, sed $a + r$ per constructionem
est A B, ergo $a + \frac{4y^2}{r}$ est A H, idéoque

$$\frac{a + \frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a + \frac{4y^2}{r}} = \frac{a+3r}{\Lambda H} \quad \text{absque errore}$$

16". 19". 26". (*) Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit 1°. 30'. Quæ omnia cum phænomenis cœlestibus probè quadrant.

Scholium.

Aliâ ratione motum nodorum J. Machin, Astron. Prof. Gresham, et Henr. Pemberton, M. D. seorsum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta est. Et utriusque chartæ, quas vidi, duas Propositiones continebant, et inter se in utrisque congruebant. Chartam verò D. Machin, cùm prior in manus meas venerit, hic adjungam.

DE MOTU NODORUM LUNÆ.

PROPOSITIO I.

“ *Motus Solis medius a nodo, definitur per medium proportionale geometricum, inter motum ipsius Solis medium, et motum illum mediocrem quo Sol celerrimè recedit a nodo in quadraturis.*

“ Sit T locus ubi Terra, N n linea nodorum Lunæ ad tempus quodvis datum, K T M huic ad rectos angulos ducta, T A recta circum centrum revolvens eâ cum velocitate angulari quâ Sol et nodus a se invicem rece-

(*) • Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit 1°. 30'. Ex secundâ hypothesi notæ 117. Æquatio in octantibus per hanc proportionem invenitur, ut tota circumferentia circuli B F D B ad dimidium motûs nodi inter

syzygias quod est 9°. 11'. 3". ita $\frac{a + .78 b}{a + \frac{1}{4} b} \times$

r ad æquationem quæsitam; est autem b ad a ut 1 ad 9.0827646, itaque $a + .78 b$ est ut 9.8627646

et $a + \frac{1}{4} b$ ut 9.5827646 itaque fractio $\frac{a + .78 b}{a + \frac{1}{4} b}$

$= \frac{9.8627646}{9.5827646} = 1.0292191$, quæ ducta in r =

$\frac{1}{4} b = 9°. 54'. 31''. 57'''$. dat 10°. 11'. 54". 15".

9°. 11"., ducta iterum in 9°. 11'. 3"., dat 93°.

39'. 49". 48''', sed si radius r circuli B F D B

exprimatur per numerum 9°. 54'. 31''. 57''',

longitudo circumferentiæ continebit tales gradus

63°. 15'. 39'. 50'''. Diviso itaque numero

33°. 39'. 49". 48''' per 62°. 13'. 39'. 50'''. Quotiens sive æquatio quæsitæ est 1°. 30'. 18'',

&c.

Calculum hunc integrum exhibuimus ut ostenderemus quomodo adhibendæ forent quanti-

tates 4 c et r quæ circumferentiam totam ejusque radium exhibent, cùm enim is radius æquipolleat $\frac{1}{4} b$, et $\frac{1}{4} b$ sit 9°. 54'. 31''. 57''', cavendum ne 4 c sive circumferentia tota, 360°. assumatur, sed debet assumi ejus numeri graduum qui sit ad 9°. 54'. 31''. 57''' ut est circumferentia ad radium.

De hac autem æquatione semestri non agunt de la Hirius et Casinus in Tabulis Astronomicis, nullius enim usûs est ad calculum eclipsium ad quem potissimum accommodantur pleræque lunares tabulæ, hanc autem æquationem habent Tabulæ Rudolphinæ (pag. 87. Tabul.) et in octantibus distantie Solis a nodo hanc faciunt 1°. 39'. 46'', utrum accuratioribus tabulis hæc æquatio ad 1°. 30'. 18". magis accederet, ignoramus; at, qui probè norunt quam difficile sit observationes loci nodi accuratissimas habere extrâ eclipses, et quantum parvus error in latitudine Lunæ et in verâ inclinatione orbitæ assignandâ locum nodi mutet, non invenient hoc discrimen 9'. obesse, quominus dici possit æquationem ita inventam cum phænomenis cœlestibus probè quadrare, et facile suspicabuntur errorem hunc observationi potius quàm calculo esse tribuendum.

quoniam spatium $ABba$ est ad sectorem TBb ut rectangulum $AB\beta$ ad BT quadratum (rectangulum enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex TA et TB ob rectam $A\beta$ æqualiter et inæqualiter sectam in T et B .) Hæc igitur ratio ubi spatium $ABba$ maximum est in K , eadem erit ac ratio rectanguli KHM ad HT quadratum, sed maxima nodi mediocris velocitas erat ad Solis velocitatem in hac ratione. Igitur in quadraturis sector ATa dividitur in partes velocitatibus proportionales. (f) Et quoniam rectang. KHM est ad HT quadr. ut FBf ad BG quad. (g) et rectangulum $AB\beta$ æquatur rectangulo FBf . Erit igitur areola $ABba$ ubi maxima est ad reliquum sectorem TBb , ut rectang. $AB\beta$ ad BG quad. Sed ratio harum areolarum semper erat ut $AB\beta$ rectang. ad BT quadratum; et propterea areola $ABba$ in loco A minor est simili areola in quadraturis, in duplicatâ ratione BG ad BT hoc est in duplicatâ ratione sinus distantie Solis a nodo. Et proinde summa omnium areolarum $ABba$ nempe spatium ABN erit ut motus nodi in tempore quo Sol digreditur a nodo per arcum NA . Et spatium reliquum nempe sector ellipticus NTB erit ut motus Solis medius in eodem tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi medius, is est qui fit in tempore quo Sol periodum suam absolverit, motus nodi medius a Sole erit ad motum ipsius Solis medium, ut area circuli ad aream ellipseos, hoc est ut recta TK ad rectam TH mediam scilicet proportionalem inter TK et TS ; vel quod eodem redit ut media proportionalis TH ad rectam TS .

inter lineas AT , a T interciperetur et terminetur arcu circuli centro T , radio TB descripti). Dividendo autem est $TAa = TBb$ sive $ABba$ ad TBb ut $AT^2 = BT^2$ ad BT^2 ; est verò $AT^2 = BT^2 = AB \times B\beta$ (per 5. II. Lib. EL) ergo $ABba$ ad TBb ut $AB\beta$ ad BT quadratum.

(f) * Et quoniam rectangulum KHM est ad HT quad. ut FBf ad BG quad. Ex natura ellipseos et circuli circumscripti, est KT ad HT ut FG ad BG , et quadrando KT^2 ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2 , et dividendo $KT^2 = HT^2$ ad HT^2 ut EG^2 ad BG^2 , sed (per 5. Lib. II. Elem.) $KT^2 = HT^2 = KH \times HM$ et $FG^2 = BG^2 = FB \times Bf$ ergo KHM ad HT^2 ut FBf ad BG^2 .

(g) * Et rectangulum $AB\beta = FBf$ (per 35. III. Elem.) hoc ratiocinium ita exprimi potest; area $ABba$ ubi maxima est, est ad TBb ut $AB\beta$ ad BG^2 ergo ubi maxima est $ABba$ est $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$, in aliis verò locis area $ABba$ est ad TBb ut $AB\beta$ ad BT^2 , ergo illis in locis est $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$, est ergo area $ABba$ ubi maxima est ad aream $ABba$ in alio quovis

loco ut $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$ ad $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$

sive quia motus Solis qui per aream TBb exprimitur est ubique idem, est area $ABba$ ubi maxima est ad aream $ABba$ in alio quovis

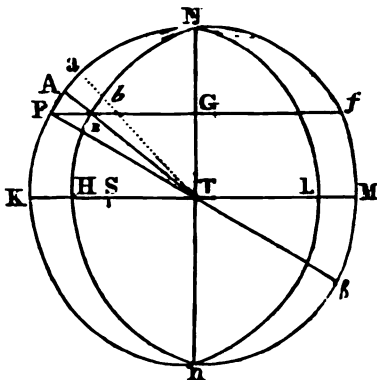
loco ut $\frac{1}{BG^2}$ ad $\frac{1}{BT^2}$ sive ut BT^2 ad BG^2 ,

sed in triangulo BTG est BT ad BG ut sinus anguli recti G ad sinum anguli BTG per principia trigonom. et distantia Solis a nodo ubi area $ABba$ est maxima, nempe in K , mensuratur per angulum rectum, et ubi est in loco quovis A per angulum BTG , ergo area $ABba$ ubi maxima est, est ad aream $ABba$ in alio quovis loco ut quadrata sinuum distantie Solis a nodo in utrovis loco, sed in ea sunt ratione motus nodorum in iis distantia; ergo ut est area $ABba$ ubi maxima est ad motum nodi in eo loco, ita est area $ABba$ in alio quovis loco ad motum nodi in eo loco, sed ubi area $ABba$ maxima est, est ad motum nodi ut BTb ad motum Solis, ergo cum area BTb et motus Solis ubique eadem maneant, est etiam in quovis loco area $ABba$ ad motum nodi ut area BTb ad motum Solis sive alternando est ubique $ABba$ ad BTb ut motus nodi ad motum Solis. Et proinde summa omnium $ABba$, &c

PROPOSITIO II.

“*Dato motu medio nodorum Lunæ invenire motum verum.*”

“Sit angulus A distantia Solis a loco nodi medio, sive motus medius Solis a nodo. Tum si capiatur angulus B cujus tangens sit ad tangentem anguli A ut T H ad T K, hoc est in subduplicatâ ratione motûs medio-
crem horarii Solis ad motum medio-
crem horarium Solis a nodo in
quadraturis versante; erit idem an-
gulus B distantia Solis a loco nodi
vero. Nam jungatur F T et ex
demonstratione Propositionis supe-
rioris ^(b) erit angulus F T N dis-
tantia Solis a loco nodi medio, an-
gulus autem A T N distantia a loco
vero, et tangentes horum angulorum
sunt inter se ut T K ad T H.



“*Corol.* Hinc angulus F T A est æquatio nodorum Lunæ, ⁽¹⁾ si-
nusque hujus anguli ubi maximus est in octantibus, est ad radium ut K H
ad T K + T H. ⁽²⁾ Sinus autem hujus æquationis in loco quovis alio

^(b) * Erit angulus F T N distantia Solis a loco nodi medio. Cum circulus N K n M repræsentet totum motum Solis a nodo inter syzy-
gias proximas cum eodem nodo, sectores ejus
circuli ut F T N repræsentabunt motum medium
Solis a nodo, tempore quod erit ad totum tempus
motus Solis inter syzygias cum eodem nodo, ut
erit is sector assumptus ad totum circulum.

Ducatur verò F G quæ occurrat ellipsi in B,
cumque sectores elliptici B T N repræsentent
Solis motum qui uniformis supponitur, ii secto-
res B T N sunt proportionales tempori; sed
sector ellipticus B T N erit, ex natura ellipseos
et circuli circumscripti, ad totam ellipsim ut sec-
tor circularis F T N ad totum circulum, ideòque
tempus quo Solis motus repræsentabitur per
B T N erit idem ac tempus quo Sol a nodis
recesserit motu medio repræsentato per F T N,
sed dum Sol describit sectorem B T N, vero
motu recedit a nodo sectore N T A, per dem.
Prop. super. ergo sector F T N repræsentat me-
dium motum Solis a nodo, eo tempore quo verus
ejus a nodo motus repræsentari debet per N T A,
ergo medius motus est ad verum ut angulus
T N ad angulum A T N, tangentes autem ho-
rum angulorum, sumendo T G pro radio, sunt
F G et B G, et F G est ad B G ut K T ad K H
ex naturâ circuli et ellipseos.

⁽¹⁾ * Sinusque hujus anguli in octantibus est
ad radium ut K H ad T A + T H. Ex princi-
piis trigonometricis, est sinus hujus anguli
F T A qui est æquatio nodorum Lunæ ad sinum
anguli T F G, qui in hoc casu est 45^{gr}, (cujus
ergo sinus est T A $\sqrt{\frac{1}{2}}$) ut est F B ad B T,
sive omnes terminos quadrando; est quad. sinus
æquationis ad $\frac{T A^2}{2}$ ut F B² ad B T² sive tol-

lendo fractionem, est quad. sinus æquationis
quæsitæ ad T A² ut F B² ad 2 B T², sed B T²
= B G² + T G² et in octantibus est T G =
F G sive B G + B F cujus quad. est B G² +
2 B G × B F + B F² hinc B T² = 2 B G² +
2 B G × B F + B F² et 2 B T² = 4 B G² +
4 B G × B F + 2 B F², cujus radix quad-
rata (negligendo B F²) est 2 B G + B F =
F G + B G: ergo tandem cum sit quad. sinus
æquationis quæsitæ ad T A² ut est F B² ad
2 B T²; radices quadratas omnium terminorum
sumendo est sinus æquationis ad T A sive ad
radium ut est F B ad F G + B G, sed est B F
ad F G + B G ut K H ad T K + T H, hinc
tandem, sinus æquationis maximæ est ad radium
ut K H ad T K + T H.

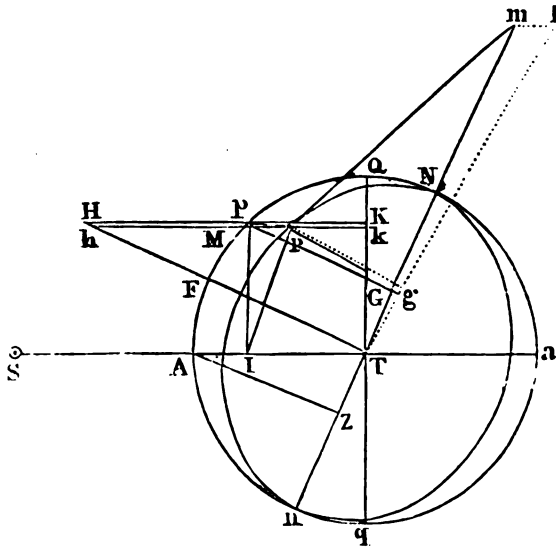
⁽²⁾ * Sinus autem æquationis in loco quovis
alio, &c. Ut hoc commodè demonstraretur, hoc
Lemma adhibendum est.

motus mediocris horarius nodorum in quadraturis evadet $16''$. $18'''$. $48''$.
Et æquatio nodorum maxima in octantibus 1° . $29'$. $57''$."

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire variationem horariam inclinationis orbis Lunaris ad planum eclipticæ.

Designent A et a syzygias; Q et q quadraturas; N et n nodos; P locum Lunæ in orbe suo; p vestigium loci illius in plano eclipticæ, et m T l motum momentaneum nodorum ut supra. Et si ad lineam T m



demittatur perpendiculum P G, p G et producat eam donec occurrat T l in g, et jungatur etiam P g: erit angulus P G p inclinatio orbis lunaris ad planum eclipticæ, ubi Luna versatur in P; et angulus P g p inclinatio ejusdem post momentum temporis completum; ideóque angulus P P g variatio momentanea inclinationis. ^(m) Est autem hic angulus

^(m) Est autem angulus G P g ad angulum. In triangulo P G g, sinus anguli G P g est ad lineam G g, ut sinus anguli P G g ad P G (sive P G, nam P g et P G quam minimum differunt) si verò P G assumatur pro radio, sinus anguli P G g est P p, ergo sinus anguli G P g est ad G g ut P p ad P G.

In triangulo G T g, est G g ad sinum anguli

G T g ut T g sive T G ipsi proximè æqualis ad sinum anguli recti in G qui est radius pro quo P G hic assumitur; ergo ex æquo, sinus anguli G P g est ad sinum anguli G T g ut T G ad P G et P p ad P G conjunctim, et quia sinus parvorum angulorum sunt ut ipsi anguli, est angulus G P g ad angulum, &c.

Corol. 3. Proinde in dato nodorum situ, variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuata variatio illa menstrua generari posset, est ad $33''. 10'''. 33''$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$ sive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{4}AT}$ ad $PG \times 4AT$, id est (cùm Pp sit ad PG ut sinus inclinationis prædictæ ad radium, et $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{4}AT}$ sit ad $4AT$ (*) ut

$\times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub. Si in hac ratione loco circuli Qaq , ponatur ejus valor qui est circumferentia Qaq ductâ in dimidium radii seu in $\frac{AT}{2}$, hæc ratio licet, circumferentia $Qaq \times \frac{AT}{2} \times AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub. Multiplicetur uterque terminus per 2. et dividatur per AT , non mutabitur ratio et fiet ut circumferentia Qaq a ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ qu.

(*) Ut sinus duplicati anguli. Ex trigonometrie elementis sinus duplicati anguli ATn sive ATN , cujus sinus est AZ et cosinus TZ , est $\frac{2AZ \times TZ}{AT}$ sive $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{4}AT}$.

Quando autem duplum anguli ATN excedit semi-circulum, sive quando angulus ATN est rectus, signum sinus dupli anguli ATN , fit negativum ex positivo; quando angulus ATN excedit 180° , signum sinus ejus dupli iterum fit positivus, sique deinceps.

Positivum autem signum designat angulum planum per variationem minui, negativum verò signum eum angulum augeri significat, ita ut angulus minuatur dum nodus N recedit ex conjunctione A ad quadraturam ultimam Q , crescit verò dum nodus a quadraturâ Q ab oppositionem a movetur, iterum minuitur dum ab oppositione ad primam quadraturam q tendit, et denique augetur dum a quadraturâ q ad conjunctionem A redit; ita ut inclinationis angulus sit minimus cùm nodi in quadraturis Q et q versantur, maximus verò cùm nodi sunt in syzygiis A et a ; quæ lex ab astronomis est observata, sed paulò accuratius ostendendum id sequi reverâ ex hæc Propositione.

Sit nodus N ubivis inter conjunctionem A et ultimam quadraturam Q , ductâque FT perpendiculari in lineam nodorum, dum Luna movebitur ex N ad F inclinationis variatio designabitur per aream $NAFT$ h, cùmque Luna tum versetur inter nodum et remotiorem quadraturam, motus nodi erit regressivus, ideòque cùm linea YT fiat semper remotior a Lunâ quàm linea NT (punctum Y quod hic exaratum non est designat novum locum in quem nodus ascendens Lunæ movetur) inclinationis Lunæ

angulus ad lineam TY relatus minor erit quàm si ad TN referretur, area ergo $NAFT$ h designabit imminutionem anguli inclinât. dum pergit Luna ab N ad F .

Dum Luna movetur ab F ad q pergit quidem ut prius nodus in antecedentia, sed productâ lineâ YT , ejus productio erit vicinior Lunæ in area Fq existenti quàm productio lineæ NT , ideòque inclinationis Lunæ angulus ad productionem lineæ TY relatus major erit quàm si ad lineam Tn referretur, sed hoc in casu area FRq designat inclinationis variationem, ergo area FAq designat incrementum anguli inclinationis.

Dum Luna ab n ad f movetur, motus nodi fit regressivus et ex N in Y migrat, et lineæ YT productio remotior est a Lunâ in areâ n f versante quàm productio lineæ NT , ideo angulus inclinationis minor erit quàm si ad lineam Tn referretur; ea verò variationis mutatio designatur per aream Hn a f quæ ideo imminutionem anguli inclinationis designat.

Ab f ad Q crescit quidem inclinationis angulus, quia refertur ad lineam TY ; totum itaque illud variationis incrementum designatur per aream Qfr , sed a Q ad n , cùm motus nodi fiat progressivus, referaturque inclinationis angulus ad Tl , minuitur is angulus, totaque imminutio designatur per aream Nhr Q .

Resumantur hæc omnia, deprehenditur imminutionem anguli inclinationis exprimi per areas $NAFh$, qn HR , Hn a f et Nhr Q , quarum prima et ultima efficiunt $QAFTr$, duæ mediæ aream q a f FR .

Totum verò incrementum anguli inclinationis exprimitur per areas FRq et Qfr , quarum hæc detracta ex area $QAFTr$ relinquit semi-circulum $QAFf$, prior detracta ex areâ q a f TR relinquit semi-circulum q a f F ideòque circulus totus Qaq a designat imminutionem anguli inclinationis cùm nodus versatur in quovis puncto N quadrantis AQ .

Si hæc ratiocinia applicentur ad figuram Newtonianam ubi nodus N est in quadrante Qa , ex iis deprehenditur circulum Qaq a designare incrementum anguli inclinationis.

Si nodus in quadrante a q versetur; omnia eodem modo procedent ac in primo casu, mutatis solummodo litteris majusculis in minores, ideòque etiam ostenditur circulum Qaq a imminutionem anguli inclinationis designare; et pariter ubi nodus erit in quadrante q A casus hic ad secundum referri poterit, minuitur ergo inclinatio dum nodus procedit ab A ad Q , tumque est

sinus duplicati anguli A T n ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantiae nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria variatio, ubi nodi in quadraturis versantur, est (per hanc Propositionem) ad angulum $33''. 10''.$ $33''.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad A T cub. (*) id est, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2} AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad 2 A T; hoc est, ut sinus duplicatæ distantiae Lunæ a quadraturis ductis in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium variationum horarum, quo tempore Luna in hoc situ nodorum transit a quadraturâ ad syzygiam (id est, spatio horarum $177\frac{1}{2}$.) erit ad summam totidem angulorum $33''. 10''.$ $33''.$, seu $5878''.$, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiae Lunæ a quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad summam totidem diametrorum; (**) hoc est, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id est, si inclinatio sit $5^{\text{gr.}}$ $1'$, ut $7 \times \frac{874}{100000}$ ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex summâ omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, est $163''.$ seu $2'. 43''.$

minima, siquidem inde crescere incipit usque ad a, ubi est maxima, siquidem inde decrescit usque ad q, ubi iterum est minima, indeque crescit usque ad A ubi iterum maxima est.

(*) *Id est.* Ubi nodi versantur in quadraturis, recta N n coincidit cum Q q, ideôque perpendicularis A E, abit in radium A T. Quare $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ est ad A T cub. ut $IT \times AT \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad A T cub. sive ut $IT \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad A T² ac dividendo per $\frac{1}{2} AT$, ut $IT \times \frac{TG}{\frac{1}{2} AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad 2 A T.

(**) 121. * *Hoc est ut diameter.* Sit T I vel P K = y. radius Q T = 1, erit T K = $\sqrt{1 - y^2}$, ex naturâ circuli, et T K = T G quia in hoc casu recta n N coincidit cum Q q, cum nempe nodi versentur in quadraturis; ac proinde sinus duplicatæ distantiae Lunæ a quadraturis, id est $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2} AT} = 2y \times \sqrt{1 - y^2}$.

Jam ut obtineatur elementum areæ quæ componitur ex omnibus sinibus distantiae duplicatæ, multiplicari debet sinus variabilis $2y \times \sqrt{1 - y^2}$, per elementum arcûs circuli, hoc est, per $\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$, undè habetur elementum areæ quæ sita = $2y dy$, sumptisque fluentibus, prodit

area tota = y^2 , factâ autem $y = 1$, erit area illa ubi Luna pergit a quadraturâ ad syzygiam, æqualis quadrato radii. Nunc verò ut habetur summa totidem diametrorum multiplicandus est quadrans circuli per totam diametrum. Hinc si radius dicatur r, periphæria p, erit summa omnium sinuum duplicatæ distantiae Lunæ a quadraturis, quo tempore Luna transit a quadraturâ ad syzygiam ad summam totidem diametrorum ut r^2 ad $\frac{p \times 2r}{4}$, sive ut $2r$ ad p, hoc est, ut diameter ad circumferentiam.

Si autem inclinatio sit $5^{\text{gr.}}$ $1'$. Erit sinus P p, huic inclinationi respondens, ad radium P G, ut 874 ad 10000, (ex vulgaribus sinuum tabulis). Est autem diameter ad periphæriam ut 7. ad 22, quare summa omnium sinuum duplicatæ distantiae Lunæ a quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ est ad

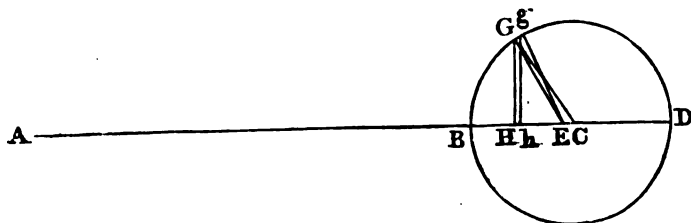
summam totidem diametrorum ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22. Facile autem percipitur quod node existente in quadraturâ dum Luna a quadraturâ ad conjunctionem vadit, angulus inclinationis minuitur, quod tantumdem augetur, dum a conjunctione ad primam quadraturam movetur, minuitur rursum dum ad oppositionem vadit, augeturque iterum dum ad ultimam quadraturam redit, et compensatis incrementis et decrementis ut sensibilibus supersit inclinationis mutatio, quoniam scilicet nodus reverâ immotus in puncto Q ponitur.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Sit $A D$ sinus inclinationis maximæ, et $A B$ sinus inclinationis minimæ. Bisecetur $B D$ in C , et centro C , intervallo $B C$ describatur circulus $B G D$. In $A C$ capiatur $C E$ in eâ ratione ad $E B$ quam $E B$ habet ad $2 B A$: et si dato tempore constituatur angulus $A E G$ æqualis duplicatæ distantie nodorum a quadraturis, et ad $A D$ demittatur perpendiculum $G H$: erit $A H$ sinus inclinationis quæsitæ.

Nam $G E q$ æquale est $G H q + H E q = (^*) B H D + H E q = H B D + H E q - B H q = H B D + B E q - 2 B H \times B E =$

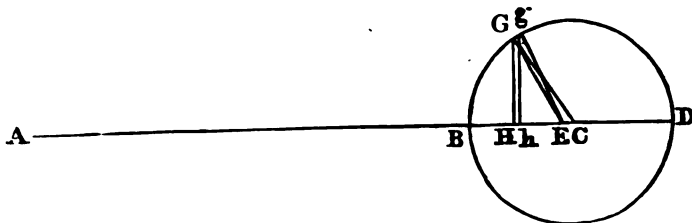


$B E q + 2 E C \times B H = 2 E C \times A B + 2 E C \times B H = 2 E C \times A H$. Ideoque cum $2 E C$ detur, est $G E q$ ut $A H$. Designet jam $A E g$ duplicatam distantiam nodorum a quadraturis post datum aliquod momentum temporis completum, et arcus $G g$ ob datum angulum $G E g$ erit ut distantia $G E$. $(?)$ Est autem $H h$ ad $G g$ ut $G H$ ad $G C$, et propterea $H h$ est ut contentum $G H \times G g$, seu $G H \times G E$; id est ut $\frac{G H}{G E} \times G E q$ seu $\frac{G H}{G E} \times A H$, id est, ut $A H$ et sinus anguli $A E G$ conjunctim. Igitur si $A H$ in casu aliquo sit sinus inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu inclinationis, per Corol. 3. Propositionis superioris, et propterea sinui illi æqualis semper manebit. $(^*)$ Sed $A H$, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D , huic sinui æqualis est, et propterea eidem semper æqualis manet. Q. e. d.

In hac demonstratione supposui angulum $B E G$, qui est duplicata

$(^*) = B H D + H E q$. (Prop. V. Lib. II. Elem.) $= H B D + H E q - B H q$ (per Prop. III. Lib. II. Elem.) $= H B D + B E q - 2 B H \times B E$ (Prop. VII. ejusdem Lib.) $= B E q + 2 E C \times B H$ (ob $B D = 2 E C + 2 B E$). Est autem (per constr.) $E B^2 = 2 E C \times B A$; quare $B E q + 2 E C \times B H = 2 E C \times A B + 2 E C \times B H$. $(?) =$ Est autem $H h$ ad $G g$. (Per naturam circuli). $(^*)$ Sed $A H$. (Per constr.)

distantia nodorum a quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum esse, et in hoc casu Gg esse augmentum horarium duplæ distantie nodorum et Solis ab invicem, et inclinationis variatio horaria in eodem casu (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad $33''.10'''.33^iv$. (*) ut contentum sub inclinationis sinu AH et sinu anguli recti BEG , qui est duplicata distantia nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris inclinationis sinus AH ad radium quadruplicatum; hoc



est (cùm inclinatio illa mediocris sit quasi $5^{\circ}.8\frac{1}{4}'$) ut ejus sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, sive ut 224 ad 10000. Est autem variatio tota, sinuum differentie BD respondens, ad variationem illam horariam (b) ut diameter BD ad arcum Gg ; id est, ut diameter BD ad semicircumferentiam BGD et tempus horarum $2079\frac{7}{10}$ quo nodus pergit a quadraturis ad syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est, ut 7 ad 11 et $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare si rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota BD ad $33''.10'''.33^iv$. ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id est, ut 29645 ad 1000, et inde variatio illa BD prodibit $16', 23\frac{3}{4}''$.

Hæc est inclinationis variatio maxima quatenus locus Lunæ in orbe suo non consideratur. Nam inclinatio, si nodi in syzygiis versantur, (c) nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si nodi in quadraturis consistunt,

(*) * Ut contentum sub inclinationis sinu AH , et sinu anguli recti BEG , hoc est, ut contentum sub mediocris inclinationis sinu AH (quia in hoc casu $AH = AC$) et radio ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris inclinationis sinus AH , ad radium quadruplicatum.

(b) * Ut diameter BD ad arcum Gg . Nam, in hac constructione, variatio tota sinuum differentie BD respondens per diametrum BD exprimitur, et Hh est incrementum sinus inclinationis tempore quod per Gg designatur, sive horæ tempore; sed ubi punctum H cadit in centro C , et punctum G in medio semi-circuli, tunc est $Gg = Hh$; ergo, est diameter BD ad arcum Gg ut variatio tota ad variationem horariam in octantibus; sed ut sunt $2079\frac{7}{10}$ horæ quæ effluunt dum nodus pergit a quadra-

turâ ad syzygiam ad unam horam, ita semicircumferentia BGD ad Gg , est ergo $Gg = \frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}}$, ideoque variatio tota est ad variationem horariam in octantibus ut BD ad $BGD \times \frac{1^h}{2079\frac{7}{10}}$ sive ut BD ad BGD et $2079\frac{7}{10}$ ad 1^h conjunctim.

(c) * Nil mutatur ex vario situ Lunæ. Nam ex demonstratione Prop. XXXIV. inclinationis variatio horaria est ad angulum $33''.10'''.33^iv$. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT cub. sed nodis versantibus in syzygiis fit $AZ = 0$ quare quantitas $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$

inclinatio minor est ubi Luna versatur in syzygiis, quam ubi ea versatur in quadraturis, excessu $2'. 43''$.; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio $1'. 21\frac{1}{2}''$. variatio tota mediocris B D in quadraturis lunaribus diminuta fit $15'. 2''$., in ipsius autem syzygiis aucta fit $17'. 43''$. Si Luna igitur in syzygiis constituatur, variatio tota in transitu nodorum a quadraturis ad syzygias erit $17'. 45''$.: ideoque si inclinatio, ubi nodi in syzygiis versantur, sit $5^{\circ}. 17'. 20''$.; eadem, ubi nodi sunt in quadraturis, et Luna in syzygiis, erit $4^{\circ}. 59'. 35''$. Atque hæc ita se habere confirmatur ex observationibus.

Si jam desideretur orbis inclinatio illa, ^(d) ubi Luna in syzygiis et nodi ubivis versantur; fiat A B ad A D ut sinus graduum $4. 59'. 35''$. ad sinum graduum $5. 17'. 20''$., et capiatur angulus A E G æqualis duplicatæ distantie nodorum a quadraturis; et erit A H sinus inclinationis quæsitæ. ^(e) Huic orbis inclinationi æqualis est ejusdem inclinatio, ubi Luna distat 90° . a nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas menstrua, quam inclinationis variatio admittit, ^(f) in calculo latitudinis Lunæ compensatur, et quo-

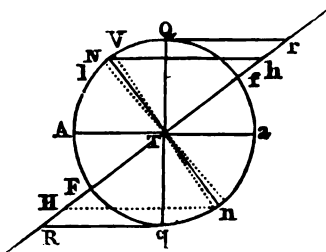
fit etiam o, evanescit itaque hoc in casu horaria variatio, ideoque in vario situ Lunæ non mutatur ejus orbitæ inclinatio. Et quidem idem citra calculum patet ex ipsâ rei naturâ, nam versantibus in syzygiis, sive Sole existente in lineâ nodorum, Sol est in eo plano in quo jacet linea nodorum, sed linea nodorum est in plano orbitæ lunaris, ergo Sol in ipsâ orbitâ lunari productâ positus censi potest, ac per consequens qualiscunque sit ejus actio in Lunam, ipsam ex plano utriusque communi neutiquam dimovebit.

^(d) * Ubi Luna in syzygiis et nodi ubivis versantur. Nam dum Luna ab unâ syzygiâ ad eandem syzygiam redit, tota variatio menstrua est ad $33'. 10''. 33''$. ut $A Z \times T Z \times \frac{P p}{P G}$ ad $2 A T q$. sive ut ex Cor. 3. Prop. præcedentis constat ut inclinationis sinus ductus in sinum duplicatæ distantie nodi a Sole ad quadruplum quadratum radii, sed per hujus Probl. constructionem in eâ ratione est A H, si modò A B sit ut sinus minimæ inclinationis et A D sinus maximæ, sed $4^{\circ}. 59'. 35''$. est minimus inclinationis angulus ubi Luna est in syzygiis et $5^{\circ}. 17'. 20''$. est maximus. Ergo fiat A B ad A D ut sinus graduum $4^{\circ}. 59'. 35''$., &c.

^(e) Huic orbis inclinationi æqualis est ejusdem inclinatio, ubi Luna distat. 90° . a nodis. Minima inclinatio ubi Luna distat 90° . a nodis est ubi nodi sunt in quadraturis, nonagesimus autem a nodis gradus incidit in ipsam syzygiam, itaque minima inclinatio eadem est ac in præcedenti casu; maxima verò inclinatio est cum nodi sunt in ipsâ syzygiis, et nonagesimus a nodis gradus tunc quidem incidit in quadraturas, sed tunc inclinatio nihil mutatur ex vario situ Lunæ, itaque eadem est, sive Luna in syzygiis sive in

quadraturis versetur, eadem ergo est iterum maxima inclinatio ac in casu præcedenti, ideoque in hoc casu A B et A D eadem assumenda sunt ac in casu præcedenti: reliquum ratiocinium hic etiam adplicatur, nam quamvis tempus reditus Lunæ ad nonagesimum a nodo gradum brevior sit tempore ejus reditus ad syzygiam sive mense synodico, siquidem mense periodico etiam brevior est, tamen hic casus ad fictionem Corollarii secundi magis accedit, in quo nempe supponitur nodum toto mense sensibilem viam non esse emensum, quod quidem accuratius dicitur si assumatur reditus Lunæ ad eundem situm respectu nodi; hic ergo eadem constructio ac prior potiori jure erit adhibenda.

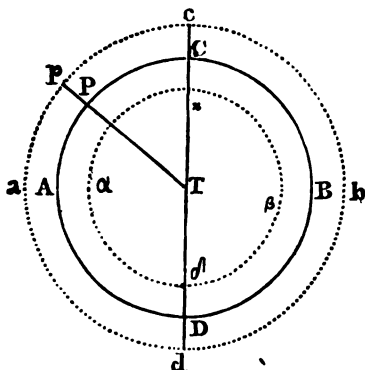
^(f) * In calculo latitudinis compensatur, et quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruum motus nodorum. Calculus latitudinis fit, positâ inclinatione orbitæ lunaris ad planum eclipticæ,



et assumptâ distantia Lunæ a nodo; hunc latitudo Lunæ obtinetur, quæ crescit a nodo ad gradum a nodo nonagesimum, inde decrescit accedendo ad alterum nodum, &c. Procedat

ab illo discedens, ita ut ejus motus assumi possit quasi fieret in eo circulo.

Nam fingatur eam vim extraneam non esse constantem, sed talem ut, post discessum corporis P a circulo $A D B C$ propter ejus vis extraneæ actionem, residuum vis quam exercet corpus T in distantia ad quam abijt corpus P (detractâ eâ vi extraneâ) sit semper inversè ut cubi distantiarum, eveniet ut (per Prop. IX. Lib. I. Princip.) corpus P spiralem logarithmicam describat, in quâ angulus curvæ cum radio ad curvam ducto semper manet idem; verùm quoniam ab initio vis illa extranea fuit constans, liquet quod priusquam corpus P circum a $d b c$ attigerit, ea vis plus imminuebat vim centralem quàm ut decreseat secundùm cubos distantiarum auctarum, ideòque quod anguli curvæ cum radio ad curvam ducto semper crescere debuerunt, sed incremento perpetuo minore quo magis accedit vtriusque decrescendum ratio ad rationem inversam



cubi distantiarum; perveniet ergo corpus P ad circum a $d b c$, et angulus curvæ cum radio, quando P erit in circulo a $d b c$, erit recto major, quia semper crevit is angulus a tempore quo corpus P circum $A D B C$ describebat in quo angulus radii cum curvâ rectus est; ideo P ultra circum a $d b c$ perget; cùm autem P ultra circum a $d b c$ pervenerit, detractio vis constantis vim centralem minus minuet quàm secundum cubum distantiarum; itaque angulus curvæ cum radio minor fiet quàm si logarithmica spiralis describeretur, et tandem reducetur ad angulum rectum ultra circum a $d b c$, inde verò curva cum radio faciet angulum acutum, nam vis centralis illic major est quàm ut circum describi possit, quod sic demonstrari potest; aræ æqualibus temporibus descriptis durante toto hoc corporis P motu sunt ubique æquales, quoniam vires ad centrum T constanter diriguntur (ex Hyp.) ideòque in eo loco ultra circum a $d b c$ in quo angulus curvæ cum radio fit rectus, arcus dato tempore descriptus foret ipsa basis aræ descriptæ cujus altitudo est distantia a centro seu ipse radius, et is arcus debet esse ad arcum qui eodem tempore descriptus fuisset a corpore P si

in circulo $A D B C$ moveri perseverasset, nulla-que vis extranea accessisset inversè ut radii; sagittæ autem eorum arcuum (quæ sunt semper ut quadrata arcuum divisa per radios) forent inversè ut cubi radiorum, sed vis centralis ultra circum a $d b c$, minus decrescit quàm secundum cubum distantiarum, ergo sagitta arcûs descripti quæ est ejus vis centralis effectus, major est sagittâ quæ foret secundùm rationem inversam cubi distantiarum, ergo ea sagitta quæ per vim centralem producit, major est illâ quæ obtineretur si circum in eo loco describeretur; ergo corpus P a tangente magis discedit versus centrum quàm si circum describeret, ergo ejus vis acutum angulum cum radio efficere incipit, sicque accedit iterum ad circum a $d b c$ angulis curvæ cum radio perpetuo decrescens; cùm autem infra eum circum transiverit angulum quem facit curva cum radio, iterum augetur, donec is angulus rectus evadat, inde verò fiet obtusus quia vis centralis illic minor est quàm ut corpus P in circulo moveri pergat; redit ergo corpus P versus circum a $d b c$ idque perpetuâ oscillatione, ut liquet ex collatione motûs quem haberet in logarithmicâ spirali cum hoc motu: sed quò minor est vis illa data quæ ex centrali detrahitur, eò illæ alternæ oscillationes minus a circulo a $d b c$ recedent, quare si vis ea exigua supponatur respectu vis centralis corporis T , supponi etiam potest motum corporis P in circulo a $d b c$ fiet. Q. e. d.

Cor. 1. Si vis illa extranea et constans perpetuo traheret corpus P versus T , iisdem argumentis ostendetur quod si describeretur circum interior $\alpha \delta \beta \alpha$, in tali distantia a centro T , ut vis corporis T ad eam distantiam aucta per vim illam extraneam sit ad vim in circulo $A D B C$ inversè ut cubi radiorum circuli $A D B C$, $\alpha \delta \beta \alpha$, corpus P hinc inde cis citra circum $\alpha \delta \beta \alpha$ oscillatur, et si ea vis extranea sit exigua, censi potest quod corpus P in eo ipso circulo $\alpha \delta \beta \alpha$ movebitur.

Cor. 2. Et si vis illa extranea constans non foret, sed cresceret secundùm aliquam dignitatem positivam distantiarum, iisdem omnino ratiociniis ostendi posset quod corpus P in circulo a $d b c$ vel $\alpha \delta \beta \alpha$ movebitur, eveniet solummodo ut radius $T p$ paulum diversus sumi debeat ab eo qui inveniretur si vis ea extranea constans foret.

Schol. Aliis methodis effectum illius vis extraneæ ad calculos revocari posse non negamus, et quidem unam aut alteram methodum ab hac diversam eundem in finem in sequentibus proponemus.

THEOR. II.

Positis iis quæ in primo Theoremate supponuntur, dicatur r radius circuli $A D B C$, sit ρ radius circuli a $d b c$, vel $\alpha \delta \beta \alpha$, sit p radiorum r et ρ differentia; vis corporis T in distantia r dicatur V et in eadem distantia vis extranea dicatur Y quæ crescat ut distantia a centro T et quæ positiva censeatur si distrahat corpus P a centro, negativa verò si illud attrahat ad centrum,

dico quod radius ϵ erit semper æqualis quantitat. $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$, sive quantitati $r \times (1 + \frac{Y}{V} + \frac{4Y^2}{V^2} + \frac{16Y^3}{V^3}, \&c.)$ et omissis terminis propter exiguitatem quantitatis Y evanescentibus, est ille radius $\epsilon = r \times (1 + \frac{Y}{V})$.

Nam vis corporis T in distantia ϵ erit $\frac{r}{\epsilon} \frac{r}{\epsilon} V$ vis extranea erit $\frac{\epsilon}{r} Y$ ex hypoth., ideòque vis quæ

circulus $a d b c$ (vel $\alpha \delta \beta \pi$) describitur est $\frac{r}{\epsilon} \frac{r}{\epsilon} V - \frac{\epsilon}{r} Y$, sed hæc vis debet esse ad vim V quæ circulus $A C B D$ describitur inversè ut cubi radorum, sive ut $\frac{1}{r^3}$ ad $\frac{1}{r^3}$ (per Theor. præced.)

ergo est $\frac{V}{\epsilon^3} = \frac{V}{r^3 \epsilon^3} - \frac{Y \epsilon}{r^4}$, sive reductis terminis ad eundem denominatorem est $\epsilon^4 + Y = r^3 V \times \epsilon - r = \pm r^3 p V$. Loco ϵ scribatur $r \pm p$ fiet $r^4 + Y \pm 4 r^3 p Y + 6 r^2 p^2 Y \pm 4 r p^3 Y + p^4 Y = \pm r^3 p V$, sive deletis terminis ubi p superat primum gradum, quoniam hæc quantitas exigua est, fit $r^4 + Y \pm 4 r^3 p Y = \pm r^3 p V$, sive $\pm p V \mp 4 p Y = r Y$, unde

obtinetur $\pm p = \frac{r Y}{V - 4 Y}$; ideòque ϵ , quod est $r \pm p$, fit $\frac{V - 3 Y}{V - 4 Y} r$ qui valor in seriem reductus est $r \times (1 + \frac{Y}{V} + \frac{4 Y^2}{V^2}, \&c.)$ sive $r \times (1 + \frac{Y}{V})$.

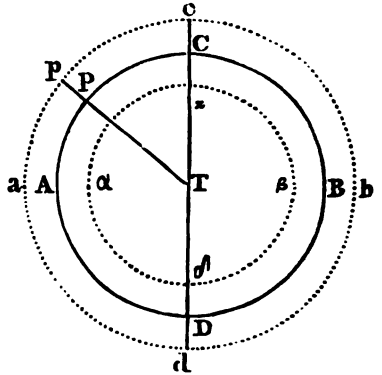
THEOR. III.

Dicatur M tempus periodicum corporis P in circulo $A D B C$, dico quod ejus tempus periodicum in circulo $a d b c$ (vel $\alpha \delta \beta \pi$) erit $M \times (1 + \frac{2 Y}{V})$.

Dem. Tempus periodicum corporis P revolvantis in circulo $a d b c$ (vel $\alpha \delta \beta \pi$) propter vim extraneam Y detractam vel additam, est ad tempus periodicum ejus corporis P cum revolvatur in circulo $A D B C$ citra omnem vim extraneam, ut est quadratum radii ϵ ad quadratum radii r ; nam quia vis Y est semper directa ad centrum T , aræ manebunt temporibus proportionales, quancumque in viam flectatur corpus P , ergo, si tandem ejus via in circulo $a d b c$ (vel $\alpha \delta \beta \pi$) mutetur, tempus quo describitur peripheria $a d b c$ (vel $\alpha \delta \beta \pi$) erit ad tempus quo describebatur peripheria $A D B C$, ut tota area circuli $a d b c$ (vel $\alpha \delta \beta \pi$) ad totam aream circuli $A D B C$, ideòque ut quadrata radorum

ϵ et r , sive (per Theor. præced.) ut $\frac{V-3Y}{V-4Y} r^2$ ad r^2

ad r , ideòque ut $\frac{V-3Y}{V-4Y} r^2$ ad 1 . sed hic fractione in seriem resoluta ea evadit $1 + \frac{Y}{V} + \frac{4 Y^2}{V^2}, \&c. \&c.$ quæ series valde convergit propter exiguitatem istius fractionis $\frac{Y}{V}$ et illius



quadratum est $1 + \frac{2 Y}{V} + \frac{9 Y^2}{V^2} + \frac{40 Y^3}{V^3}$ &c. Ergo ut 1 ad $1 + \frac{2 Y}{V} + \frac{9 Y^2}{V^2} + \frac{40 Y^3}{V^3}$ ita M ad $M \times (1 + \frac{2 Y}{V})$ quod est tempus quo describetur peripheria $a d b c$ vel $\alpha \delta \beta \pi$.

THEOR. IV.

Sit T Terra, P Luna, $A D B C$ circulus quem Luna describit; sit $S T$ distantia mediocris Terræ a Sole quæ dicatur a ; dicatur F vis Solis in Terram in mediocri illâ distantia, Sol supponatur immotus; distantia Lunæ a Terrâ $P T$ dicatur r et ea non obstante actione Solis in Lunam eadem manere censeatur; sit $C P$ distantia Lunæ a quadraturâ proxima quæ dicatur u , sit ejus sinus y , sit ejus cosinus z ; dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam secundum directionem radii $P T$, est ubivis $\frac{F}{a} \times (\frac{y}{r} - r)$.

Nam, secundum constructionem Prop. LXVI Lib. I. Princip., representetur vis Solis quæ dicitur F per lineam $S T$ vel $S K$, ea vis Solis quæ trahitur Luna in loco P representetur per lineam $S L$, et hæc vis censeatur composita ex duabus $S M$ et $L M$, quarum $L M$ sit parallela radii $P T$, cum autem linea $S M$ sit æqualis lineæ $S T + T M$, et Terra trahatur per vim $S T$ non secus ac Luna, situs respectivus Lunæ ac Terræ per eam vim $S T$ non mutatur, ideo sola ea pars vis $S M$ quæ exprimitur per $T M$ consideranda

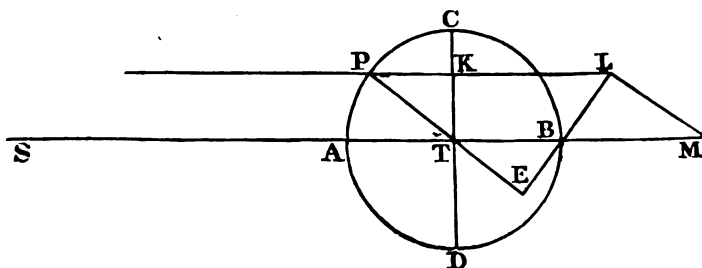
venit; præterea ex naturâ gravitatis, est SK ad SL ut est $\frac{1}{SK^2}$ ad $\frac{1}{PK^2}$ sive ut est $SK^2 \mp 2SK \times PK \mp PK^2$ ad SK^2 , aut omisso termino PK^2 ut $SK \mp 2PK$ ad SK , sive quoniam $2PK$ est exiguum respectu lineæ SK ut SK ad $SK \pm 2PK$ est ergo SL sive $SK + KL = SK + 2PK$ et $KL = 2PK$, cum autem linea PL sit proxime parallela lineæ SM , et ex constructione PT sit parallela LM , est TM proxime æqualis lineæ PL , et est $PL = PK + 2KL = 3PK$; ex puncto L ducatur perpendicularium in radium PT (productum si necesse sit) et vis TM , seu vis ipsi æqualis PL resoluta intelligatur in vim PE et vim LE , vis LE radio PT sit perpendicularis ideoque vim centralem non afficit, vis PE secundum directionem radii agit, acque punctum P a centro T distrahat, altera autem pars quæ per L M representatur secundum directionem radii agens punctum P versus centrum trahit; ergo ea pars Solis quæ agit in Lunam secundum directionem radii PT est differentia virium PE et LM .

Jam verò ob parallelas SL , SM et TP , LM est $LM = TP = r$, et cùm PK sit proxime

perpendicularis in lineam T C, erit P K sinus
 areæ P C qui sinus dictus est y , ideoque $P L$
 $= 3 P K = 3 y$, cum autem triangula P K T,
 P E L sint similia, est P T (r) ad P K (y) ut
 P L ($3 y$) ad P E quod erit ergo $\frac{3 y y}{r}$ et diffe-

rentia virium P E et L M est $\frac{3 y y}{r} - r$, quæ

differentia positiva est cū $\frac{Syy}{r}$ superat r , tuncque Lunam a centro distrahit, negativa quando $\frac{Syy}{r}$ minus efficit quā r , tuncque Lunam ad centrum attrahit; cū ergo linea $S T$ sive a representet totam vim Solis in Terram, etque vis dicatur F , et quantitas $\frac{Syy}{r} - r$ representet eam partem vis Solis quæ in Lunam agit secundum directionem $P T$, fiat ut a ad $\frac{2yy}{r} - r$, ita F ad eam partem vis Solis quæ afficit vim centram Terræ in Lunam, quæ idcirco erit $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$. Q. e. d.



Corol. Si transferatur Luna in alium orbem a d b c, a δ β x cujus radius sit ς, dico, quod, manente distantia Lunæ a quadraturā proximā, ea pars vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam, crescit ut illæ distantia ς, eritque ideo $\frac{\rho}{r} \times \frac{F}{x} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, nam cum arcus p c ejuſdem numeri graduum censeatur ac arcus P C, sinus eorum erunt ut radii, ideôque sinus arcûs p c erit $\frac{\rho}{r}$, demonstrabitur verò iisdem plane argumentis quibus in Theorematibus suis sumus, quod, si Luna in circulo a d b c vel a δ β x moveretur, ea pars vis Solis quæ secundum directionem radii P T exercetur, erit $\frac{F}{x} \times (3 \frac{\rho \epsilon y^2}{r^2}$

$$-e) = \frac{F}{a} \times \frac{3\epsilon^2 y^2 - r^2 \epsilon^2}{r^2} = \frac{F}{a} \times \frac{3\epsilon y^2 - r^2 \epsilon}{r^2} = \frac{\epsilon F}{ra} \times \left(\frac{3y^2}{r} - r \right)$$

THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundum directionem radii orbitæ lunaris exercite intelligi potest, si concipiamus Lunam ex suâ orbitâ A D B C in aliam transferri, cujus singulæ particulæ quamminime sint portiones circulorum talium ut vis centralis Terræ in singulo circulo agens, sublatâ vel addita vis Solis quæ in eo loco exerceretur, sit ad vim centram Terræ in circulo A D B C citrà Solis actionem agentem, inversè ut cubus radii ejus circuli ad cubum radii circuli A D B C.

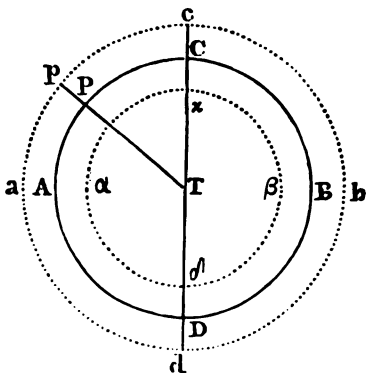
Et enim cum ea vis Solis per gradus infinitè parvos crescat vel decrescat atque nulla cum $\frac{3y}{r} = r$, paulo post minima sit, sicque gradatim crescat, si constans censetur per tempusculum aliquod, brevissime transibit Luna in circum a d b c illi vi congruum per Theor. I., mox vero cum vis Solis crescat quantitate quàm minimè, ea vis censetur constans per alterum tempusculum.

pusculum, transibit Luna ex circulo primæ vi congruo in alterum huic incremento consentaneum, sicque semper, ideòque in singulis particulis arcûs C P Luna censeri potest delata in circulum vi Solis in eo puncto agentis congruum.

THEOR. VI.

Manentibus quæ in Theor. IV. supposita sunt, dicatur c tota circumferentia cuius radius est r, dicatur Y vis Solis agens in Lunam secundum directionem P T et in datâ distantia C P a quadraturâ C, quæ distantia C P dicatur u, dicatur M tempus periodicum Lunæ in circulo A D B C citrà Solis actionem, arcus exiguus a puncto P assumptus dicatur d u, dico quod tempus quo similis arcus describitur in orbitâ in quam Luna per actionem Solis est translata, erit $\frac{M d u}{c} \times (1 + \frac{2 Y}{V} + \&c.)$

Nam si vis Y quæ in punctum P a Sole exercetur, in exiguas particulas divideretur, et singula quæ dicatur d Y maneret constans durante unicâ revolutione Lunæ, sicque gradatim Lunam



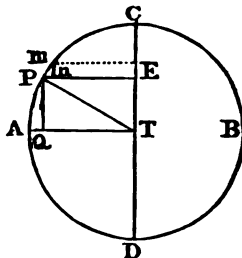
in circulum a d b c transferret, tempus periodicum in singulo circulo excederet tempus periodicum in circulo præcedenti quantitate $\frac{2 d Y}{V}$.

Hinc tandem tempus periodicum quo circulus a d b c describeretur, foret $M \times (1 + \frac{2 Y}{V} + \&c.)$ per Theor. III. et tempus quo arcus similis arcui d u describeretur in eo circulo, foret ad hoc tempus periodicum ut d u ad c, foret itaque $\frac{M d u}{c} \times (1 + \frac{2 Y}{V} + \&c.)$ sed singulæ particulae orbitæ quam Luna describit propter adjunctionem vis Solis, spectari possunt quasi persisterent ad circulos congruos vi Solis in illis punctis agentis, per Theor. V. Ergo, tempus inventum est illud ipsum, quo durante, Luna describet arcum similem arcui d u in orbitâ in quam transfertur per actionem Solis.

LEMMA I.

Invenire integrales quantitatum y d u, z d u, y² d u, z² y d u, z y² d u, y z² d u, y³ d u, y⁴ d u, &c. factorum ex elemento arcûs et dignitatibus ejus sinûs y, vel ejus cosinus z.

Ex naturâ circuli triangulorum P T E est simile triangulo fluxionali P m n; ideòque est P T (r) ad P m (d u) ut P E (y) ad P n (d z), ut T E (z) ad m n (d y), hinc est d u = $\frac{r d z}{y} = \frac{r d y}{z}$;



hinc fit primò, ut, omnes termini in quibus alteruter factorum y vel z quantitatis d u dimensionem habet imparis numeri, possint integrari; nam loco elementi d u, ponatur ejus valor $\frac{r d y}{z}$

si y sit imparis dimensionis, vel $\frac{r d y}{z}$ si z sit imparis dimensionis, eâ substitutione fiet ut pars

evadant dimensiones y vel z quæ prius imparis erant, et quia in primo casu habetur fluxio d z, loco y² substituitur r² — z², sicque omnes factores ducentes d z, erunt aut r aut z, ideòque quantitas proposita erit absolute integrabilis in altero casu cum habeatur fluxio d y, ut tollantur factores z cujus dimensiones sunt pares, loco z² substituitur r² — y², sicque omnes factores ducentes d y, erunt aut r aut y, ideòque habebuntur termini absolute integrabiles.

Secundò, factores quantitatis d u sint pares, et quidam primò sit z² d u vel y² d u, integralis horum elementorum est r × C P Q T vel r × C P E, nam est z² d u = r z d y, et s d y est fluxio areæ C P Q T; est y² d u = r y d z, et y d z est fluxio areæ C P E; itaque quando P ex C pervenit in A et absolvit quadrantem integralis z² d u vel y² d u est r × $\frac{r c}{8}$.

Sint itaque ambo factores y vel z quantitatis d u numero pari qualicumque, semper reduci poterunt ita ut quantitas proposita continet dignitates pares alterutrius quantitatis, puta y, altera variabili exclusa ponendo loco z² quantitatem r² — y². Si ergo quaeratur integralis quantitatis y^{2 m} d u, ut ea ad impares dimensiones revocetur, spectetur ut y^{2 m} — 1 × y d u; et autem juxta methodos vulgares $\int y^{2 m - 1} \times y d u = y^{2 m} - 1 / y d u = \int y d u \times (2 m - 1) \times y^{2 m - 2} d y$, sed y d u = $\frac{r y d z}{y} = r d z$, et integralis quantitatis d z sumptæ a puncto C est r — z, hinc $\int y d u = r r - r z$, quæ substi-

tuta in valore integralis $\int y^{2m-1} \times y \, du$ ea fit $y^{2m-1} r^2 - y^{2m-1} r z - r r f(2m-1) \times y^{2m-2} dy + f. r z \times (2m-1) \times y^{2m-2} dy$, sive (quia $r r f(2m-1) \times y^{2m-2} dy = \frac{2m-1}{2m-1} r^2 y^{2m-1} = r^2 y^{2m-1}$) est $\int y^{2m-1} du = -r z y^{2m-1} + f. \times (2m-1) \times r z \times y^{2m-2} dy$ (sive quia $r dy = z du$) $= -r z y^{2m-1} + f. (2m-1) \times r z y^{2m-2} du$ (et loco z^2 substituendo $r^2 - y^2$) $= -r z y^{2m-1} + (2m-1) f. r^2 y^{2m-2} du - (2m-1) f. y^2 du$; et transpositione facta est $2m f. y^{2m-2} du = -r z y^{2m-1} + f. (2m-1) \times r^2 y^{2m-2} du$, et tandem $\int y^{2m-2} du = \frac{r z y^{2m-1}}{2m} \times r^2 f. y^{2m-2} du - \frac{r z y^{2m-1}}{2m}$;

hinc cum habeatur integralis quantitatis $y^2 du$; si queratur integralis $y^4 du$, ea obtinebitur per hanc formulam, siquidem in eo casu est $y^{2m-2} du = y^2 du$, et ex ejus integratione habetur integratio quantitatis $\int y^2 du$, quæ isto in casu est $y^4 du$; simili modo ex integrali quantitatis $y^4 du$ habebitur integralis quantitatis $y^6 du$, &c.

Quando P pervenit in A, terminus $\frac{r z y^{2m-1}}{2m}$ evanescit, quia illic est $z = 0$ habetur ergo $\int y^{2m} du = \frac{2m-1}{2m} r^2 \int y^{2m-2} du$; in eo ergo casu si queratur integralis quantitatis $y^4 du$, fiat $m = 2$ erit $f. y^4 du = \frac{1}{3} r^2 \int y^2 du$, sed $\int y^2 du = \frac{r^2 c}{8}$ ideòque $f. y^4 du = \frac{3 r^4 c}{8}$; si queratur integralis quantitatis $y^6 du$ fiat $m = 3$ et erit $\int y^6 du = \frac{5}{6} r^2 \int y^4 du$ sed $\int y^4 du = \frac{3 r^4 c}{4.8}$ ideòque $f. y^6 du = \frac{3.5 r^6 c}{4.8}$.

Corol. 1. Si in primo casu in quo alteruter factorum quantitatis $d u$ aut ambo factores sunt imparis dimensionis, totum elementum per quantitates $r, z, d z$ exprimatur, integralis quæ tunc obtinebitur non erit completa, quia cosinus z ex T incipit et arcus u ex puncto C, unde $d z$ negativum esse debet; erit ergo $\int r^a z^m d z = C - \frac{r^{a+m+1}}{m+1}$, ut hæc constans C obtineatur, observandum quod ubi u est 0, ideòque evanescit hoc elementum, tunc est $z = r$ ergo $0 = C - \frac{r^{a+m+1}}{m+1}$ hinc $C = \frac{1}{m+1} r^{a+m+1}$; v. gr. sit $f. r z^3 d z = C - \frac{r z^4}{4}$ fit $C = \frac{1}{4} r^4$.

Cor. 2. Si e contra arcus u ex puncto A inciperet, integralis quæ obtinebitur cum elementum per quantitatem y exprimeretur, completa non erit, et eâ ratione compleri debebit quæ in præcedenti Corollario est indicata.

Cor. 3. In secundo casu, si u ex puncto A incipiat, erit $f. y d z = A P E T$ et $f. z d y$ est area A P Q, ut liquet ex ipsâ figurâ.

Cor. 4. Denique si u ex puncto A incipiat et ambo factores sint uterque dimensionis paris, elementum non est reducendum ad litteram y , ut in Lemmatis solutione factum est, sed ad quantitatem z , quæ in toto calculo loco y substituatur et vice versa; liquet enim quod z est sinus respectu arcus A P, et y ejus cosinus.

PROBLEMA I.

Invenire totam retardationem Lunæ dum unam revolutionem absolvit.

Constat ex Theor. VI. Quod si Sol sit immotus, et Luna in totâ revolutione eam vim Solis patiat quam patitur in puncto P, eveniet ut tempus quo describitur arcus $d u$, (quodque

debet esse $\frac{M d u}{c}$ posito M tempore periodico Lunæ, et c peripheriâ quam percurrit) evadat $\frac{M d u}{c} \times (1 + \frac{2 Y}{V})$; itaque tempus illud producit quantitate $\frac{M d u}{c} \times \frac{2 Y}{V}$, ideò cum tem-

pore $\frac{M d u}{c}$ iste arcus $d u$ describi debuisset hoc tempore $\frac{M d u}{c} \times \frac{2 Y}{V}$, arcus $\frac{2 Y}{V} d u$ describeretur, hæc est ergo retardatio Lunæ in puncto P orta per actionem Solis.

Sed in singulo puncto P orbitæ lunaris vis Y est $\frac{F}{a} \times (\frac{3 y y}{r} - r)$ (per Theor. IV.) ergo ele-

mentum retardationis Lunæ est $d u \frac{2 F}{V a} \times (\frac{3 y y}{r} - r)$, cujus integralis secundum Lemma

præcedens est $\frac{2 F}{V a} \times (\frac{3 r^4 c}{8 r} - \frac{1}{4} r c)$, sive $\frac{2 F}{V a} \times \frac{1}{8} r c$, cum P pervenit in A, cumque idem sit Solis effectus in singulo quadrante, tota retardatio Lunæ est $\frac{2 F}{V a} \times \frac{3}{8} r c$ sive $\frac{F r c}{V a}$, dum Luna revolutionem absolvit, respectu Solis immoti.

Si reddatur Soli motus suus, et loco mensis periodici M, mensis synodicus μ intelligatur, et censeatur quod proxime verum est, mensem synodicum qui respondet mense periodico in circulo a d b c peracto, esse ad eum mensem periodicum ut μ ad M, ideòque eum mensem synodicum esse $\mu \times (1 + \frac{2 Y}{V})$ omnia procedent ut prius,

et erit $\frac{F r c}{V a}$ retardatio Lunæ toto ejus tempore synodico.

Scrupulus esse potest, utrum in hac expressione, quantitas c designet peripheriam 360 grad. an eam peripheriam conjunctam cum viâ quam Sol emensus est mense synodico; sed ex integrationis adhibitæ ratione patet, actum fuisse de

veris quadrantibus circuli, ideòque hic c designare peripheriam ipsam nihilque ultra, ita ut $\frac{Frc}{V_a}$ sit retardatio absoluta Lunæ tempore synodico.

Verùm alia certior correctio est adhibenda; constat ex Propositione XXVI. hujusce Libri, velocitatem Lunæ augeri per Solis actionem radio orbitæ lunaris perpendicularem, ita ut velocitas Lunæ in quadraturis sit ad ejus velocitatem in quolibet puncto ut $109.73 r$ ad $109.73 r + \frac{y y}{r}$, hinc tempus quo describitur arcus $d u$ brevius fit in proportionem velocitatum, ideòque

cùm id tempus fuerit $\frac{\mu d u}{c} \times (1 + \frac{2 Y}{V})$, fit $\frac{109.73 r}{109.73 r + \frac{y y}{r}} \times \frac{\mu d u}{c} \times (1 + \frac{2 Y}{V})$ sive frac-

tionem ad series reducendo $1 - \frac{y y}{109.73 r r} \times \frac{\mu d c}{c} \times (1 + \frac{2 Y}{V})$; quantitas autem hæc $\frac{\mu d c}{c} \times (1 + \frac{2 Y}{V})$; duas partes continet, priorem in dependentem ab actione Solis secundùm directionem radii exercitam, et de acceleratione ad

cujus integralis pro quadrante juxta Lemma I. est $\frac{2 F}{V_a} \times (\frac{3 r^2 c}{8 r} - \frac{1}{2} r c - \frac{3 \times 3 r^4 c}{4 \times 8 \times 109.73 r^3} + \frac{r^2 c}{8 \times 109.73})$ sive $\frac{2 F r c}{V_a} \times \frac{1}{2} - \frac{5}{48.109.73}$ et quadruplicatum pro totâ revolutione fit $\frac{F r c}{V_a} \times \frac{433.92}{438.92}$

Corol. Constat ex Cor. 2. Prop. IV. Lib. I. Princip. Quod vires centrales sunt inter se directè ut radii, et inversè ut temporum periodicorum quadrata: hinc, si sit A annus sidereus, et M mensis periodicus sidereus sepositâ omni Solis actione, erit F ad V ut $\frac{a}{A A}$ ad $\frac{r}{M M}$, sive $\frac{F}{V} = \frac{r A A}{M M}$ substituto i-

taque hoc valore loco $\frac{F}{V}$ in quantitate $\frac{F r c}{V_a} \times \frac{433.92}{438.92}$ quæ retardationem durante mense synodico exprimit, ea retardatio fit $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92} c$, et si non attendatur ad correctionem quæ pendet ex actione Solis perpendicularis radio orbitæ lunaris, ea retardatio foret $\frac{M^2}{A^2} c$.

PROB. II.

Dato tempore synodico apparenti Lunæ, invenire tempus periodicum quod observari debuisset, si abesset actio Solis in Lunam secundum radium orbitæ lunaris exercitam.

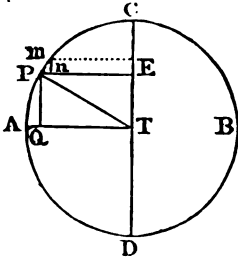
Sit S mensis synodicus apparens, A annus sidereus, inde (ex notâ proportionem mensis synodici ad periodicum) invenietur mensem periodicum apparentem esse $\frac{A S}{A + S}$, et quoniam hoc tempore periodico Luna describeret peripheriam c , deducitur quod tempore synodico S describit arcum $\frac{A + S}{A} c$.

Sed Luna citra Solis actionem tempore periodico M describere debuisset peripheriam c , et eadem in hypothesi, tempore S descripsisset arcum $\frac{S c}{M}$ hinc ergo retardatio absoluta quam

patitur tempore S est $\frac{S c}{M} - \frac{A + S}{A} c = \frac{A S - A M - M S}{A M} c$. Sed per Corollarium præcedentis Problematis ea retardatio inventa

fuerat $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92} c$ hinc obtinetur hæc æ-

quatio $A S - A M - M S = \frac{433.92 M^3}{438.92 A}$, loco M scribatur $X A$, loco S scribatur $E A$, et fiet hæc æquatio $A^2 E - A^2 X - A^2 E X = \frac{433.92 A^3 X^3}{438.92 A}$ sive $E = X + \frac{433.92}{438.92} X^3$ sed mensis synodicus medius est .08084899 A



hanc partem pertinente actum est in XXVI. Prop.; et hinc fit ut mensis synodicus medius sit brevior eo qui debuisset esse in proportionem numeri 10973 ad 11023, et inæqualitates inde natæ in variis partibus mensis synodici in variatione continentur; altera pars $\frac{\mu d u}{c} \times \frac{2 Y}{V}$ pendet ab actione Solis secundùm radium orbitæ lunaris exercitam, et de hac solâ isto calculo agitur, ideòque cùm ex istâ oriatur retardatio $\frac{2 Y}{V} d u$, et tempus $\frac{\mu d u}{c}$ fiat minus in propor-

tionem 1 ad $1 - \frac{y y}{109.73 r^2}$ retardatio quæ fiet dum arcus $d u$ describi debuisset, erit solummodo $\frac{2 Y d u}{V} - \frac{2 Y y y d u}{109.73 r^2 V}$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times (\frac{3 y y}{r} - r)$ evadet hoc elementum $d u \times \frac{2 F}{V a} \times (\frac{3 y y}{r} - r - \frac{3 y^4}{109.73 r^3} + \frac{y y}{109.73 r})$

hinc $E = .0804896$ et æquatio fit $.0804896$
 $= 1.0804896 X + \frac{433.92}{438.92} X^3$, loco X sub-
stituatur $.0744 + R$ et æquatio evadit $.0804896$
 $= .08082129 + 1.09726905 R$, unde habetur
 $.00002767 = 1.09726905 R$, hinc obtinetur R
 $= .0000252$ et $M = .0744252 A$.

THEOR. VII.

Si mutetur utcumque Solis a Terrâ distantia, ita ut loco a dicatur X , dico quod, cæteris manentibus, retardatio Lunæ durante tempore synodico, cùm Terra distabit a Sole quantitate X erit $\frac{a^3 M^2}{X^3 A^2} \times \frac{433.92 c}{438.92}$.

Nam ex Problemate I. retardatio Lunæ inventa fuerat $\frac{F r c}{V a} \times \frac{433.92}{438.92}$ sed in aliâ a Sole distantia loco a ponatur X , et præterea loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$, decrescit enim vis Solis F ut quadrata distantiarum, hac ergo substitutione factâ retardatio Lunæ sit $\frac{a^2 F r c}{X^3 V} \times \frac{433.92}{438.92}$; tum verò loco $\frac{F}{V}$ substituitur $\frac{a M^2}{r A^2}$ et habebitur expressio Theorematis hujusce.

LEMMA II.

Foco F . axe majore $N F n$ qui dicatur $2 a$ describatur ellipsis, sit e ejus excentricitas eaque parva sit, axis minor sit $2 b$, erit $b^2 = a^2 - e^2$; ex foco ut centro radio a describatur circulus, et ducantur a foco lineæ secantes circulum in P et ellipsim in Π , linea $F \Pi$ dicatur x , sinus anguli $A F P$ sit y , cosinus z ; dico quod linea x erit $\frac{b^2 a}{a^2 + e z}$.

Ducatur ex Π , ΠH perpendicularis ad axem, et propter triangulorum $F P E$, $F \Pi H$ similitudinem erit $F P$ ad $F \Pi$ ut $P E$ ad ΠH et ut $F E$ ad $F H$, hoc est $a : x = y : \frac{y}{a} x = z :$

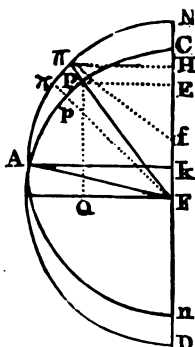
$\frac{a}{x} x : \text{sit } f \text{ alter focus ellipsos, ex eo ducatur linea } f \Pi, \text{ ex natura ellipsos est } f \Pi = 2 a - x \text{ sed } f \Pi^2 = \Pi H^2 + f H^2 \text{ et } \Pi H = \frac{y}{a} x, \text{ et } f H = F H - F f \text{ vel } F f - F H \text{ vel } F f + F H, \text{ et est } F f = 2 e \cdot \text{et } F H = \frac{a}{x} x \text{ hinc } \Pi H^2 + f H^2 = \frac{y^2}{a^2} x^2 + \frac{a^2}{x^2} x^2 + \frac{4 e z}{a} x + 4 e^2 = f \Pi^2 = 4 a^2 - 4 a x + x^2, \text{ est autem } \frac{y^2}{a^2} x^2 + \frac{a^2}{x^2} x^2 = x^2, \text{ ergo } \frac{4 e z}{a} x + 4 e^2 = 4 a^2 - 4 a x, \text{ et dividendo}$

per 4 et transponendo est $a x + \frac{e z}{a} x = a^2 - e^2 = b^2$; unde habetur $x = \frac{b^2 a}{a^2 + e z}$. Q. e. o.

Cor. Hic valor x in series resolutus est $\frac{b^2}{a}$

$\times (1 \pm \frac{e z}{a^2} + \frac{z^2 e^2}{a^2} \pm \frac{e^3 z^3}{a^3}, \&c.)$ sumptis signis superioribus quando E cadit in eadem parte ac centrum, et sumptis signis inferioribus quando E cadit in partem quâ non est centrum.

Cor. 2. Si fractio $\frac{a}{x} \times \frac{a^2 + e z}{b^2}$ ad dignitates superiores evehat, termini in quibus e plurium dimensionum poterunt omitti, propter suppositionem excentricitatem exiguum esse, et quidem si agatur de Solis excentricitate, ea non



assurgit ad duas centesimas radii, et excentricitas Lunæ non assurgit ad septem centesimas.

Cor. 3. Hinc tardatio Lunæ quæ ex Solis actione pendet, fiet durante tempore synodico S , $\frac{433.92 c}{438.92} \times \frac{M^2}{A^2} \times \frac{a^2 + e z^3}{b^2}$, positus a pro semi-axe majore orbitæ Solis, e pro ejus excentricitate, et b pro axe minore.

PROBL. III.

Determinare quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis dum Terra describit circa Solem arcum quammimum datum.

Sit ut in præcedenti Lemmate $N \Pi n$ ellipsis quam Terra describit, sit Sol in foco F , ducatur ut prius linea $F P \Pi$ et ei quam proxima $F p$ quæ secet in circulo $C A D$ arcum $P p$, et quærat quantitas graduum quâ tardatur Luna per Solis actionem, dum Terra videretur e Sole, descripsisse arcum $P p$.

Sit ut prius A tempus annuum, a ellipsos semi-axe major, k circumferentia eo ratio descripta ex foco F , sit e excentricitas, $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ semi-axe minor, area semi-circuli

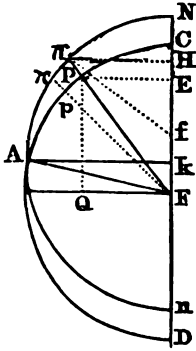
$\frac{a k}{4}$, quæ est ad aream semi-ellipsos ut est a ad

b , hinc area semi-ellipsos est $\frac{b k}{4}$.

Dicatur arcus $A P$, u , arcus $P p$ sit $d u$, radio $F \Pi$ sive X describatur arculus ex π in $F \Pi$, is erit ad $d u$ ut est $F \Pi$ sive X ad a , ergo is arculus erit $\frac{x d u}{a}$, ideoque area $F \Pi \pi$ est $\frac{x^2 d u}{2 a}$

$$= \frac{b^4 a d u}{2 \times a^2 + e s^2} \text{ (per Lem. præced.)}$$

Sed tempus quo Terra arcum $P p$ descripsisse videtur, est ad tempus semestre $\frac{1}{2} A$, ut hæc area $F \Pi \pi$, sive $\frac{x^2 d u}{2 a}$ ad semi-ellipsim $\frac{b k}{4}$. Est itaque illud tempus quo Terra arcum $P p$ descripsisse videtur $\frac{4 x^2 d u}{2 a b k} \times \frac{1}{2} A = \frac{x^2 A d u}{a b k}$.



Inventum autem est quod tempore S Luna tardabatur propter actionem Solis quantitate $\frac{433.92 c}{439.92} \times \frac{M^2 a^3}{A^2 x^3}$ ergo tempore $\frac{x^2 A d u}{a b k}$ tardabitur quantitate $\frac{433.92 c \times x^2 A d u}{439.92 \times S a b k} \times \frac{M^2 a^3}{A^2 x^3}$ sive $\frac{433.92 c \times d u}{439.92 \times S b k} \times \frac{M^2 a^2}{A x}$, aut substituendo valorem fractionis $\frac{a}{x}$, fit $\frac{433.92 c d u}{439.92 S b k} \times \frac{M^2 a}{A} \times \frac{a^2 + e z}{b^2}$ sive $\frac{433.92 c d u \times M^2 a}{439.92 S A b^3 k} \times (a^2 + e z)$.

PROBL. IV.

Invenire retardationem Lunæ ex actione Solis ortam durante semestri revolutione Terræ circa Solem.

Primo inveniantur integralis elementi per Probl.

III. inventi, quod est $\frac{433.92 c d u \times M^2 a}{439.92 S A b^3 k} \times (a^2 + e z)$ cuius integralis est $\frac{433.92 c \times M^2 a}{439.92 S A b^3 k} \times (a^2 u + a c y)$.

Si ergo sumatur semestris revolutio, illuc est $u = \frac{1}{2} k$, et termini in quibus occurrit y esse destruantur, ut quidem liquet ex eo quod y illic evanescat, unde semestris retardatio sit $\frac{433.92 c \times M^2 a}{439.92 S A b^3 k} \times \frac{1}{2} a^2 k = \frac{433.92 c \times M^2 a^2}{439.92 S A b^3} \times \frac{1}{2}$ sive ponendo $a = b$ quod proxime verum est $\frac{433.92 c M^2}{439.92 S \times A} \times \frac{1}{2}$.

Cor. Si queratur retardatio Lunæ, facta tempore quo Terra a suo aphelio ad mediocrem ejus distantiam pervenit; observandum quod eo in loco arcus u est $\frac{1}{2} k - e$, et y est b , unde integralis inventa evadit $\frac{433.92 c \times M^2 a}{439.92 S A b^3 k} \times (\frac{1}{2} a^2 k - a^2 e - a b e)$ aut simplicius si quantitates a et b pro æqualibus sumere liceat, fit $\frac{433.92 c \times M^2}{439.92 S A k} \times (\frac{1}{2} k - 2e)$ sive $\frac{433.92 c a^3 \times M^2}{439.92 S A b^3} \times (\frac{1}{2} - \frac{2e}{k})$.

PROBL. V.

Invenire æquationem motûs mediû lunæ quæ pendet ex Solis actione, et quæ est addenda quando Terra est in suâ mediocri distantia a Sole.

Primo observandum est, motum Lunæ, qualis ex apparentiis determinatur; ex duplici causâ pendere, ex actione Terræ cum motu projectili conjunctâ, et ex Solis actione quæ motum ex præcedenti causâ natum tardat; prior motus in orbe circulari uniformis foret, sed tardatio ex alterâ causâ procedens inæqualiter priori illi esse immiscet. Astronomi verò cum motum medium Lunæ æstimant, hanc tardationem sumunt quasi uniformiter in omne tempus distributam.

Cum ergo ea tardatio major sit in aliquibus Terræ positionibus, in aliis sit minor, questio est quenam correctio motui medio Lunæ sit faciendâ, ut habeatur Lunæ locus verus, ideoque investigandâ est differentia inter tardationem proportionaliter tempori distributam, et tardationem veram quæ singulo loco competit, quæ differentia loco medio addita, aut ex eo detracta, restituat verum locum Lunæ quatenus hæc Solis irregularitas spectatur.

Ut ergo habeatur tardatio temporis proportionalis quando Terra est in mediocri distantia, fiat secundum Regulam Keplerianam, ut area semi-ellipsos (quæ est $\frac{b k}{4}$ et est semestri tempori

proportionalis) ad aream $F N A$ (quæ est ellipsos quarta pars cum triangulo $F A K$ ideoque est $\frac{b k}{8} + \frac{b c}{2}$ et est proportionalis tempori quo Terra ab aphelio suo ad mediocrem a Sole distantiam pervenit) hoc est ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{2} + \frac{e}{k}$, ita tardatio semestri tempore facta quæ (per Probl. IV.) est $\frac{433.92 c a^3 \times M^2}{439.92 S A b^3} \times \frac{1}{2}$, ad tardatio-

nem proportionalem tempori quo Terra ab aphelio ad mediocrem suam a Sole distantiam pervenit, quæ erit ergo $\frac{433.92 c a^3 \times M^2}{438.92 S A b^3} \times (\frac{1}{2} + \frac{e}{k})$; sed per Cor. Probl. IV. vera tardatio

eo in loco erat $\frac{433.92 c a^3 \times M^2}{438.92 S A b^3} \times (\frac{1}{2} - \frac{2e}{k})$.

Hinc subtractione factâ, tardatio mediocrius superat tardationem veram quantitate

$\frac{433.92 c a^3 \times M^2}{438.92 S A b^3} \times \frac{3e}{k}$. Hæc ergo quan-

titas graduum debet addi loco medio ut locus verus obtineatur. Si ergo loco e sumatur .016 $\frac{1}{2}$ a, erit S e = .050 $\frac{1}{2}$ a, et loco k scribatur

6.283188 a; et loco c, 360 gr. erit $\frac{3e}{k} =$

$\frac{18^\circ.225}{6.283188} = 2^\circ.9005$; præterea $\frac{M^2}{S.A}$ ad calculum revocatur si loco M ponatur .0744252 A; et loco S, .08084896 A, ut in Prob. II. repertum est, fit $\frac{M^2}{S.A} = .06851183835$, idque ductum in

fractionem $\frac{433.92}{438.92}$ efficit .06773137 cùmque

fractio $\frac{a^3}{b^3}$ sit tantum 1.00045 et superius sumptum sit a loco b, hæc fractio pro unitate sumi

potest, hinc est $\frac{a^3 M^2}{b^3 S.A} \times \frac{433.92}{438.92} = .06773137$,

quod ductum in 2 $^\circ$. .9005 efficit 0 $^\circ$.19646 quod ductum per 60'. efficit 11'.7876, sive 11'. 47". 256 $''$, quam Newtonus 11'. 49". assumit; majorem autem æquationem in hypothesi ellipticâ invenimus, unde medium quoddam inter utramque ab ipso assumptum esse videtur.

Cor. 1. Cùm hæc æquatio sit $\frac{433.92 \times c a^3 \times M^2}{438.92 \times S A b^3}$

$\times \frac{3e}{k}$ sive proxime $\frac{433.92 c \times M^2}{438.92 S \times A} \times \frac{3e}{k}$, et

quantitates c, M, S, A, k, sint constantes, hæc æquatio ubi Tellus est in suâ mediocri distantia, est sicut excentricitas orbitæ Telluris e, ideòque si ea excentricitas major sit quàm .016 $\frac{1}{2}$ radii a, crescat hæc æquatio in hac proportione; sit v. gr.

$e = a \times .016\frac{1}{2}$, et fiat ut 16 $\frac{1}{2}$ ad 16 $\frac{1}{2}$ ita 11'. 47". 616 ad quartum, is quartus terminus 11'. 49". 42, erit æquatio, suppositâ excentricitate orbitæ Telluris .016 $\frac{1}{2}$, hoc in casu Newtonus æquationem facit 11'. 50".

Cor. 2. In alio quovis loco orbitæ Telluris, æquatio habebitur si fiat ut semi-ellipsi $\frac{b k}{4}$ ad

aream F N Π ita semestris tardatio $\frac{433.92 c M^2}{438.92 \times S.A}$

$\times \frac{a^3}{2 b^3}$ ad tardationem huic tempori proportionalem, quæ erit ergo $\frac{433.92 c \times M^2 \times F N \Pi}{438.92 \times S \times A b^3}$

$\times \frac{2 a^3}{b k}$ tum verò si sumatur tardatio loco Π con-

veniens, quæ est $\frac{433.92 \times c \times M^2 a}{438.92 \times S \times A b^3 k} \times (a^2 u + a e y)$

(Probl. IV.) erit hæc æqu. $\frac{433.92 c \times M^2 a^2}{438.92 \times S.A \times b^3 k}$

$\times (\frac{2 a \times F N \Pi}{b} - a u \pm e y)$, ideòque erit ut

$\frac{2 a F N \Pi - a b u \pm b e y}{b}$; aut sumendo a =

b, ut $\frac{2 F N \Pi - b u \pm e y}{b}$. Jam verò hæc

quantitas est ipsa æquatio centri Solis; nam arcus qui describeretur per motum medium Solis eo tempore quo arcus u reverâ percurritur, hac

proportionem obtinetur, ut semi-ellipsi $\frac{b k}{4}$ ad

aream F N Π ita semi-circulus $\frac{1}{2} k$ ad arcum

medio motu descriptum; qui ergo erit $\frac{4 F N \Pi}{b k}$

$\times \frac{1}{2} k = \frac{2 F N \Pi}{b}$; sed arcus tunc temporis

reverâ descriptus, est N Π sive u, ergo æquatio centri Solis est $\frac{2 F N \Pi}{b} - u$ sive $\frac{2 F N \Pi - b u}{b}$

cui quant. $\frac{2 F N \Pi - b u \pm e y}{b}$ est quam

proximè æqualis, nam terminus e y propter exiguitatem e respectu b, et y respectu u considerationem nullam hic meretur; ergo æquatio lunaris in quovis loco orbitæ Telluris est sicut æquatio centri Solis eo in loco; ergo ut æquatio centri Solis in mediocri distantia Telluris a Sole, est ad æquationem motûs lunaris adhibendam cùm Tellus est in ea mediocri distantia a Sole, ita est æquatio centri Solis in quâvis distantia u ab aphelio, ad æquationem Luni-Solarem primam Lunæ illi loco convenientem.

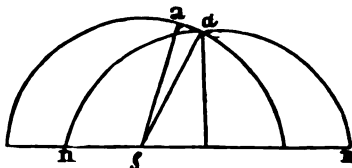
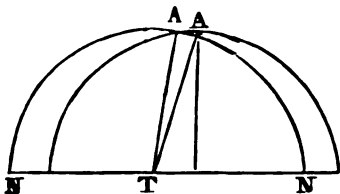
Cor. 3. Æquatio ista Lunæ, quæ solaris prima dicitur, est maxima in distantia mediocri Terræ a Sole; nam cùm sit proportionata æquationi centri Solis, et æquatio centri Solis sit maxima in mediocri distantia Telluris a Sole per ea quæ primo Libro circa hanc æquationem demonstrata sunt, æquatio solaris Lunæ eo in loco maxima pariter erit.

De incremento motûs mediæ Lunæ, et ejus æquatione ex Solis actione pendentibus, in hypothesi eum orbem esse ellipticum, methodo diversâ ab eâ quæ in calculo præcedente fuit adhibita.

THEOR. I.

Sint duæ ellipses descriptæ circa corpora centralia in ipsarum focus posita, quorum vires absolutæ diversæ sint; dico, quod si tempora periodica in utraque ellipsi sint ut earum ellipsium areæ, ellipses illæ erunt inter se similes.

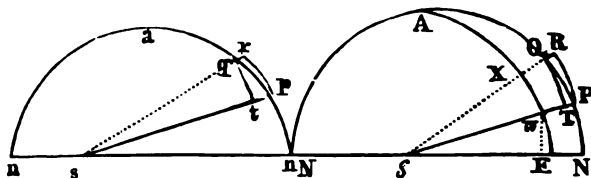
Describantur duæ ellipses N A N, n a n, circa corpora S et s in focus ellipsium posita, et quorum vires sint diversæ, si totum tempus quo describitur peripheria ellipsæos N A N, sit ad totum tempus quo describitur peripheria ellipsæos n A n



ut area prioris ellipsoes ad aream alterius, ellipsoes illæ similes esse debebunt, hoc est earum ellipsium axes majores erunt inter se ut sunt inter se earum minores axes, v. gr. si semi-axis major ellipsoes N A N dicatur r, ejus minor semi-axis dicatur q et major semi-axis ellipsoes n a n dicatur ϵ , ejus minor semi-axis π , dico quod erit q ad π ut est r ad ϵ .

Ex naturâ ellipsium area ellipsoes N A N est ad aream ellipsoes n a n ut est r q ad $\epsilon \pi$, et ex hypothesi tempus periodicum in ellipsi N A N est ad tempus periodicum in ellipsi n a n in

eadem ratione r q ad $\pi \epsilon$, si ergo sumantur arcus similes A A, a a in mediocri distantia in utraque ellipsi, tempora quibus describuntur illi arcus erunt ut tota tempora periodica, quia illi arcus A A, a a in mediocri distantia positi describuntur motu medio corporum eas ellipsoes describentium, et erunt etiam ut areæ A S A et a s a hypothesi, et istæ areæ A S A et a s a, sunt ut quadrata linearum S A et s a sive ut r^2 ad ϵ^2 ; ergo est r^2 ad ϵ^2 ut r q ad $\epsilon \pi$, et dividendo terminos homologos per r et ϵ est r ad ϵ ut q ad π ; ergo ellipsoes sunt similes. Q. e. d.



THEOR. II.

Sint, ut prius, duæ ellipsoes descriptæ circa corpora centralia in ipsarum focis posita quorum vires absolutæ diversæ sint, et sint tempora periodica in utraque ellipsi ut earum ellipsium areæ, dico quod axes majores earum ellipsium erunt reciproci ut vires absolutæ corporum centralium.

Vis absoluta corporis S dicatur V, corporis s dicatur $V - Y$, ducantur in utraque ellipsi lineæ S P, s p ad lineas apsidum S N, s n similiter inclinatæ, et iis proximæ ducantur lineæ S Q, s q angulos similes P S Q, p s q constituentes, ducantur ex Q et q perpendiculares Q T, q t in lineas S P, s p, et productis lineis S Q, s q donec occurrant tangentibus in R et r, erunt Q R, q r virium centralium effectus dum describuntur arcus P Q, p q.

Primò quidem ex hypothesi, tempora quibus describuntur ii arcus P Q, p q erunt ut areæ P S Q, p s q, et quia, ex const. illæ areæ sunt similes, erunt ut quadrata linearum homologarum sive ut $S P^2$ ad $s p^2$ aut $Q T^2$ ad $q t^2$. Sunt autem virium centralium effectus, directè ut vires centrales et ut quadrata temporum, vires verò centrales sunt ut $\frac{V}{S P^2}$ ad $\frac{V - Y}{s p^2}$, et quadrata temporum sunt ut $S P^4$ ad $s p^4$, ergo lineæ Q R et q r erunt inter se ut $\frac{V}{S P^2} \times S P^4$ ad

$$\frac{V - Y}{s p^2} \times s p^4 \text{ sive ut } V \times S P^2 \text{ ad } V - Y \times s p^2, \text{ aut denique ut } V \times Q T^2 \text{ ad } V - Y \times q t^2.$$

Secundo. In omnibus ellipsis per vim centalem ex foco prodeuntem descriptis latus rectum est æquale $\frac{Q T^2}{Q R}$ ut constat ex Prop. XI.

Lib. I. Princip. Si itaque latus rectum ellipsoes N A N sit L, ellipsoes verò n a n sit λ , erit $L = \frac{Q T^2}{Q R}$ et $\lambda = \frac{q t^2}{q r}$, loco Q R et q r quantitates

ipsis proportionales $V \times Q T^2$ et $V - Y \times q t^2$ collocentur, et erit L ad λ ut $\frac{Q T^2}{V \times Q T^2}$ ad

$$\frac{q t^2}{(V - Y) q t^2} \text{ sive ut } \frac{1}{V} \text{ ad } \frac{1}{V - Y}; \text{ sed } \alpha$$

naturâ ellipsium, est $L = \frac{q^2}{r}$ et $\lambda = \frac{\pi^2}{\epsilon}$, præterea quia ellipsoes sunt similes, ex præcedente

Theoremate, est q : r = π : ϵ , ideòque $\frac{q}{r} = \frac{\pi}{\epsilon}$;

est ergo L : λ ut q ad π sive ut r ad ϵ ; itaque est r ad ϵ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V - Y}$. Q. e. d.

Cor. In his itaque hypothesibus tempora periodica erunt inversè ut quadrata virium absolutarum corporum S et s; sunt enim per Theor. I.

ut r^2 ad e^2 , et ex hoc Theoremate est r ad e ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; ergo tempora periodica sunt ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{V-Y|^2}$.

THEOR. III.

Sit T Terra, P Luna quæ circa Terram (sepositâ omni actione Solis) describat orbitam circulo proximam tempore periodico M, vis absoluta Terræ in Lunam dicatur V, minuatur ea vis absoluta quantitate exiguâ Y; dico quod si ea vis $V-Y$ maneat constans, Luna describet circa Terram orbitam similem illi quam prius describebat, ita ut si prioris orbitæ semi-axis major dicatur r, semi-axis major orbitæ novæ erit $\frac{Vr}{V-Y}$ et tempus periodicum erit $\frac{V^2 M}{V-Y|^2}$ sive $M \times (1 + \frac{2Y}{V} \times \frac{3Y^2}{V^2} + \frac{4Y^3}{V^3}, \&c.)$.

Nam 1. cùm Luna discedit a suâ orbitâ, retinetur tamen per vim decrecentem secundum quadrata distantiarum, describet ergo circa corpus in foco positum sectionem conicam, quæ erit adhuc ellipsis, quia mutatio vis centralis ponitur exigua, et per vim priorem orbita circulo finitima describebatur, ita ut nec in hyperbolam nec in parabolam mutari possit hæc orbita.

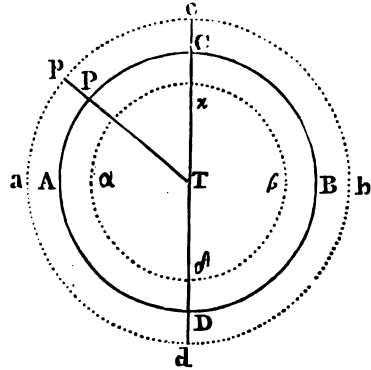
2. Cùm vis nova Y ad centrum sit etiamnum directa, quancumque in viam flectatur Luna, areæ semper manebunt temporibus proportionales, ideo si tandem in orbitam a d b c deveniat ex orbitâ A D B C, tempus quo describetur peripheria a d b c erit ad tempus M quo describebatur peripheria A D B C ut tota area A D B C ad aream a d b c.

3. Cùm ergo in his orbitis A D B C, a d b c (quæ describuntur circa corpus idem quidem, sed cujus vis absoluta alia censetur cùm describitur orbita A D B C quam cùm describitur a d b c) tempora sint areis proportionalia, istæ areæ similes erunt, per Theor. I., circulisque finitimæ per hyp., axes majores erunt inversè ut vires V et $V-Y$, per Theor. II. et tempora periodica ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{V-Y|^2}$ itaque si in orbita A D B C,

id tempus dictum fuerit M, in orbita a d b c, erit $\frac{V^2 M}{V-Y|^2}$, sive hanc quantitatem in seriem resol-

vendo $M \times (1 + \frac{2Y}{V} + \frac{3Y^2}{V^2})$. Q. e. d.

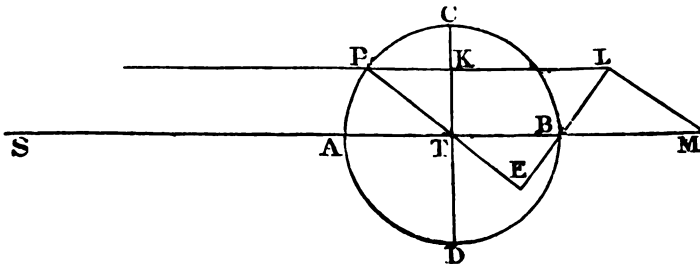
Cor. Iisdem principiis ostendetur, quod si vis absoluta Terræ augetur quantitate exiguâ Y, Luna deferretur in orbitam interiorē $\alpha \delta \beta \alpha$



similem priori A D B C, cujus radius foret $\frac{rV}{V-Y}$, sumendo quantitatem Y negativè et quæ describeretur tempore $M \times (1 + \frac{2Y^2}{V} + \frac{3Y^2}{V^2} + \frac{4Y^3}{V^3}, \&c.)$, sumendo negativè terminos in quibus quantitas Y est imparium dimensionum

Ut autem servetur hæc conditio quantitatem Y esse exiguam, fractiones $\frac{3Y^2}{V^2}$, &c. sunt delendæ in utroque casu ut infinitè parvæ.

Schol. In primo calculo, cùm supposuerimus orbitam Lunæ A D B C esse circularem, orbitas novas a d b c, $\alpha \delta \beta \alpha$ circulares etiam esse, supponere necesse erat per Theor. I. hujusce calculi.



THEOR. IV

Sit T Terra, P Luna, A D B C orbita quam

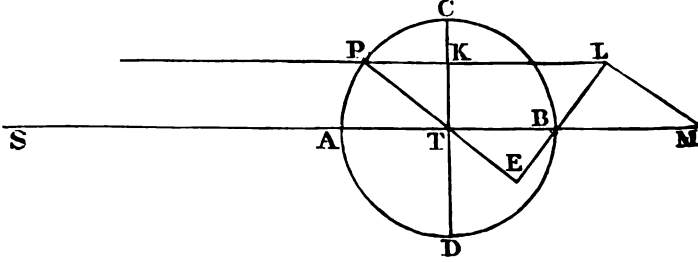
VOL. II. Pars II.

G g

Luna circa Terram describeret, sepositâ omni Solis actione, sit S T distantia mediocris Terræ a Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in

Terram ipsam in mediocri illâ distantia, distantia Lunæ a Terrâ P T dicatur r ; sit C P distantia Lunæ a quadraturâ proximâ quæ dicatur u , sit ejus sinus y , sit ejus cosinus z ; dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam secundum

directionem radii P T est ubique $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$. Hoc Theor. idem est cum Theor. IV. præcedentis calculi, cujus demonstratio adiri potest.



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundum directionem radii orbitæ lunaris exercitæ intelligi poterit, si concipiatur Lunam ex suâ orbitâ A D B C in aliam transferri cujus singulæ particulæ quamminimæ forent portiones earum orbitarum quas Luna reverâ describeret, si vis Terræ constanter imminuta aut aucta foret eâ quantitate, quæ, per actionem Solis in eam particulam exercitæ, ex vi Terræ detrahitur aut ei additur.

Etenim cùm ea vis Solis per gradus infinitè

que in singulis particulis arcus C P, censi potest Lunam delatam esse in orbitam vi Solis in eo puncto agenti congruam.

THEOR. VI.

Dicatur mediocris distantia Lunæ a Terrâ, r ; vis Terræ in eâ distantia sit V , vis Solis sive addititia sive subtractiva sit, quæ agit in Lunam secundum radii Telluris directionem, sit Y in eâ mediocri distantia a Terrâ, crescat verò ut distantia; dicatur x alia quævis distantia Lunæ a Terrâ in quâ vis Terræ erit $\frac{r r V}{x x}$, et vis Solis

erit $\frac{x Y}{r}$; dico quod vis corporis centralis quæ in distantia x foret $\frac{r r V}{x x} - \frac{x Y}{r}$, in mediocri distantia esse debuisset $V - \frac{x^3}{r^3} Y$.

Nam siquidem fingitur vim corporis ejus centralis fictitii sequi legem gravitatis et decrescere sicut quadrata distantiarum, fiat ut $\frac{1}{x x}$ ad $\frac{1}{r r}$

ita $\frac{r r V}{x x} - \frac{x Y}{r}$ quæ est vis in distantia x ad $V - \frac{x^3}{r^3} Y$ quæ erit vis in distantia r .

THEOR. VII.

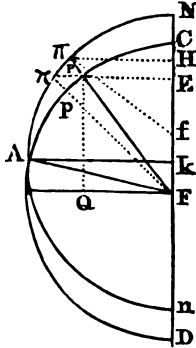
parvos crescat et decrescat, sitque nulla cum $\frac{3 y y}{r} = r$, paulo post minima sit, sicque gradatim crescat, si censeatur eam constantem manere per aliquod tempusculum, Luna brevissimè transibit in orbitam a d b c illi vi congruam per Theor. III. mox verò cùm vis Solis crescat quantitate quam minimâ, ea vis censeatur iterum constans per alterum tempusculum transibit Luna ex orbitâ primæ vi congruâ in alteram huic incremento consentaneam, sicque semper: ideò-

Sit x ut prius distantia Lunæ a Terrâ in propriâ orbitâ, dico quod per actionem Solis illa distantia fiet $\frac{r r V}{V r^3 - Y x^3}$, sive hoc valore in seriem redacto fiet $x + \frac{x^4 Y}{r^3 V} + \frac{x^7 Y^2}{r^6 V^2}$, &c. aut omissis terminis superfluis $x + \frac{x^4 Y}{r^3 V}$.

Nam nova orbita in quam Luna delata cecidit, est similis priori per Lem. I. et per Lem.

$$\frac{q^2}{r} \times (1 \pm \frac{FE \times f}{r} + \frac{FE^2 \times f^2}{r^4} \pm \frac{FE^3 \times f^3}{r^6}, \text{ \&c.})$$

Signa superiora adhibenda sunt cùm Luna distat ab apogeo minus quàm 90 gr. tam in



consequentia quàm in antecedentia, cùm Luna magis distat ab apogeo quàm 90 gr. signa inferiora sunt adhibenda.

LEMMA II.

Si lineæ apsidum non coincidat cum lineâ quadraturarum, dicatur verò m sinus anguli lineæ quadraturarum et lineæ apsidum, et n ejus anguli cosinus; sit y sinus distantie Lunæ a quadraturâ, z ejus cosinus, dico quòd distantia Lunæ a Terrâ, quæ dicitur x erit

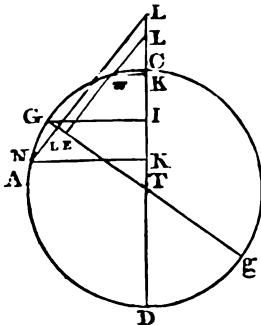
$$\frac{q^2 r^2}{r^3 \pm f \times n z + m y}$$

cùm Luna est in eâdem quadraturâ cum alterutra apsi, est verò

$$\frac{q^2 r^2}{r^3 \pm f \times n z - m y}$$

cùm Luna et alterutra apsis non sunt in eâdem quadraturâ.

Sit $C A D B$ circulus descriptus centro T ,



radio æquali medioctri distantie Lunæ a Terrâ quæ dicitur r . Sit $G T g$ lineæ apsidum, $C T D$ lineæ quadraturarum, $G I$ sinus anguli lineæ quadraturarum et lineæ apsidum qui dicitur m ,

$T I$ ejus cosinus qui dicitur n , w punctum circuli $C A D B$ quod respondet vero loco Lunæ in peripheria suæ orbitæ, quod sumitur vel ultra vel citra apsidem, $w K$ sinus distantie Lunæ a quadraturâ qui dicitur y , $T K$ ejus cosinus qui dicitur z , ducatur ex w in lineam apsidum perpendicularis $w E$, quæ producatur donec secet lineam quadraturarum in L , triangulum $T I G$ est simile triangulo $T E L$ (ob angulos rectos E et I et angulum communem T); triangulum $T E L$ est simile triangulo $w K L$ (ob angulos rectos E et K et angulum communem L); hinc est $T I (n) : I G (m) : w K (y) : K L = \frac{m y}{n}$; hinc in isto casu $T L = T K + K L =$

$$z + \frac{m y}{n}, \text{ sed ex similitudine triang. } T I G \text{ et}$$

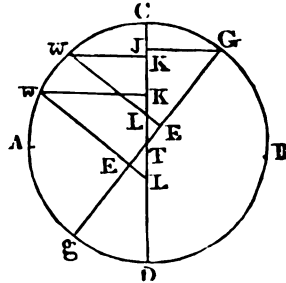
$$T E L \text{ est } T G (r) : T I (n) : T I, (z + \frac{m y}{n})$$

$$: T E = \frac{n z + m y}{r}, \text{ substituto ergo hoc valore}$$

$$\text{in valore } x \text{ Lemmate superiori reperto fit}$$

$$\frac{q^2 r^2}{r^3 \pm f \times (n z - m y)} \quad Q. e. d. 1^o.$$

Si w et apsis alterutra non sint in eâdem quadraturâ, et l. si tamen w non distet 90 gr. a



proxima apside, similia erunt ut prius triang.

$$T J G, T E L, w K L, \text{ unde erit } K L = \frac{m y}{n},$$

$$\text{sed erit } T L = T K - K L \text{ sive } z - \frac{m y}{y}, \text{ unde}$$

$$\text{fiet } T E = \frac{n z - m y}{r} \text{ ideòque erit } x =$$

$$\frac{q^2 r^2}{r^3 \pm f \times (n z + m y)}; \text{ sed si } w \text{ distet a lineâ apsidum plusquam 90 gradibus, erit } T L = K L$$

$$- T K \text{ sive } - T K + K L, \text{ ideòque } T E \text{ fiet}$$

$$- \frac{n z + m y}{r}, \text{ sed cùm in eo casu signum an-$$

ceps litteræ f mutari debeat, statuatur non mutari illud signum litteræ f dum Luna est in eâdem quadraturâ donec in aliam quadraturam transeat, quamvis magis quàm 90 gradibus ab apside discedat, mutari debeat ut fiat æquipol-

$$\text{lentia signum quantitatis } \frac{-n z + m y}{r}, \text{ quæ}$$

itaque evadet ut prius $\frac{n z - m y}{r}$ ideòque fiet

$x = \frac{q^2 r^2}{r^3 + f \times (n z - m y)}$ quotiescumque w et apsis alterutra non erunt in eadem quadraturâ, determinando signum anceps $\mp f$ ex apside cui vicinior fuit Luna cum eam quadraturam describere inceptit. Q. e. o. 2^o.

Cor. Hic valor x in seriem redactus evadit

$$\frac{q^2}{r} \times \left(1 \pm \frac{f \times n z \pm m y}{r^2} + \frac{f^2 \times n z \pm m y^2}{r^4} \pm \frac{f^3 \times n z \pm m y^3}{r^6}, \&c.\right) \text{ signa superiora litteræ } f$$

sunt adhibenda cum initium quadraturæ, quam describit Luna, minus distat ab apogæo quam 90 gr. tam in consequentia quam in antecedentia, si verò magis distet ab apogæo quam 90 gr. signa inferiora sunt adhibenda.

Signa superiora quantitatis $m y$ sunt adhibenda cum et Luna et apsis alterutra sunt in eadem quadraturâ, signa inferiora cum Luna et apsis sunt in diversis quadraturis.

PROBL. I.

Dato sinu et cosinu anguli quem faciunt linea apsidum et linea quadraturarum, invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundum directionem radii orbitæ lunaris exercitam, tempore quo Luna orbitam suam percurrit.

Supponitur lineam apsidum et Solem immotos manere durante illâ revolutione Lunæ; quo posito, cum retardationis Lunæ elementum inventum fuerit (Cor. 2. Theor. VIII.) $\frac{2 a^5 Y d u}{q r^4 V}$

— $\frac{2 x^5 y^2 Y d u}{109.73 q r^6 V}$, loco $\frac{2 r Y d u}{q V}$ ponatur ejus

valor $\frac{2 r F d u}{V a q} \times \frac{3 y^2}{r} - r$ et loco $\frac{x}{r}$ valor ejus

$\frac{q^2}{r^2} \times \left(1 \pm f \times \frac{n z \pm m y}{r^2}, \&c.\right)$ qui ad quintam dignitatem evehatur, dicatur A terminus $n z \pm m y$,

ea quinta dignitas erit $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times \left(1 \pm \frac{5 f A}{r^3} + \frac{15 f^2 A^2}{r^6} \pm \frac{35 f^3 A^3}{r^8}\right)$; verum observari potest,

quod siquidem totidem sunt quadrantes in quibus f positivum aut negativum sumi debet, si tota revolutio Lunæ spectetur, hi termini accipites omitti possunt, vel ab initio, hæc quinta dignitas sumi debet quasi foret $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times \left(1 + \frac{15 f^2 A^2}{r^2}\right)$

ducatur in $1 - \frac{y y}{109.73 r^2}$ fiet $\frac{q^{10}}{109.73 r^{12}} \times$

$(109.73 r^2 - y^2 + 15 \times 109.73 \frac{f^2 A^2}{r^4} - \frac{15 f^2 y^2 A^2}{r^6})$

denique ducatur in $\frac{2 F d u}{V a q} \times (3 y^2 - r^2)$ fit

$\frac{2 F q^9 d u}{109.73 V a r^{12}} \times (329.19 r^2 y^2 - 3 y^4 - 109.73 r^4$

$+ r^2 y^2 + \frac{45 \times 109.73 f^2 y^2 A^2}{r^4}) -$

$\frac{15 \times 109.73 f^2 r^2 A^2}{r^4} - \frac{45 f^2 y^4 A^2}{r^6} + \frac{15 f^2 y^2 A^2}{r^4}$

sive $\frac{2 F q^9 d u}{109.73 V a r^{12}} \times (330.19 r^2 y^2 - 3 y^4 - 109.73 r^4$

$+ \frac{330.19 \times 15 f^2 y^2 A^2}{r^4} - \frac{15 \times 109.73 f^2 r^2 A^2}{r^4} -$

$\frac{45 f^2 y^4 A^2}{r^6})$. Loco A^2 substituat $n^2 z^2 +$

$m^2 y^2$, omissio termino $\pm 2 m n z y$ quia quando tota revolutio Lunæ assumitur, duo sunt quadrantes in quibus Luna est cum apside, duo verò in quibus Luna cum neutrâ apside occurrit, fit tandem totum elementum

$\frac{2 F q^9 d u}{109.73 V a r^{12}} \times (330.19 r^2 y^2 - 3 y^4 -$

$109.73 r^4 + \frac{330.19 \times 15 f^2 n^2 z^2 y^2}{r^4} +$

$\frac{330.19 \times 15 f^2 m^2 y^4}{r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 r^2 n^2 z^4}{r^4} -$

$\frac{109.37 \times 15 f^2 r^2 m^2 y^2}{r^4} - \frac{45 f^2 n^2 z^2 y^4}{r^6} - \frac{45 f^2 m^2 y^6}{r^6}$;

cujus integralis secundum Lemma I. calculi præcedentis pro quadrante fit

$\frac{2 F q^9}{109.73 V a r^{12}} \times \frac{330.19 r^4 c}{8} - \frac{3 \times 5 r^4 c}{4 \times 8} - \frac{109.73 r^4 c}{4}$

$+ \frac{330.19 \times 15 f^2 n^2 r^4 c}{8 r^4} - \frac{330.19 \times 15 f^2 n^2 \times \frac{1}{4} r^4 c}{8 r^4}$

$+ \frac{330.19 \times 15 f^2 m^2 \times \frac{1}{4} r^4 c}{8 r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 n^2 r^4 c}{4 r^4}$

$+ \frac{109.73 \times 15 f^2 n^2 r^4 c}{8 r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 m^2 r^4 c}{8 r^4}$

$- \frac{45 f^2 n^2 \times \frac{1}{4} r^4 c}{8 r^4} + \frac{45 f^2 n^2 \times \frac{3 \times 5}{4 \times 6} r^4 c}{8 r^4}$

$- \frac{45 f^2 m^2 \times \frac{3 \times 5}{4 \times 6} r^4 c}{8 r^4}$; quod reductum ef-

ficit $\frac{2 F q^9 c}{109.73 V a r^{12}} \times \left(\frac{108.48}{8} + \frac{330.19 \times 15 f^2 \times \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{4} m^2}{8 r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 n^2 + m^2}{8 r^4} - \frac{45 f^2 \times \frac{1}{8} n^2 + \frac{5}{8} m^2}{8 r^4}\right)$

quod quadruplicatum efficit $\frac{F q^9 c}{109.73 V a r^{12}} \times (108.48 + 330.19 \times 15 f^2 \times \frac{\frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{4} m^2}{r^4} - 109.73 \times 15 f^2 \times \frac{n^2 + m^2}{r^4} - 45 f^2 \times \frac{\frac{1}{8} n^2 + \frac{5}{8} m^2}{r^4})$

sive tandem $\frac{F q^9 c}{109.73 V a r^{12}} \times (108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times \frac{15 f^2 n^2}{r^4})$.

Cor. Si Sol et apsis immoti non fingantur, sed supponatur eos pari passu moveri, res eodem redibit, si modo hæc revolutio, quâ durante nascitur hæc tardatio, censeatur æqualis mensi synodico; quamvis autem apsis reverâ non æquatur

motum Solis, sed longe lentius procedat, imo in isto calculo immota censeretur, non tamen inde oritur error ullius momenti tam propter eccentricitatem orbitæ lunaris quæ magna non est, quam propterea quod maxima pars hujus tardationis pendeat ex positione Lunæ respectu Solis, et minima sit ea pars hujus tardationis quæ per situm Lunæ respectu apsidum determinatur.

Cor. 2. Ex his terminis $\frac{F q^2 c}{109.73 V a r^3} \times$
 $(108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15$
 $\frac{f^2 n^2}{r^4})$ liquet quod si linea apsidum cum lineâ
 quadraturarum consentiat, quo casu sinus in anguli quem facit linea apsidum cum linea quadraturarum evanescit, et ejus cosinus n fit r, hæc
 tardatio fit omnium minima, nempe $\frac{F q^2 c}{109.73 V a r^3}$
 $\times (108.48 - 27.5575 \times 15 \frac{f^2}{r^2})$.

E contra, si linea apsidum sit in syzygiis ita ut m fiat r, et n evanescat, hæc expressio fit omnium maxima nempe $\frac{F q^2 c}{109.73 V a r^3} \times (108.48$
 $+ 136.0375 \times 15 \frac{f^2}{r^2})$; ideò mensis synodicus fit minimus cum apsidæ sunt in quadraturis, longissimus verò cum apsidæ sunt in syzygiis.

Cor. 3. Hinc oritur altera æquatio solaris Lunæ, quæ secunda dicitur, et pendet ex situ apsidum, sive apogæi, respectu Solis.

PROBL. II.

Posito Solem in mediocri suâ distantia versari et lineam apsidum omnes possibiles positiones cum lineâ syzygiarum successive obtinere, invenire tardationem mediocrem Lunæ in singulâ ejus revolutione synodica.

Sit linea apsidum, in ipsâ directione syzygiarum A et B, et dum Sol ab apogæo Lunæ in consequentia movetur, et apogæum revera est immotum, fingatur Solem iminotum stare et ipsum apogæum a Sole in antecedentia regredi; moveatur apogæum ex G in γ per arcum quamminimū G γ qui dicatur d u tardatio Lunæ quæ fiet dum describitur G γ erit ad totam tardationem quæ fieret si apsis foret immota in G et quæ per Probl. præcedens inveniretur, ut tempus quo apsis describit arcum G γ ad totum mensem synodicum: dicatur ergo A tempus quo apsidum revolutio Solis respectu absolveretur, quod in hac hypothesis est ipse annus sidereus, erit ut tota circumferentia c ad d u, ita A ad tempus quo apsis arcum d u describet, quod erit $\frac{A d u}{c}$. Præterea ut mensis synodicus S ad hoc

tempus $\frac{A d u}{c}$, ita tardatio mense synodico facta, quæ est $\frac{F q^2 c}{109.73 V a r^3} \times (108.48 + 136.0375$

$\times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2 n^2}{r^4})$ ad tarda-

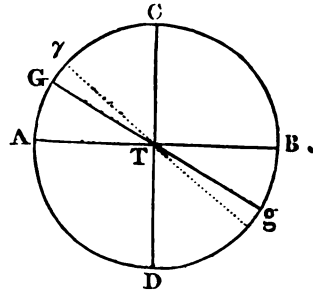
tionem quæ fiet tempore $\frac{A d u}{c}$ quæ erit itaque

$\frac{A F q^2 d u}{S \times 109.73 V a r^3} \times (108.48 + 136.0375 \times 15$
 $\times \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2 n^2}{r^4})$ (in quâ expres-

sione m respondet quantitati y quæ in Lemmate I. præcedentis calculi adhibetur, et n respondet quantitati z) et integretur pro quadrante juxta

Cor. 4. ejus Lem. habebitur $\frac{A F q^2}{S \times 109.73 V a r^3}$

$\times \frac{108.48 c}{4} +$
 $\frac{136.0375 \times 15 f^2 r^2 c}{4 r^4} - \frac{163.595 \times 15 f^2 r^2 c}{8 r^4}$;
 quadruplicetur verò pro toto circulo sit
 $\frac{A F q^2 c}{S \times 109.73 V a r^3} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$;
 denique ut totum tempus A ad tempus synodicum



S ita hæc tardatio ad tardationem mense synodico factam, quæ erit ergo $\frac{F q^2 c}{109.73 V a r^3} \times$
 $(108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$.

PROBL. III.

Positâ excentricitate orbitæ Telluris circa Solem, et orbitæ Lunæ circa Terram invenire tardationem Lunæ, 1. dum Terra describit arcum quamminimū datum, 2. dum describit annum suam orbitam, 3. durante mense synodico, 4. dum Terra ab aphelio suo ad mediocrem suam a Sole distantiam pervenit.

Sit a mediocri distantia Telluris a Sole, 1 alia quævis distantia, si F sit vis Solis in distantia a, erit $\frac{a a F}{x x}$ ejus vis in distantia x; ergo in calculo Probl. mox præcedentis quo tardationem mense synodico factam invenimus, x loco a ponatur et $\frac{a a F}{x x}$ loco F, evadet tardatio $\frac{a^2 F q^2 c}{109.73 V x^3 r^3} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$, et si

A sit annus sidereus, M mensis periodicus Lunæ citra omnem Solis actionem, est $\frac{F}{V} = \frac{M^2 a}{A^2 r}$ (per Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) hinc ista tardatio evadit $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{109.73 A^2 x^3 r^9} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$.

Sit b semi-axis minor ellipsoos quam Terra describit circa Solem, e excentricitas, k peripheria radio a descripta, ideóque sit $\frac{1}{2} b k$ area tota ellipsoos quam Terra describit circa Solem, sit d u motus angularis Terræ circa Solem quam minime tempore, area illi angulari motui respondens erit $\frac{x x d u}{2 a}$, (ut constat ex calculo præcedente) ideóque ut ellipsis tota $\frac{1}{2} b k$ ad hanc aream $\frac{x x d u}{2 a}$, ita annus A, ad tempus quo arcus d u describitur, qui erit ergo $\frac{A x x d u}{a b k}$, et

ut mensis synodicus S ad id tempus, ita tota tardatio ad tardationem hoc tempore factam quæ erit $\frac{A M^2 a^3 x^2 q^9 c d u}{109.73. S. A^2 x^3 a b k r^9} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$

sive $\frac{M^2 a^2 q^9 c d u}{109.73. S. A x. b k r^9} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$ sed $\frac{a}{x}$ est $\frac{a^2 + e z}{b^2}$ per Lem. II. calculi præcedentis, hinc istud elementum evadit

$M^2 a q^9 c \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$
 $\frac{109.73. S. A. b^3 k r^9}{\times (a^2 d u + e z d u) cu-}$

jus integralis est $\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})}{109.73. S. A. b^3 k r^9}$
 $\times (a^2 u + e z)$, quæ semi-circulo absoluto fit $M^2 a^3 q^9 c \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$

$\frac{109.73. S. A. b^3 k r^9}{\times \frac{1}{2} k}$; cujus duplum est retardatio anno durante facta, $M^2 a^3 q^9 c \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$

estque $\frac{109.73. S. A. b^3 r^9}{\times \frac{1}{2} k}$ hinc ut A ad S ita hæc tardatio ad tardationem mense synodico factam, quæ erit ergo $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{A^3 b^3 r^9}$

$\frac{108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}}{109.73.}$

Denique, retardatio quæ convenit mediocri distantia a Sole, in qua u est $\frac{1}{2} k - e$, et est

$\frac{M^2 a^3 q^9 c \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})}{109.73. S. A. b^3 r^9}$
 $y = b$, est

$\times (\frac{1}{2} a^2 - \frac{a^2 e}{k} - \frac{a b e}{k}).$

PROBL. IV.

Dato tempore synodico apparenti Lunæ invenire tempus periodicum M quod observaretur si omnino abesset vis Solis.

Siquidem tempore M describeretur arcus c, tempore S describeretur $\frac{S c}{M}$, tempus autem periodicum quod tempori synodico S respondet est $\frac{A S}{A + S}$, ideóque cum illo tempore revera describatur arcus c, tempore synodico S describeretur $\frac{A + S}{A} c$, hinc retardatio quæ fit mense synodico est $\frac{S c}{M} - \frac{A c + S c}{A}$ sive $\frac{A S c - A M c - M S c}{A M}$;

quæ inventa fuit $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{A^2 b^2 r^9} \times \frac{108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}}{109.73}$

unde fit æquatio ex qua valor quantitatis M obtinebitur, fiat ut in præcedenti calculo $S = E + e M = X A$, æquatio evadit $E = X + E X +$

$X^3 \times \frac{a^3 q^9}{b^3 r^9} \times \frac{108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}}{109.73}$

Sumatur excentricitas mediocris orbitæ lunaris quam .05505 r facit Newtonus in hoc scholio,

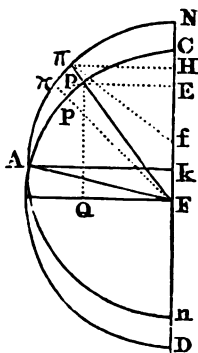
$\frac{108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}}{109.73}$ unde is terminus evadit

1.0110782 est $\frac{q^9}{r^9} = 9864$, est $\frac{a^3}{b^3} = 1$. proximè,

itaque æquatio est $E = X \times 1 + E + 9972 X^3$, loco E substituat .0804896, loco X substituat .0744 + R et æquatio evadit .08084896 = .08082583 + 1.09740854 R unde habetur .00002313 = 1.09740854 R unde obtinetur R = .0000210, et M = .0744210 A; fere ut in præcedenti calculo.

PROBL. V.

Invenire æquationem motus medi lunaris quæ pendet ex Solis actione et quæ adhibenda est cum Terra est in mediocri suâ distantia a Sole.



Hoc Problema solvitur ut in præcedenti calculo, itaque ut tota ellipsis cujus area est $\frac{1}{2} b k$ ad aream FNA (sive $\frac{b k}{8} + \frac{b e}{2}$) ita tardatio

annua quæ inventa est

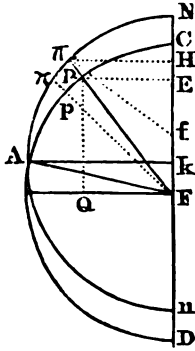
$$\frac{M^2 a^3 q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{S. A. b^3 r^9 \times 109.73}, \text{ ad tarda-}$$

tionem quæ in motu medio continetur, et quæ

$$\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{S. A b^3 r^9 \times 109.73}$$

est ideò $\times (\frac{1}{2} a^2 + \frac{a^2 e}{k})$, cujus excessus supra retarda-

$$\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{S. A b^3 r^9 \times 109.73} \times \frac{2 a^2 e + a b e}{k}$$



sive sumendo a b pro a² fit $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{S. A. b^3 r^9} \times$

$$\frac{108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73} \times \frac{3e}{k} = .9972 M^2 \times \frac{3ec}{S. A. \times \frac{1}{k}}$$

(per Prob. IV.) est $\frac{3ec}{k} = 2 \text{ gr. } 9005$, est $\frac{M^2}{S. A.}$

= .0685042 quod ductum in .9972 efficit .068312388, quod ductum in 2 gr. 9005, efficit 0°. 1982 quod ductum per 60'. bis efficit 11". 52". &c. sed in priori calculo erat 11". 47", itaque medium inter hos duos valores est 11". 49", ut invenit Newtonus; cum enim orbitæ lunaris figura sit admodum variabilis, et incerta sit excentricitas quæ ipsi citra actionem Solis conveniret, non immerito sumitur medium inter id quod prodit ex hypothesi orbem Lunæ esse circulare, et in hypothesi orbem Lunæ esse ellipticum, cujus excentricitas est ea excentricitas mediocris quæ observatur.

PROBL. VI.

Positâ excentricitate orbitæ lunaris, posito verò Solem in mediocris suâ distantia a Terrâ semper stare, invenire æquationem motûs medii Lunæ pendentem ex vario situ apogæi Lunæ, respectu Solis.

Inventum erat in Problemate I. quod tota

tardatio Lunæ, durante mense periodico, in mediocris distantia Terræ a Sole et in data apsidis

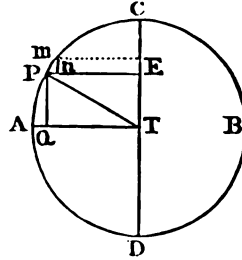
$$\text{ad quadraturam positione erat } \frac{109.73 V a r^2}{F q^9 c} \times (108.48 + \frac{136.0375 \times 15 f^2 m^2}{r^4} - \frac{27.5575 \times 15 f^2 n^2}{r^4})$$

posito sinum anguli lineæ apsidum cum lineâ quadraturarum esse m, cosinum verò anguli esse n, sive, quod eodem redit, sinum distantie apsidis a syzygiâ esse n, ejus cosinum esse m; præterea inventum erat quod si lineæ apsidum omnes possibiles positiones cum lineâ syzygiarum assumat, tota tardatio quæ eo tempore fit est

$$\frac{A F q^9 c}{S \times 109.73 \times V a r^2} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}); \text{ hinc si lineæ apsidum discedat a syzygiâ arcu u, et fingatur retardationem esse proportionaliter tempori distributam, fiet ut tota peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio facta dum peripheria describitur, quæ est } \frac{A F q^9 c}{S \times 109.73 \times V a r^2} \times$$

$$(108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}), \text{ ad tardationem mediam huius temporis proportionalem quæ erit}$$

$$\frac{A F q^9 u}{S \times 109.73 \times V a r^2} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}).$$



sed cum elementum tardationis (eodem Prob. II.)

$$\text{reperit sit } \frac{A F q^9 d u}{S. 109.73 \times V a r^2} \times (108.48 + \frac{136.0375 \times 15 f^2 m^2}{r^4} - \frac{27.5575 \times 15 f^2 n^2}{r^4})$$

Integralis ejus sumatur per Lemma I. calculi præcedentis, loco m ponendo z et loco n ponendo

$$y, \text{ et integraliserit } \frac{A F q^9}{S \times 109.73 \times V a r^2} \times (108.48 u + \frac{136.0375 \times 15 f^2 \times A P E T - 27.5575 \times 15 f^2 A P Q}{r^3})$$

quæ quantitas si subtrahatur ex præcedenti, æquatio in datâ distantia u apogæi a Sole in antecedentia, vel Solis ab apogæo in consequentia erit

$$\frac{A F q^9 f^2}{S \times 109.73 \times V a r^2} \times 813.6 r u - 136.0375 \times 15 A P E T + 27.5575 \times 15 A P Q \text{ est autem } A P E T = A P Q + 2 P Q T, \text{ et } r u = 2 A P T = 2 A P Q + 2 P Q T, \text{ quibus valoribus substitutis, divisioque primo termino } 813.6$$

$$\text{per } 15, \text{ æquatio evadit } \frac{15 A F q^9 f^2}{109.73 \times S. V. a r^2} \times$$

(108.48 A P Q + 108.48 P Q T — 136.0375
 \times A P Q — 272.075 P Q T + 27.5575 A P Q,
 et reductione factâ fit $\frac{15 \times F q^2 f^2}{109.73 \times S. V. a r^3} \times$
 (— 163.595 P Q T.)

Hæc æquatio negativa est cùm apogæum Lunæ ex A in C a syzygiâ ad quadraturam procedit, in quadraturâ evanescit, nam P Q T in quadraturâ fit zero: si apsis ex C in syzygiam B pergat, fit A P E T = A P Q — 2 P Q T, est r u = 2 A P T = 2 A Q P — 2 P Q T, quibus valoribus in æquatione substitutis quantitas — 163.595 P Q T ex negativâ positiva fit, rursus fit negativa cùm ex syzygiâ B ad quadraturam D apogæum pergit, positiva iterum ex D in A; evanescit verò in omnibus punctis syzygiarum et quadraturarum.

Cor. 1. Ex trigonometriâ notum est, quod sinus arcûs dupli alterius arcûs est duplum facti sinus arcûs simpli per ejus cosinum divisum per radium; ideòque constat quod sinus arcûs dupli alterius arcûs est semper ut factum arcûs simpli per ipsius cosinum; sed areæ Q P T duplum, nempe area T Q P E, et ipsum factum sinus Q P arcus A P per ejus cosinum T Q, ergo area Q P T est ut sinus arcûs dupli arcus A P, æquatio autem inventa est ubique ut area illa P Q T siquidem constat ex facto illius areæ per constantes ductæ; ergo æquatio proposita est ubique ut sinus arcus dupli distantie apogei Lunæ a syzygiâ.

Cor. 2. Hinc etiam sequitur illam æquationem evanescere in syzygiis et quadraturis, iis enim in punctis Luna distat a syzygiâ vel 90 gr. vel 180 gr. vel 270 vel 360, quorum arcuum duplum est 180, 360, 540, 720, quorum arcuum sinus sunt zero.

Cor. 3. Hinc etiam sequitur hanc æquationem esse maximam in octantibus; tunc enim cùm apogæum distet a syzygiâ vel 45 gr. vel 135 vel 225 vel 315 quorum dupli sunt, 90 gr. 270, 450, 630, &c. et horum arcuum sinus sit radius qui omnium sinuum maximus est, sequitur æquationem istis sinibus proportionatam hic loci esse maximam.

Cor. 4. In octantibus hæc area P Q T est $\frac{1}{4} r^2$, ut notum est, hinc ista æquatio evadit $\frac{40.89875 \times 15 A F r^2 f^2}{109.73 S. V \times a r^3}$, loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2 a}{A^2 r}$ est $f^2 = 0.030305 r^2$; est $\frac{q^2}{r^2} = .9864$ tota quantitas fit $\frac{40.89875 \times 15 \times .00298928 r \times A M^2}{109.73. S. A^2}$ sed inventum est quod est $\frac{M^2}{S A}$ = .0685042, et est $\frac{40.89875 \times 15}{109.73}$ = 5.59082 hinc tota æquatio est .001148782 r, sed r est æqualis arcui 57 gr. 29', &c. hinc æquatio est graduum .065590872, &c. quod ductum per 60 efficit 3'.9354, et .9354 ductum per 60, efficit 56". Ita ut tota æquatio sit 3'. 56", &c.

Cor. 5. Newtonus non tradit quantitatem hujus æquationis qualem illam ex calculis invenit, sed ait ille, Hæc æquatio quam semestrem vocabo in octantibus apogari quando maxima est ascendit ad 3'. 45". circiter quantum ex phenomenon colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantia a Terrâ. Scilicet in hypothesibus nostris apsidem et Terram immotam assumpsimus, cùm id revera non sit; ideòque, si concedatur nos attingisse verum Newtoni calculum, æquatio per calculum inventa non plane eadem erit cum verâ, parum tamen admodum ab illâ differet; cæterum omnes æquationis veræ leges ex iis quæ per istum calculum obtinentur merito deducuntur, et eæ ipsæ sunt quæ in præcedentibus Coroll. sunt constitutæ, sed absoluta æquationis quantitas ex observatione, non ex calculo, est petenda, differunt autem calculus et rei veritas 3". duntaxat quod theoriæ præstantiam sufficienter probat.

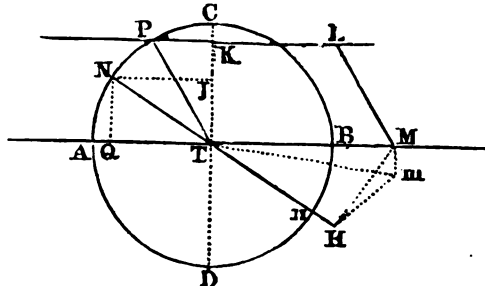
De æquatione motûs lunaris semestri secunda quæ pendet ex positione lineæ nodorum, respectu lineæ syzygiarum.

Ex inclinatione orbitæ lunaris ad planum eclipticæ fit ut pars actionis Solis consumatur in ipso plano orbitæ lunaris ad planum eclipticæ admovendo, sicut tota non occupetur, ut hætenus suppositum fuerat in distrahendo Lunam a Terræ centro aut illam ad id attrahendo, aut alio modo Lunam in proprio ejus plano accelerando aut retardando. Hinc æquationes prius inventæ novâ correctione indigent.

PROBL. I.

Invenire partem actionis Solis quæ Lunam secundum radium ejus orbitæ trahit, sublata eâ parte actionis Solis quæ consumitur in ipso plano orbitæ lunaris dimovendo.

Sit A T B linea syzygiarum in eclipticæ plano; N T n linea nodorum; P locus Lunæ in propria orbita; P L, L M directiones virium



in quas resolvitur vis Solis, quarum P L est parallela T M et L M parallela radio T P.

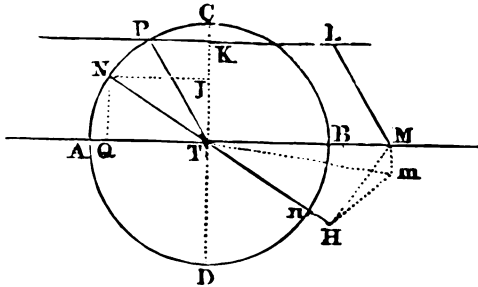
Ducatur ex M in planum orbitæ lunaris productum perpendicularis M m, ducatur in plano

orbitæ lunaris linea T m, et ex M et m ducantur perpendiculares M H, m H in lineam nodorum N n productam.

Radius T P dicatur r ut prius, distantia Lunæ a quadraturâ sinus P K dicatur y, cosinus T K dicatur z; distantia nodorum a syzygia sinus N Q sit n, cosinus T Q sit m; denique sinus inclinationis orbitæ lunaris ad eclipticam dicatur l, existente r radio, et ea inclinatio constans supponatur, quæ secundum Keplerum, De la Hirium, &c. est ubi maxima, graduum 5. 19'. 30".

Ex demonstratis est T M = 3 y; et propter similitudinem triangulorum N T Q, M T H, est N T (r) : M T (3 y) :: N Q (n) : M H ($\frac{3 y n}{r}$), et quia angulus M H m est angulus inclinationis orbitæ lunaris ad eclipticam, ut r : 1 :: M H ($\frac{3 y n}{r}$) : M m = $\frac{3 y n l}{r^2}$; denique, ut est T M (3 y) ad M m ($\frac{3 y n l}{r^2}$) sic est r ad sinum anguli M T m qui erit ergo $\frac{n l}{r}$, cujusque cosinus erit $\sqrt{r^2 - \frac{n^2 l^2}{r^2}}$ sive $r - \frac{n^2 l^2}{2 r^3}$.

Jam autem tota vis T M est ad eam ejus partem quæ agit secundum planum orbitæ lunaris



ut radius ad cosinum anguli M T m sive ut r ad $r - \frac{n^2 l^2}{2 r^3}$ et in eadem proportionem minuuntur partes in quas resolvitur ea vis, ergo cum portio totius vis T M secundum directionem radii exercita (si planum orbitæ lunaris et eclipticæ idem fuissent) sit $\frac{F}{a} \times \frac{3 y y}{r}$ ex superius demonstratis; pars residua propter inclinationem plani erit $\frac{F}{a} \times \frac{3 y y}{r} - \frac{3 y^2 n^2 l^2}{2 r^5}$; vis autem L M quæ est $\frac{F}{a} r$ et negative sumitur, nullam diminutionem patitur ex hac inclinatione, quippe P T est in ipsâ orbitâ lunari, ideoque ejus planum quomodocumque situm non diminuet; hinc ergo pars actionis Solis quæ Lunam

secundum radium ejus orbitæ trahit, subleat eâ parte quæ consumitur in plano orbitæ dimovendo

$$\text{est } \frac{F}{a} \times \left(\frac{3 y y}{r} - r - \frac{3 y^2 n^2 l^2}{2 r^5} \right).$$

PROBL. II.

Dato sinu anguli quem faciunt lineæ nodorum et syzygiarum, invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundum directionem radii orbitæ lunaris exercitam, semotâ eâ ejus actionis parte quæ in dimovendo plano orbitæ lunaris exercetur.

Elementum retardationis Lunæ (Probl. I. calculi prioris) inventum erat $\frac{2 Y d u}{V}$, loco Y ponatur ejus valor Probl. præcedente inventus $\frac{F}{a} \times \left(\frac{3 y y}{r} - r - \frac{3 y^2 n^2 l^2}{2 r^5} \right)$; si, quia jam actum est de retardatione per vim $\frac{F}{a} \times \left(\frac{3 y y}{r} - r \right)$ productâ, adhibeatur solummodo quantitas $\frac{F}{a} \times - \frac{3 y^2 n^2 l^2}{2 r^5}$ (quæ cum negativa sit ex retardatione fit acceleratio) hinc, accelerationis ex hac causâ pendens elementum est $\frac{2 F d u}{V a} \times \frac{3 y^2 n^2 l^2}{2 r^5}$, cujus integralis pro quadrante

est $\frac{F n^2 l^2}{V a r^5} \times \frac{3 r^2 c}{8}$ et quadruplicatum pro revolutione integrâ fit $\frac{3 F n^2 l^2 c}{2 V a r^3}$. Unde liquet quod cum linea nodorum est in ipsâ lineâ syzygiarum, quo casu n evanescit, tunc motus Lunæ est ipse ille qui præcedentibus theoriis fuit inventus, quando verò linea nodorum est in lineâ syzygiarum, tunc est n = r, et est acceleratio $\frac{2 F l^2 c}{2 V a r}$ quæ tum maxima est.

PROBL. III.

Posito Solem in mediocri suâ distantia versari, et lineam nodorum omnes possibles positiones cum lineâ syzygiarum successivè obtinere, invenire æquationem motûs mediî Lunæ pendentem ex vario situ nodorum Lunæ.

Primò, ut inveniat acceleratio mediocri quæ ex inclinatione plani lunaris oritur, fingatur Solem immotum stare, et lineam nodorum ab eo recedere in antecedentia (nodorum autem motum proprium hic omittere licet, cum in Problemate præcedente omissus sit, sic enim utraque omisso sese compensant.)

Moveatur nodus ex N per arcum d u, acceleratio Lunæ quæ fiet dum describitur d u erit ad accelerationem toto mense factam, ut tempus quo nodus describit arcum d u ad totum mensem,

sed tempus quo nodus describit arcum $d u$ est $\frac{A d u}{c}$, nam ut tota peripheria c ad arcum $d u$, ita annus sidereus A ad tempus quo arcus $d u$ describitur, quod erit ergo $\frac{A d u}{c}$, ergo ut men-

sis synodicus S , ad hoc tempus $\frac{A d u}{c}$, ita acceleratio uno mense facta quæ inventa est $\frac{3 F l^2 n^2 c}{2 V a r^3}$ ad $\frac{3 A F l^2 n^2 d u}{2 S. V. a r^3}$. Integretur pro quadrante et erit $\frac{3 A F l^2 r^2 c}{2 \times 8 S. V a r^3}$ quadruplicetur pro totâ revolutione fiet $\frac{3 A F l^2 c}{4 S V a r}$, et hæc erit acceleratio motûs mediî Lunæ propter orbitæ inclinationem.

Hinc si linea nodorum discedat a lineâ syzygiarum arcu u , et fingatur totam accelerationem proportionaliter tempori distribui, fiat ut tota peripheria c ad eum arcum u , ita tota tardatio $\frac{3 A F l^2 c}{4 S. V a r}$, ad accelerationem huic tempori

proportionalem quæ erit $\frac{3 A F l^2 u}{4 S. V. a r}$ sive $\frac{3 A F l^2}{2 S. V a r^2} \times \frac{r u}{2}$. Sed integralis elementi $\frac{3 A F l^2 n^2 d u}{2 S V a r^2}$

quando arcus $A N$ est u , est $\frac{3 A F l^2 \times A N Q}{2 S. V. a r^2}$

(ex Lem. I. calc. 1.) hæc ergo quantitas ex præcedenti subtracta dat æquationem sive differentiam accelerationis mediæ et accelerationis veræ, quæ æquatio erit ergo $\frac{3 A F l^2}{2 S V a r^2} \times (\frac{r u}{2}$

— $A N Q$), sed $\frac{r u}{2}$ — $A N Q$ est triangulum

$N Q T$, et est $N Q T = \frac{n m}{2} = \frac{2 n m}{4}$, hinc æquatio proposita sive excessus accelerationis mediæ super veram est $\frac{3 A F l^2}{8 S. V a r} \times \frac{2 n m}{r}$, quæ est quantitas quâ minuendus est motus medius Lunæ ut ejus locus verior habeatur.

Cor. Hinc cum quantitates $\frac{3 A F l^2}{8 S. V a r}$ sint constantes et $\frac{2 n m}{r}$ sit sinus arcûs dupli distan-

tiæ nodi a syzygiâ, æquatio est ubique ut sinus arcûs dupli distantie nodi a syzygiâ, ergo evanescit in syzygiis et quadraturis; maxima est in octantibus, cumque sit illic $m = n = r \sqrt{\frac{1}{2}}$, est $\frac{2 n m}{r} = r$: loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2 a}{A^2 r}$, æquatio in

octantibus fit $\frac{3 M^2 l^2}{8 S. A. r}$, sed cum inclinatio sit $5 \text{ gr. } 19 \frac{1}{2}'$. cujus sinus 1 est .9281 r , ideoque $\frac{l^2}{r}$ est .00363 r , et $\frac{3 l^2}{8 r} = .00325$, cum verò $\frac{M^2}{S. A}$ (per Probl. V. calc. præc.) sit .0685, hinc æquatio evadit in octantibus .000221 r ; denique

est $r = 57^{\text{st.}} 29'$, quod ad secundas reductum efficit 206264", et ductum per .000223 efficit 45".6, quam Newtonus 47" per theoriam gravitatis se invenisse proficitur.

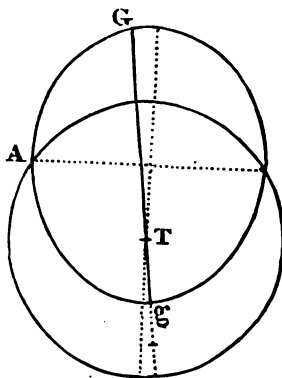
DE MOTU APSIDUM.

Newtonus Sectione XI. Lib. I. Princip. ingeniosissimam excogitavit rationem motum apsidum ad calculum revocandi, fingendo nempe vim externam Solis posse conferri cum vi quæ ex revolutione plani ipsius orbitæ lunaris oriretur, sicque inveniri curvam per motum corporis in ellipsi mobili genitam quæ eadem foret cum eâ quæ per vis extraneæ adjunctionem nasceretur; eidem methodo mox insistemus et ex eâ leges motûs apsidum derivantur accuratissimè quales illas Newtonus statuit; sed fatendum ipsam absolutam ejus motûs quantitatem dimidio circiter minorem inveniri illâ quæ per observationes innotescit; itaque aliam indicare methodum rem eandem æstimandi, priori illâ non omissâ, inopportunum visum non est.

PROBL. I.

Sol supponatur immotus; linea apsidum qualemcumque angulum cum lineâ quadraturarum efficiat, ejusque anguli sinus sit y ; invenire motum apogei dum Luna ab apogæo ad apogæum redit.

Sit $G A g$ ellipsis quam Luna circa Terram T describit; sit G apogæum, g perigæum; di-

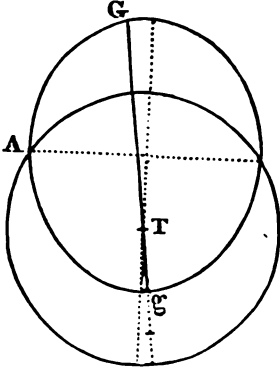


catur r semi-axis major; T distantia apogæa $T - 2 f$ distantia perigæa. Centro T describatur circulus radio r , eum circumulum Luna describeret eodem tempore quo ellipsim suam describit, et vis centralis Terræ in Lunam in eodem circulo revolvantem foret $\frac{d u^2}{2 r}$ ex notâ circuli proprietate.

Portiones $d u$ ejus circuli ubique æquales in-

telligantur, et sumantur in ellipsi arcus terminati per lineas e centro T per utrumque extremum arcus illius d u ductas; liquet, quod dum arcus illi elliptici describuntur, lineolæ per quas Luna ex tangente ad ellipsin reducetur, erunt effectus vis centralis Terræ et vis Solis secundum directionem radii orbitæ lunaris, conjunctis vel oppositis actionibus Lunam trahentium.

Lineolæ autem propter vim centram Terræ descriptæ erunt ubique, primò in ratione ipsius vis centralis, sive inversè ut quadrata distantiarum a centro, ideòque in distantia X erunt $\frac{r^2 d u^2}{2 r X^2}$; et secundò ut quadrata temporum sive ut quadrata arearum ellipseos quæ respondent arcibus aequalibus d u; illæ verò areæ cum sint inter se similes (ob aequales angulos in T arcibus aequalibus d u mensuratos) erunt ut X^2 , ideòque tempora erunt ut X^2 eorumque quadrata ut X^4 ; ideòque vis centralis Terræ



effectus, dum describitur area quæ respondet arcui d u, erit ubique $\frac{r^2 d u^2}{2 r X^2} \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^2 d u^2}{2 r^3}$. In apogæo erit $\frac{T^2 d u^2}{2 r^3}$ in perigæo $\frac{T^2 d u^2}{2 r^3} - \frac{4 T f d u^2}{2 r^3}$, &c.

Vis Solis in Lunam agens secundum directionem radii orbitæ lunaris dicatur Y in mediocri distantia, et quia crescit ut distantia, in distantia X fit $\frac{X}{r}$ Y, ejus verò effectus crescit ut quadrata temporum, ideòque per ea quæ dicta sunt, effectus ejus vis dum describitur area quæ respondet arcui d u est $\frac{X}{r} \times Y \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^5}{r^5}$ Y, in apogæo erit $\frac{T^5}{r^5}$ Y, in perigæo $\frac{T^5}{r^5} Y - \frac{10 T^4 f}{r^5} Y$, &c.

Sit, ut prius, F vis Solis in Terram in ejus mediocri distantia à Terrâ a, inventum est vim

Y esse $\frac{F}{a} \times (\frac{3 y y}{r} - r)$, et vim Lunæ in mediocri distantia esse ad vim Solis F ut $A^2 r$ ad $M^2 a$ (A ut prius est annus sidereus, M mensis periodicus, sed sepositâ Solis actione) cum ergo effectus vis Terræ in Lunam in mediocri distantia dum describitur area $\frac{r d u}{2}$ sit $\frac{d u^2}{2 r}$, si fiat

ut $A^2 r$ ad $M^2 a$ ita $\frac{d u^2}{2 r}$ ad quantum qui erit $\frac{M^2 a}{A^2 r} \times \frac{d u^2}{2 r}$, is terminus erit effectus vis Solis quæ per F exprimitur, sicque effectus vis Y in mediocri distantia dum describitur area $\frac{r d u}{2}$ erit $\frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{d u^2}{2 r} \times (\frac{3 y y}{r} - r)$, et in quaicumque distantia X erit $\frac{X^5}{r^5} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{d u^2}{2 r} \times (\frac{3 y y}{r} - r)$.

Hinc fluxio secunda orbitæ lunaris; hoc est, lineola ad Terram directa, intercepta inter tangentem et curvam lunarem quæ est differentia (vel summa) effectuum vis centralis Terræ et vis Solis in Lunam dum arcus respondens arcui d u percurritur, erit ubique $\frac{d u^2}{2 r} \times (\frac{X^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r})$

$\times \frac{X^5}{r^5} \times \frac{3 y y}{r} - r$.

Hæc fluxio in apogæo erit $\frac{d u^2}{2 r} \times (\frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \frac{3 y y}{r} - r)$; in perigæo verò erit $\frac{d u^2}{2 r} \times (\frac{T^2}{r^2} - \frac{4 T f}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \frac{10 T^4 f}{r^5} \times \frac{3 y y}{r} - r)$; ubi notandum quod si Sol immotus fingatur, (ut in hyp. Problem. assumitur,) et si perigæum esset e diametro oppositum apogæo, tunc quantitas $\frac{3 y y}{r} - r$ eadem absolutè foret tam in apogæo quàm in perigæo.

Si conciperetur quod effectus virium existente in apogæo $\frac{d u^2}{2 r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \frac{3 y y}{r} - r$ vera ellipsis describeretur, hic effectus virium in apogæo deberet esse ad earum effectum in perigæo, primò inversè ut quadrata distantiarum, secundo directè ut quadrata temporum sive ut quartæ dignitates distantiarum, unde illi effectus erunt ut quadrata distantiarum directè, hoc est ut T^2 ad $T^2 - 4 T f$, dividatur ergo effectus virium in apogæo per T^2 et ducatur in $T^2 - 4 T f$ effectus virium in perigæo esse debent $\frac{d u^2}{2 r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{4 T f}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times (\frac{T^5}{r^5} - \frac{4 T^4 f}{r^5}) \times (\frac{3 y y}{r} - r)$; sed in perigæo ut et in apogæo ex naturâ apsidum evanescit fluxio distantia X ut pote maximæ vel minimæ, ejus autem fluxionis fluxio est is ipse effectus virium Terræ et Solis, ideò

fluens hujus effectus virium reverà evanesceret, itaque ex ipsis hypothesibus oportebit ut

$$\int \frac{du^2}{2r} \times \frac{T^2 - 4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{4T^2f}{r^2} \times \frac{3yy}{r} - r = 0;$$

sed in perigæo, spectatâ actione Terræ et Solis, fluxio secunda reperta erat $\frac{du^2}{2r} \times$

$$\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r} - \frac{M^2}{A^2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{10T^2f}{r^2} \times \frac{3yy}{r} - r.$$

Itaque excedit eam quantitatem cujus fluens evadit zero quantitate $\frac{du^2}{2r} \times \frac{M^2}{A^2r} \times \frac{6T^2f}{r^2} \times \frac{3yy}{r} - r.$

Punctum itaque perigæi non erit in puncto e diametro opposito apogæo, sed arcu quodam differet, quem obtinemus quærendo quoniam in loco orbitæ lunaris fluens fluxionis secundæ ejus curvæ evanescat. Observandum autem, quod distantia Lunæ a Terrâ, circa puncta apogæi vel perigæi non multum mutantur, ideoque si perigæum arcu p transferatur, non magna mutatio erinde oriatur in effectu vis centralis Terræ, sed sinus y qui occurrit in valore vis Solis evadet,

$$y + \frac{zp}{r} \text{ (sumpto } z \text{ pro cosinu arcus cujus sinus}$$

$$\text{est } y, \text{ est enim } d y = \frac{z du}{r} \text{ per naturam circuli,}$$

cùm hic verò agatur de arcu p non magno, potest poni p loco d u, et differentia sinuum pro d y) fiet itaque fluxio secunda orbitæ lunaris in loco in quo perigæum esse debet

$$\frac{du^2}{2r} \times \left\{ \frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{10T^2f}{r^2} \times \right.$$

$$\left. (3y^2 + \frac{6yzp}{r} + \frac{3z^2p^2}{r^2}) \times \frac{1}{r} - r \right\} \text{ cujus pars}$$

$$\frac{du^2}{2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2r} \times \left(\frac{T^2}{r^2} - \frac{4T^2f}{r^2} \right) \times \frac{3yy}{r} - r$$

$$\text{fluentem habet æqualem zero; fluens autem ex-}$$

$$\text{cessus } \frac{du^2}{2r} \times \left(\frac{M^2}{A^2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{6yzp}{r^2} + \right.$$

$$\left. \frac{6T^2f}{r^2} \times \frac{3yy}{r} - r \right) \text{ fiat æqualis zero (omissis}$$

terminis in quibus f aut p ad duas dimensiones assurgunt) et habebitur valor p, quatenus designet arcum quo processit perigæum, siquidem tota fluens fluxionis secundæ orbitæ lunaris in eo puncto fiet zero.

Hinc itaque divisus terminis per quantitatem communem $\frac{6M^2T^4du}{2A^2r^8}$ habetur hæc æquatio

$$Tp \times \int \frac{y^2 du}{r} = f \times \int \frac{3yy du}{r} - r r du,$$

sive quia y du = - r dz fit $Tp \times \int - z dz = f \times \int - 3ry dz - r^2 du$. Est autem $\int - z dz = \frac{1}{2} r r - \frac{1}{2} z z$ et $\int - y dz$ segmentum circulare cujus ordinata est y, sive sector circularis $\frac{1}{2} r u$, dempto vel assumpto triangulo cujus

area est $\frac{1}{2} y z$; hinc æquatio evadit $\frac{1}{2} Tp \times (r r - z z) = f \times (\frac{1}{2} r^2 u - \frac{1}{2} r y z - r^2 u)$, sive $Tp \times y y = f \times (r^2 u - 3ryz)$, unde tandem habetur $p = \frac{r f}{T} \times \frac{r u - 3yz}{y y}$.

Atque cùm hic sit motus perigæi quo tempore Luna fertur ab apogæo ad perigæum, erit motus apsidis durante unâ revolutione Lunæ ab apogæo ad apogæum $\frac{2fr}{T} \times \frac{r u - 3yz}{y y}$.

Cor. 1. Hinc motus apsidum nullus est cum $r u - 3yz = 0$; in quadraturis verò fit negativus; regrediuntur itaque apsidæ; maximus autem est in syzygiis et positivus, tunc enim evanescit quantitas negativa 3yz, fit $u = \frac{1}{2} c$, et $y = r$, unde ille motus fit $\frac{fc}{2T}$ durante unâ revolutione Lunæ.

Cor. 2. Si hunc calculum accuratius instituere liceret, attendi posset ad motum Solis dum Luna ab apogæo ad perigæum movetur, promoveretur enim interim Sol 13 circiter gradibus, itaque etsi Luna veram describeret ellipsim, perigæum non faceret cum quadraturâ eundem angulum quem faciebat apogæum, sed 13 gradibus minus distaret in consequentia. Sed instituto calculo invenimus parum admodum exinde mutari motum perigæi in propriâ orbitâ, ita ut ad institutum nostrum sufficiat illum assumere qualis per Problema repertus est.

PROBL. II.

Invenire quantitatem motûs apsidum singulo anno.

Sit apogæum in quadraturâ, et Sole procedente apogæum inde versus syzygiam recedat.

Dicatur æ tempus quo Sol revolutionem respectu apogæi Lunæ absolvit, dicatur æ tempus quo Luna ab apogæo ad apogæum redit, sit c tota periphæria quam Sol apogæi respectu describit, et d u arcus ejus exiguus quo apogæum a quadraturâ recessisse censebitur propter Solis motum, tempus quo hunc arcum descriperit erit $\frac{adu}{c}$,

et cùm tempore æ, apogæum moveatur quantitate $\frac{2fr}{T.y y} \times (ru - 3yz)$ tempore $\frac{adu}{c}$ proce-

det quantitate $\frac{2afr}{\sigma.T.c} \times (\frac{rudu}{y^2} - \frac{3yzdu}{y^2})$,

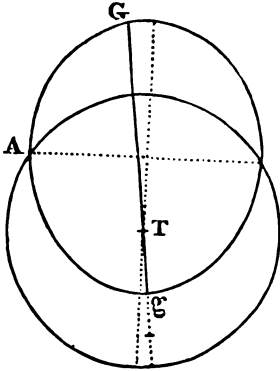
erit autem u arcus qui metitur distantiam apogæi a quadraturâ, y ejus sinus, et z ejus cosinus, et

$$du = \frac{r dy}{z} \text{ hinc quantitas } \frac{2afr}{\sigma.T.c} \times (\frac{rudu}{y^2} - \frac{3yzdu}{y^2}) \text{ fit } \frac{2afr}{\sigma.T.c} \times (\frac{rudu}{y^2} - \frac{3rdu}{y}).$$

Ut habeatur fluens quantitatis $\frac{rudu}{y^2}$, ponatur

$$\text{loco u ejus valor } y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{115^2r^8} + \frac{63y^{11}}{2816r^{10}} \text{ \&c. fiet } \frac{rudu}{y y} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{rdn}{y} + \frac{ydu}{6r} + \frac{3y^3du}{40r^3} + \frac{5y^5du}{112r^5} +, \\ & \&c. \text{ et dividendo } rdu \text{ per valorem } y, \text{ quiest } u - \\ & \frac{u^3}{6rr} + \frac{u^5}{120r^4} - \frac{u^7}{5040r^6} \text{ est } \frac{rdu}{y} = \frac{rdu}{u} \\ & + \frac{udu}{6r} + \frac{7u^3du}{360r^3} + \frac{31u^5du}{15120r^5}; \text{ et loco} \\ & ydu \text{ in sequentibus terminis ponendo } -rdz \\ & \text{et loco } y^2 \text{ ejusque dignitatum ponendo } r^2 - z^2 \\ & \text{ejusque dignitates, fit } \frac{rudu}{yy} = \frac{rdu}{u} + \frac{udu}{6r} \\ & + \frac{7u^3du}{360r^3}, \&c. - \frac{rdz}{6r} + \frac{3}{40} \times \frac{rr-zz}{r^3} \times -rdz \\ & + \frac{5}{112} \times \frac{rr-zz^3}{r^5} \times -rdz + \frac{35}{1152} \times \frac{rr-zz^5}{r^7} \times -rdz \\ & + \frac{63}{2816} \times \frac{rr-zz^7}{r^9} \times -rdz, \\ & \&c. Cujus quantitatis fluens est $rL. u +$ \\ & $\frac{u^2}{12r} + \frac{7u^4}{1440r^3}, \&c. + \frac{r-rz}{6r} + \frac{3}{40} \times$ \\ & $\frac{2r^4-r^3z+\frac{1}{3}rz^3}{r^3} + \frac{5}{112}$ \\ & $\times \frac{\frac{8}{15}r^6-r^5z+\frac{2}{3}r^3z^3-\frac{1}{3}rz^5}{r^5} + \frac{35}{1152} \times$ \\ & $\frac{\frac{16}{15}r^8-r^7z+\frac{5}{3}r^5z^3-\frac{1}{3}r^3z^5+\frac{1}{3}rz^7}{r^7} + \frac{63}{2816} \times$ \end{aligned}$$



$$\frac{128}{513} r^{10} - r^9 z + \frac{4}{3} r^7 z^3 - \frac{6}{5} r^5 z^5 + \frac{4}{7} r^3 z^7 - \frac{1}{9} r z^9$$

cui fluenti si adjungatur fluens quantitatis — $3rdy$ quæ est — $3rL. y$ et omne ducatur per

$\frac{2af}{Tc}$ habetur motus apogæi dum propter Solis motum apsis recessit a quadraturâ arcu u .

Si ergo u sit quadrans, y erit r , et z fiet zero, unde hæc expressio evadet $\frac{2af}{Tc} \times (rL. \frac{1}{2}c +$

$$\frac{1}{12} \frac{c^2}{r} + \frac{7}{1440} \frac{c^4}{r^3}, \&c. + \frac{r}{6} + \frac{3}{40} \times \frac{2}{3} r + \frac{5}{112} \times (\frac{8}{15} r + \frac{35}{1152} \times \frac{16}{35} r +, \&c. - 3rL. r)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{2af}{Tc} \times (L. \frac{1}{2}c + \frac{c^2}{192r^2} + \frac{7c^4}{308640r^4} \\ & + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10 \times 11}, \&c.) \\ & \text{harum fractionum } \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5}, \&c. \text{ summa variâ} \end{aligned}$$

modis haberi potest, et quidem liquet oriri istos terminos ex terminis serie quæ excessum quadrantis supra radium exprimit cùm radius est unitas, cujus seriei quinque priores termini efficiunt .33905, residui .23174; hinc cùm quinque primi termini hic assumpti evadant propter fractiones per quas ducuntur .26343, et sequentes per fractiones minores quàm $\frac{1}{3}$ ducantur, omnes sequentes simul sumpti non efficiunt .23174

sive .07724, id itaque addatur ad .26343, erit .34067 numerus major quæsito, et .26343 numerus quæsito minor, assumatur medium .30205 quantitas proposita evadit $\frac{2af}{Tc} \times (L. \frac{1}{2}c + \frac{c^2}{192} + .30205)$.

Si verò dicatur g excessus quadrantis super radium, per naturam logarithmorum fiet $L. \frac{1}{2}c = g - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g^3 - \frac{1}{4}g^4 +, \&c. = .57079 - .16290 + .06196 - .02652 + .01211 - .00576 = .4496$, unde expressio inventa fit $\frac{2af}{Tc} \times (.4496r^2 + \frac{c^2}{192} + .30205r^2) = \frac{2af}{T} \times (\frac{.75165r^2}{c} + \frac{c}{192}) = \frac{af}{T} \times (\frac{1.5033r^2}{c} + \frac{c}{96})$ sive quia est $\frac{c}{96} = 3^{sr}.75$, et $\frac{r^2}{c} = \frac{r}{6.283188} = 9^{sr}.1189$ et $\frac{1.5r^2}{c} = 13^{sr}.6733$,

habetur motus apogæi durante quadrante $\frac{f}{T} \times$

$\frac{af}{T} \times 17^{sr}.4283$ et durante totâ revolutione $\frac{f}{T} \times \frac{af}{T} \times 69^{sr}.7132$, sed ut totum tempus qualecumque sit, ad tempus annum A , ita motus $\frac{f}{T} \times \frac{af}{T} \times 69^{sr}.7132$ ad motum an-

nno tempore factum qui erit $\frac{f}{T} \times \frac{A}{T} \times 69^{sr}.7132$; præterea sit P mensis periodicus Lunæ

fiatque ut A ad P ita $\frac{f}{T} \times \frac{A}{T} \times 69^{sr}.7132$ ad motum apsidium tempore periodico Lunæ.

qui erit $\frac{f}{T} \times \frac{P}{T} \times 69^{sr}.7132$, et ut P ad π ita $\frac{f}{T} \times \frac{P}{T} \times 69^{sr}.7132$, ad motum apsidium

mense anomalistico ω qui erit $\frac{f}{T} \times 69^{sr}.7132$, et

ut 360 ad 360 + $\frac{f}{T} \times 69^{sr}.7132$ ita P ad mensem anomalisticum ω qui ergo erit $P \times (1 + \frac{f}{T} \times \frac{69^{sr}.7132}{360})$ ideoque motus annuus apo-

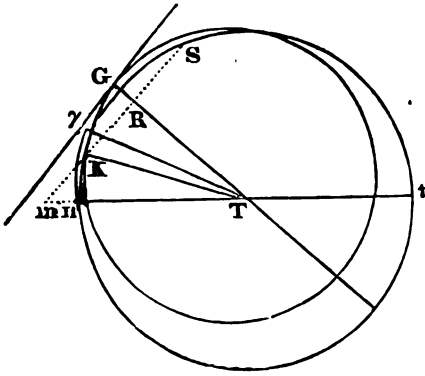
est $T - X$, vis gravitatis est $\frac{r^2}{T - X} V$ t

quoniam vires ex revolutione plani genitæ sunt inversæ in triplicatâ ratione distantiarum, vis plani est $\frac{T \cdot r^2 \cdot V \times m R^2 - T r^2 V \times R K^2}{T - X}^3 \times R K^2$

quæ si addatur vi gravitatis fit $\frac{T r^2 V R K^2 \cdot X r^2 V R K^2 + T r^2 V m R^2 - T r^2 V R K^2}{T - X}^3 \times R K^2$

Sed cùm in eo puncto vis gravitatis sit $\frac{r^2}{T - X} V$, et vis substracta Solis sit ut distantie, ideoque sit $\frac{T - X}{r} Y$, si reducantur ad communem denominatorem $T - X$ fiet $\frac{T r^2 V - X r^2 V - \frac{T^4 Y}{r} + \frac{4 T^3 X Y}{r}}{T - X}^3$

Ut autem æquipolleat plani revolutio cum substructione vis Solis, ita determinandæ sunt quanti-



tates $R K^2$ et $m R^2$, ut expressiones harum virium sint ubique æquales, et l. quidem cùm X fit zero, vis gravitatis cum vi plani est $\frac{T r^2 V \times m R^2}{T - X}^3 \times R K^2$

et vis gravitatis substractâ vi Solis remanet $\frac{T r^2 V - \frac{T^4 Y}{r}}{T - X}^3$. Oportet ergo ut sit $m R^2$

$= \frac{R K^2}{r^2 V} \times (r^2 V - \frac{T^3 Y}{r})$. Termini verò reliqui in quibus est X sunt $-\frac{X r^2 V R K^2}{T \cdot X}^3 - R K^2$

et $-\frac{X r^2 V + 4 T^3 X \frac{Y}{r}}{(T - Y)^3}$. Oportet ergo ut sit $R K^2 = \frac{R K^2}{r^2 V} \times (r^2 V - 4 T^3 \frac{Y}{r})$.

Itaque ut vis revolutionis plani vi gravitatis permixta, idem efficiet ac vis substracta Solis,

oportet ut sit $m R^2$ ad $R K^2$ ut $r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}$

ad $r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}$, sive ut sit $m R$ ad $R K$ ut $\sqrt{r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}}$ unde

cùm sit $m R$ ut motus Lunæ et apogæi conjunctim et $R K$ ut motus Lunæ, si Luna descriperit 360° . fiet ut $\sqrt{r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}}$

ita 360° . ad Lunæ et apogæi motum conjunctim, $\frac{r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}}{r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}} =$

qui erit ergo $360 \times \sqrt{\frac{r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}}{r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}}} =$

$360 \sqrt{\frac{r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}}{r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}}}$, itaque si ex hoc valore tollantur 360° . residuum erit motus apogæi in tegrâ revolutione Lunæ. Q. e. o.

THEOR. I.

Invenire motum apogæi lunaris, supponendo orbitam lunarem esse circulo finitimam.

Describat Luna arcum $d u$, et eo durans vis Y constans maneat, et spectatur $d u$ quasi portio ellipsæ descriptæ, si vis Y durante totâ revolutione crevisset sicut distantie; motus apsidis durante totâ revolutione

C , foret (per Lem. II.) $c \sqrt{\frac{r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}}{r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}}}$

$- c$, ideoque durante tempore quo arcus $d u$ percurritur, foret $d u \sqrt{\frac{r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}}{r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}}}$

$- d u$, sit $r = T$, et sumatur valor quantitatis $\sqrt{\frac{V - Y}{V - 4 Y}}$ is erit $1 + \frac{3 Y}{2 Y}$, hinc itaque elementum motûs apsidum est

$\frac{3 r}{2 V} d u$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times (\frac{3 y y}{r} - r)$. fit

$\frac{3 F}{2 V a} \times (\frac{3 y y d u}{r} - r d u)$, casus integrals pro quadrante est $\frac{3 F}{2 V a} \times (\frac{3 r^2 c}{8 r} - \frac{r c}{4})$ et pro

circulo $\frac{3 F}{2 V a} \times \frac{r c}{2}$ et cùm $\frac{F}{V}$ sit $\frac{M M}{r A A}$ evadit

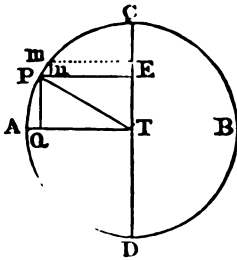
$\frac{3 M M}{4 A A} c$ sive cùm $\frac{M M}{A A}$ sit fere .0055 est motus apsidum .0041 $c = 14.476$ sive $14. 28'. 35''$,

et quia is absolvitur mense synodico, ut habetur motus apogæi annuus, fiat ut .0808 ad 1, in 14.476 ad 18° . 267 sive 18° . 16', quod est circiter dimidium veri motûs apsidis ut observat Newtonus.

THEOR. II.

Invenire leges motûs apogæi Lunæ supponendo orbitam lunarem esse ellipticam.

Distantia Lunæ apogæa dicatur A , perigæa dicatur P , sinus anguli apogæi et linæ quadraturarum sit y , vis Solis in apogæo agens erit per demonstrata $A \times \frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, et vis Solis agens in perigæo, erit $P \times \frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, et y in utroque casu est eadem quantitas, dicatur itaque C hæc quantitas $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$; siquidem est constans; vis Solis substructitia aut addititia in apogæo ac perigæo erit $A C$ vel $P C$; hoc est, erit ut quantitas constans C , ducta in distantiam A vel P ; si itaque fingatur in punctis intermediis, eam vim esse etiam eandem constantem C , per distantiam ductam, aut saltem variationem quantitatis C compensari, tunc per Cor. 2. Prop. XLV., et exempla tertia ejusdem, erit motus Lunæ ab apside ad apsidem $360 \times \sqrt{\frac{V-C}{V-4C}}$, si V sit ut vis gravitatis Terræ in data distantia, est verò $360 \sqrt{\frac{V-C}{V-4C}} = 360 \times (1 + \frac{3C}{2V})$, ideòque motus apsidis erit $360 \times$



$\frac{3C}{2V}$ tota revolutione synodico-anomalistica quam pro synodica sumimus.

Loco C litteram Y quæ in toto calculo designabat quantitatem $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$ resumamus, et fingatur talem esse apogæi motum ut ubique sit proportionalis motui $360 \times \frac{3Y}{2V}$ durante mense synodico quod quidem ex prædictis consequitur, fingaturque Solem immotum stare et apogæum ejus respectu in antecedentia regredi, totamque revolutionem respectu Solis tempore a absolvere, sit ergo c tota peripheria, apsis percurrat respectu Solis arcum $d u$ tempore $\frac{a d u}{c}$; ideò tempore synodico S percurrat $360^{\text{gr.}} \times \frac{3Y}{2V}$ motu suo, tempore $\frac{a d u}{c}$ percurrat $\frac{a}{S} \times \frac{3Y d u}{2V}$, sed quia est $\frac{Y}{V} = \frac{F}{V a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$ et $\frac{F}{V} = \frac{M M a}{A A r}$, elementum motus apogæi est

$\frac{a}{S} \times \frac{3 M M}{2 A A r^2} \times (3 y y d u - r^2 d u)$, cujus integralis est (si fingatur apogæum a quadraturâ ad syzygiam in antecedentia retrocedere) $\frac{a}{S} \times \frac{3 M M}{2 A A r^2} \times (3 . r f . y d z - r^2 u)$ est autem $f . y d z = C P E$, hinc sumendo $\frac{a}{S A}$ pro unitate, est $\frac{3 M}{2 A r} \times (3 C P E - r u)$ et pro quadrante $\frac{3 M}{2 A r} \times \frac{r c}{8}$ et pro circulo $\frac{3 M}{2 A r} \times \frac{r c}{2}$ prope ut in præcedenti Theoremate.

Hinc si sumatur motus apogæi proportionalis tempore, dum apogæum discedet a Sole arcu u , ejus motus esse debuisset $\frac{3 M}{2 A r} \times \frac{r u}{2}$ cum revera inventus sit $\frac{3 M}{2 A r} \times (3 C P E - r u)$, hinc æquatio est $\frac{3 M}{2 A r} \times (\frac{3 r u}{2} - 3 C P E)$, sed $3 C P E = \frac{3 r u}{2} + \frac{3 y z}{2}$ per constr. hinc æquatio fit $\frac{3 M}{2 A r} \times \pm \frac{3 y z}{2}$, sed $\frac{2 y z}{r}$ est sinus arcus dupli distantie a Sole, hinc itaque hæc æquatio est ut sinus arcus dupli distantie apogæi a Sole, unde lex æquationis habetur, quod sit maxima in octantibus, nulla in syzygiis et quadraturis, positiva a quadraturis ad syzygias, negativa inde, sed ejus quantitas, non per hunc calculum, sed per observationes est determinanda, siquidem, ut observatum est, hypotheses adhibite, utut a motu apsidum non dissimiles, attamen ipsius quantitatem dimidio fere minorem exhibent. De his in notis subsequentiis plura.

DE EXCENTRICITATE ORBITÆ LUNARIS.

Ipsa curva quam Luna describit, posset determinari per calculum adhibita ejus curvæ fluxione secundâ, quæ obtinetur subtrahendo vim solarem a vi Terræ; audivimus autem viros in mathesi primarios hoc Problema, quod certe non est exiguæ difficultatis, suum fecisse; cum autem nobis videatur Newtonum non aliter hanc curvam investigasse quam per approximationes quasdam, eadem methodo, tenui nostro modulo magis accommodatâ, idem persequi conabimur.

I. Propositione XXVIII. hujus Libri quæsit Newtonus qualis foret orbita lunaris ex suppositione illam citra actionem Solis circularem esse, et invenit quod si assumatur eam orbitam fieri ellipsim per Solis actionem, ea ellipsis Terram in centro haberet, et ejus axis minor foret ad majorem qui secundum lineam quadraturarum jaceret, ut 69 ad 70.

Hinc deducitur quod si semi-axis major 70 dicatur $r + p$, semi-axis minor 69 sit $r - p$, distantia Lunæ a Terrâ in loco quovis dicatur

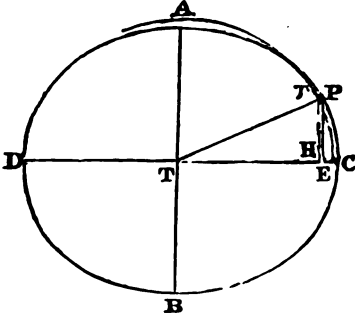
$r + x$, sit y sinus distantiae Lunae a quadraturâ proximâ, z ejus distantiae cosinus erit ubivis
 $x = p \times (1 - \frac{2y^2}{r^2})$.

Nam sit $T \Pi = r$, $T P = r + x$, $\Pi H = y$,
 $T H = z$; propter triangula similia $T P E$,
 $T \Pi H$ est $P E = \frac{r+x}{r} \times y$ et $T E = \frac{r+x}{r}$

$\times z$, unde per naturam ellipseos est $\frac{r-p}{r+p} \times$
 $\frac{r-p}{r+p} = \frac{r-p}{r+p} \times \frac{r+x}{r^2} \times z^2 = \frac{r+x}{r^2}$

$\times y^2$; unde est $\frac{r-p}{r+p} = \frac{r+x}{r^2} \times y^2 +$
 $\frac{r-p}{r+p} \times \frac{r+x}{r^2} \times z^2$, sed divisione factâ,

omissisque terminis superfluis, est $\frac{r-p}{r+p} = 1$
 $-\frac{4p}{r}$, hinc fit $\frac{r-p}{r+p} = \frac{r+x}{r^2} \times y^2 +$
 $\frac{r+x}{r^2} \times z^2 - \frac{r+x}{r^2} \times \frac{4p}{r}$ et quia y^2
 $+ z^2 = r^2$, et formatis dignitatibus omissisque



terminis in quibus p , vel x , ad secundam dimen-
 sionem assurgunt, habetur $r^2 - 2rp = r^2 +$
 $2rx - \frac{4p^2}{r} =$ sive loco z^2 scripto $r^2 - y^2$;
 deletis terminis aequalibus et transpositione factâ
 et divisione per 2, habetur $rx = \frac{2pr^2}{r} - \frac{2py^2}{r}$
 $- rp$ ideôque $x = p \times (1 - \frac{2y^2}{r^2})$.

Ex quo sequitur quod in octantibus x evanes-
 cit, illic enim $\frac{2y^2}{r^2} = 1$.

II. Pbnatur verò orbitam lunarem ellipticam
 citra Solis actionem ejusque semi-axem majorem
 esse Y , excentricitatem dici f , accedere autem
 vim Solis, sed eam tantum partem ejus actionis
 considerari quæ secundum orbitæ radium agit,
 omissâ illâ parte ejus actionis solaris quæ radio
 est perpendicularis, in hac hypothesi deprehen-
 detur hujus orbitæ figuram variari, et magis ob-
 longam evadere dum apides sunt in syzygiis

quàm dum sunt in quadraturis, excentricitatem
 pariter variabilem esse maximam dum apides
 sunt in syzygiis, mediocrem cùm apides sunt in
 octantibus, cùm sunt in quadraturis minimam,
 et ex hac hypothesi cum priori conjunctâ ejus
 excentricitatis variabilis leges et quantitas rudi
 Minervâ determinari potest.

THEOR. I.

Positis Sole et lineâ apsidum immotis, item
 omissâ eâ actionis solaris parte quæ perpendicu-
 lariter in radium orbitæ lunaris agit; dico quod
 si describatur ellipsis, cujus Terra sit focus et
 cujus axis major sit linea inter Lunæ apogæum
 et perigæum interjacens, orbita lunaris erit con-
 tenta intra eam ellipsim cùm apides erunt in
 syzygiis, erit verò extra eam ellipsim cùm apides
 erunt in quadraturis, cùm verò apides erunt in
 octantibus, orbita lunaris cum eâ ellipsi coincidit.

Resumptis iis quæ in Theor. VII. calculi
 secundi dicta fuerunt, inventum est quod si dis-
 tantia Lunæ citra Solis actionem fuisset z , evadit
 per Solis actionem secundum radium exercitum

$x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V}$ sive quia est $\frac{Y}{V} = \frac{M^2}{A^2} \times (\frac{3Y}{r}$

$-r)$, hæc distantia fit $x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4y^2}{r^5} -$
 $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{x^4}{r^3}$. Hinc cùm distantia apogæa sit
 $r + f$, distantia perigæa sit $r - f$, et ea distantia
 quæ est perpendicularis in axem, et quæ est semi-

lateri recto ellipseos æqualis $r - \frac{f^2}{r}$; distantia

apogæa evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 + 12r^3yf}{r^5}$

$- \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 + 4r^3f}{r^3}$. Distantia perigæa fit

$r - f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 - 12r^3yf}{r^5} - \frac{M^2}{A^2}$

$\times \frac{r^4 - 4r^3f}{r^3}$, et distantia perpendicularis est r

$- \frac{H}{r} + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4x^2 - 12r^3x^2f}{r^5}$; po-

nendo z loco y , ut fieri debere ex ipsâ constru-
 ctione patet. Ergo totus axis major invenitur

$2r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{6r^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{2r^4}{r^3}$, sive

semi-axis est $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - \frac{M^2}{A^2} \times r$;

excentricitas verò est $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2f}{r^2} - \frac{M^2}{A^2}$

$\times 4f$; ex ellipseon autem naturâ, semi-latus

rectum ellipseos cujus hic foret axis major et hæc

foret excentricitas, evaderet $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} -$

$1 + \frac{M^2}{A^2} \times (\frac{12y^2}{r^2} - 4)$ $f^2 = r + \frac{M^2}{A^2} \times$

$r + \frac{M^2}{A^2} \times (\frac{3y^2}{r} - r)$

$\frac{3y^2}{r} - r - f^2 \times \left(\frac{1}{r} + \frac{7M^2}{A^2 r^2} \times \frac{3y^2}{r} - r\right)$,
sed ea distantia perpendicularis est in curvâ lu-
nari $r - \frac{f^2}{r} + \frac{M^2}{A^2} + \frac{3z^2}{r} - r - \frac{4M^2 f^2}{A^2 r^2}$

$\times \left(\frac{3z^2}{r} - r\right)$ unde differentia inter distantiam
perpendicularem in ellipsi et eam distantiam in
orbitâ lunari, est $\frac{3M^2}{A^2 r} \times (y^2 - z^2) - \frac{M^2 f^2}{A^2 r^2}$
 $\times (21y^2 - 12z^2 - 3r^2)$, sive omissio hoc ulti-
mo termino propter f^2 , ea differentia est $\frac{3M^2}{A^2 r}$

$\times (y^2 - z^2)$. Si apsides sunt in syzygiis, est
 $y = r$, et $z = 0$, unde hæc quantitas est maxima
quæ esse possit, unde distantia perpendicularis
in ellipsi excedit distantiam in orbitâ lunari
quantitate $\frac{5M^2 r}{A^2}$; si apsides sunt in quadratu-
ris, fit $y = 0$, et $z = r$, unde hæc quantitas
 $\frac{3M^2}{A^2 r} \times (y^2 - z^2)$ evadit $-\frac{3M^2 r}{A^2}$, ideò quod
distantia perpendicularis in ellipsi minor est dis-
tantia in orbitâ lunari, unde fit ut orbita lunaris
contineat intra se ellipsim; si verò apsides sint
in octantibus, evanescit $y^2 - z^2$ hinc ipsa orbita
lunaris cum ellipsi coincidit.

Cor. Ex hoc Theoremate liquet quod omissio
vis quæ agit perpendiculariter in radium orbitæ
lunaris, exhibet orbitæ lunaris mutationem plane
oppositam illi quæ ex ejus consideratione dedu-
ceretur omnia excentricitate orbitæ; nam sive
apsides sint in syzygiis sive in quadraturis, liquet
ex Theoremate præcedenti orbitam Lunæ pro-
longari secundum lineam syzygiarum, contrahi
verò secundum lineam quadraturarum, cujus
oppositum statuatur Prop. XXVIII. hujusce,
ex consideratione vis solaris totius, sed semotâ
excentricitatis orbitæ lunaris ratione; hinc ergo
ut mediocrem quodammod. teneamus viam,
jungemus incremento distantie lunaris secundum
hypothesim Theor. VII. calculi 2. invento, par-
tem aliquam $\frac{m}{n}$ decrementi secundum methodum

Newtonianam inventi; unde sic medium quoddam
inter ambas hypotheses obti-
nemus. Itaque quævis dis-
tantia x evadet $x + \frac{x^4}{r^2} \times$

$$\frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p \times \left(1 - \frac{2y^2}{r^2}\right) \\ = x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4 y^2}{r^5} - \\ \frac{M^2 \times x^4}{A^2 \times r^2} + \frac{n}{m} p \times \left(1 - \frac{2y^2}{r^2}\right)$$

PROBL. I.

Positis iis quæ in Corollario præcedentis
Theorematis statuuntur, et supposito orbitam
lunarem, quomocumque mutata per Solis

actionem, ellipsi proximam esse, invenire leges
excentricitatis orbitæ lunaris.

Primo cùm distantia apogæa sit $r + f$, hæc
distantia loco x substituta in valore per Coroll.

Theor. præcedentis reperto evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2}$

$$\times \frac{3r^4 y^2 + 12r^3 f y^2 - M^2 \times (r^4 + 4r^3)}{r^5 A^2 r^3}$$

$$+ \frac{n}{m} p \times \left(1 - \frac{2y^2}{r^2}\right); \text{ ut habeatur distantia}$$

mediocris loco x scribatur r , sinus autem ejus
distantie a quadraturâ proximâ est quam proxi-
me cosinus distantie apogæa a quadraturâ proxi-
mâ, ideòque loco y scribatur z , fit $r + \frac{M^2}{A^2} \times$

$$\frac{3z^2}{r} - \frac{M^2 r}{A^2} + \frac{n}{m} p \times \left(1 - \frac{2z^2}{r^2}\right) \text{ quæ sub-}$$

$$\text{stracta ex distantia apogæa relinquit excentrici-}$$

$$\text{tatem } f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times y^2 - z^2 + 12r f y^2}{r^5}$$

$$+ \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2n p}{m} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}, \text{ quæ omis-}$$

$$\text{sis terminis omittendis fit } f + \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$$

$$\times \frac{y^2 - z^2}{r^2}; \text{ hinc illius excentricitatis hæc sunt}$$

leges.

1. Excentricitas est maxima cùm apsides
sunt in syzygiis, nam illic y fit r , et $z = 0$, hinc

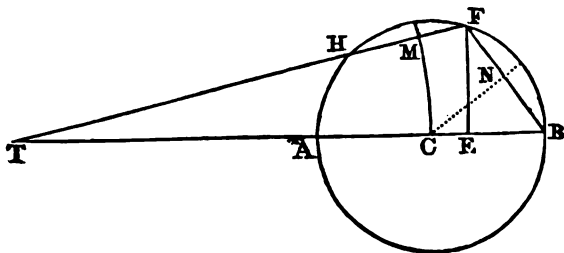
$$\frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \text{ excentricitas evadit } f + \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$$

2. Excentricitas est minima cùm apsides sunt
in quadraturis, illic enim est $y = 0$ et $z = r$,

$$\frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \text{ unde excentricitas evadit } f - \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$$

3. Excentricitas est mediocris cùm apsides
versantur in octantibus, estque $= f$, quia $y^2 = z^2$

$$\frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \text{ sicque evanescit } \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$$



4. In aliis quibuscunque locis hæc construc-
tione obtinetur fere excentricitas, summat T C

$$= f, CB = \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}, \text{ hoc radio}$$

† Hisce motuum lunarium computationibus ostendere volui; quod motus lunares per theoriam gravitatis a causis suis computari possint. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua medii motus Lunæ oriatur a variâ dilatatione orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. ^(h) Hæc vis in perigæo Solis major est, et orbem Lunæ dilatat; in apogæo ejus minor est, et orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato Luna tardiùs revolvitur, in contracto citiùs; et æquatio annua, per quam hæc inæqualitas compensatur, ⁽ⁱ⁾ in apogæo et perigæo Solis nulla est, ^(k) in mediocri Solis a Terrâ distantia ad 11'. 50".

PROBL. II.

Variationis excentricitatis quantitatem maximam determinare.

Hoc Problema nonnisi per determinationem veræ curvæ, quam sequitur Luna, potest determinari, quâ non inventâ ad observationes recurrendum, ut fecisse videtur Newtonus, mediocrem excentricitatem esse partium 5505 quarum radius sit 100000 assumit, et maximum incrementum vel decrementum assumit 1172½, tam ex observationibus quàm quod ille numerus ad concinnandam constructionem pro æquatione apogæi commodus esset, ut suo loco dicemus.

Illust. Cassinus mediocrem illam excentricitatem facit 5430 incrementum verò et decrementum 1086, nec malè hæc consentiunt cum quantitativus Prob. I. inventis, si loco quantitatis indeter-

minatæ $\frac{n}{m}$ scribatur $\frac{1}{2}$; nam, id incrementum aut decrementum inventum fuerat

$$3 \frac{M^2}{A^2} r - \frac{2n}{m} A^2 p$$

quantitatibus quæ ad simplicitatem calculi omissee fuerant cùm excentricitas inventa fuisset $f +$

$$\frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times y^2 - z^2 + 12r^3 f y^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2}$$

$$\times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}, \text{ hæc evadit (cum apsidæ sunt in syzygiis et } z = 0, y = r) f +$$

$$\frac{M^2}{A^2} \times (3r + 12f) + \frac{M^2}{A^2} \times (4f - p), \text{ et cùm}$$

$$\text{sunt in quadraturis ubi } z = r \text{ et } y = 0, f -$$

$$\frac{M^2}{A^2} \times 3r + \frac{M^2}{A^2} \times (4f + p), \text{ unde mediocris}$$

$$\text{excentricitas est } f + \frac{M^2}{A^2} \times 10f, \text{ et incremen-}$$

$$\text{tum vel decrementum, } \frac{M^2}{A^2} \times 3r + 6f - p.$$

$$\text{Cùm itaque sit } \frac{M^2}{A^2} = .0055 \text{ ex priùs inven-}$$

$$\text{tis, mediocris excentricitas } (1 + \frac{10 M^2}{A^2}) \times$$

$$\text{quam Cassinus invenit 5430 et Newtonus 5505,}$$

$$\text{est } 1.055 f, \text{ hinc est } f = 5147 \text{ secundùm Cas-}$$

sinum et 5218 secundùm Newtonum, quod utrumque ductum in .0055, prius efficit 1819.85 alterum 1822.2 cùmque p sit 719, id ex priore detractum relinquit 1100.85, ex posteriore 1103.2; qui numeri incidunt inter 1172 et 1086 quos pro excentricitatis variatione assignant Newtonus aut Halleus et Cassinus.

(†) * *Hisce motuum, &c.* Hæc est enim veritatis ejus theoriæ fortissima probatio, si ea quæ mathematicè deducuntur ex eâ theoriâ apprimè consentiant cum phænomenis in casu maximè composito.

(^h) * *Hæc vis in perigæo Solis major est et orbem Lunæ dilatat;* vis Solis aliquando adjungitur vi Terræ ut Lunam versus Terram attrahat, aliquando idque sæpiùs et ubi fortius agit, vi Terræ est opposita, et Lunam a Terrâ distrahit, itaque toto effectu vis Solis simul considerato, Luna per eam vim a Terrâ distrahitur, et eò magis quò ea vis Solis major est, ideòque Luna magis a Terrâ distrahitur dum Terra versatur in suo perihelio quàm ubi versatur in aphelio: hinc primo casu orbita Lunæ magis est dilatata quàm hoc altero.

(ⁱ) * *In apogæo et perigæo Solis nulla est:* id omninò liquet ex Cor. 2. Probl. V. prioris calculi, nam ex iis quæ in eo Corollario statuuntur liquet quod ut habeatur æquatio quovis in loco, hæc proportio est instituenda, ut areæ ellipseos quam Terra describit dimidium ad aream descriptam a Terrâ ab aphelio (vel perihelio) usque ad eum locum propositum, ita semestris tardatio ad tardationem mediocri motui adscriptam, sed in hoc casu ea area a Terrâ descripta est ipsa semi-ellipse, ergo etiam tardatio medio motui adscripta est ipsa semestris tardatio; tum verò sumitur ex Probl. IV. tardatio loco dato conveniens quæ ex tardatione mediocri tollitur, et differentia est æquatio quæsitâ; sed rursus ea tardatio aphelio aut perihelio conveniens est ipsa semestris tardatio, ergo, ex tardatione mediocri motui eo in loco adscriptâ, detractâ nullum est residuum, cùm planè sint æquales, ergo æquatio in apogæo ac perigæo nulla est.

(^k) * *In mediocri Solis distantia, &c.* Videntur hæc verba statuere quid constet ex observationibus, nempe hanc æquationem esse 11'. 50" ubi maxima est, et esse æquationi centri proportionalem, observavimus autem Ill. Cassinum

circa ascendit, in aliis locis æquationi centri Solis proportionalis est; et additur medio motui Lunæ ubi Terra pergit ab aphelio suo ad perihelium, et in oppositâ orbis parte subducitur. Assumendo radium orbis magni 1000 et eccentricitatem Terræ $16\frac{1}{2}$, ^(l) hæc æquatio, ubi maxima est, per theoriam gravitatis prodiit $11'. 49''$. Sed eccentricitas Terræ paulo major esse videtur, et auctâ eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eâdem ratione. Sit eccentricitas $16\frac{1}{4}$, et æquatio maxima erit $11'. 51''$.

^(m) Inveni etiam quod in perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, apogæum et nodi Lunæ velocius moventur quàm in aphelio ejus, idque in triplicatâ ratione distantie Terræ a Sole inversè. ⁽ⁿ⁾ Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum æquationi centri Solis proportionales.

hanc æquationem ubi maxima est $9'. 44''$. efficere.

^(l) Hæc æquatio ubi maxima est prodiit $11'. 49''$. Sumptâ orbitâ lunari ut circulari, per theoriam gravitatis prodiit $11'. 47''$. imo minor, sive Newtonus aliâ viâ eum calculum instituerit quàm nos, sive alia elementa assumpserit, sive ex excentricitate orbitæ lunaris consideratione hanc quantitatem auxerit, cætera verò ad amussim quadrant.

Eam æquationem excentricitati Terræ esse proportionatam ex Cor. 1. Prob. V. pag. 72, prodiit enim ejus valor per quantitates fixas ductas in excentricitatem quæ in calculo dicebatur e ; et quamvis quantitas b quæ est $\sqrt{a^2 - e^2}$ in eo valore occurrat, idcirco non est censendum æquationis valorem multum pendere ex illa dignitate e^2 siquidem in illo termino ea dignitas ferè evanescit respectu a^2 .

Liquet etiam ex Cor. 2. ejusd. Probl. cæteras æquationes esse proportionatas æquationi centri Solis: addendas esse motui Lunæ dùm pergit ab aphelio ad perihelium, illic enim tardatio vera minor est quàm tardatio mediocris, ergo provecior est Luna quàm secundum tardationem mediocrem, addi ergo debet ejus viæ iste tardationis defectus; ex perihelio pergendo res oppositâ ratione procedet.

^(m) • Inveni etiam, &c. Id utique statuit Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I., illic ostendit vires Solis esse ut cubos distantiarum reciproce, unde cùm sint causæ errorum apogæi et nodorum, illi errores sive motus qui suis causis sunt proportionales, debent esse ut cubi distantiarum reciproce; hinc dicatur a mediocris distantia Terræ a Sole, distantia quævis alia dicatur $a \pm x$, motus medius diurnus apogæi in distantia a sit g , motus medius nodi in eâ distantia a sit n , in distantia x , motus apogæi erit $\frac{a^3}{a \pm x^3} g$ et motus nodi erit $\frac{a^3}{a \pm x^3} n$ aut formando seriem ex his quotientibus et omissis terminis in quibus altior dignitatis x occur-

rit, erit motus apogæi in quavis distantia, $g \mp \frac{3x}{a} g$, et motus nodi $n \mp \frac{3x}{a} n$.

⁽ⁿ⁾ • Et inde oriuntur æquationes annuæ æquationi centri Solis proportionales. Cùm motus apogæi Lunæ et nodi uniformis non sit cùm Terra ad varias a Sole distantias transferatur, sed addatur aut detrahatur ex eorum motu medio quantitas variabilis $\frac{3x}{a} g$, et $\frac{3x}{a} n$, si quæatur

progressus apogæi Lunæ aut nodi cùm Terra ab aphelio Solis certâ quantitate dierum discesserit, is progressus ex motu medio apogæi Lunæ aut nodi rectè non computabitur, quippe singulis diebus præter motum medium quantitate $\frac{3x}{a} g$

$\frac{3x}{a} n$ processerunt aut recesserunt, summa ergo omnium harum quantitatum erit sumenda, quæ erunt correctiones seu æquationes quibus ex loco medio apogæi et nodi ad verum ejus locum deveniemus, illæ verò æquationes æquationibus centri Solis erunt proportionales, nam cùm motus Solis sit in duplicatâ ratione distantie inversè (ut exponetur in notâ ^(o) proximè sequenti) sit m motus medius diurnus Solis in mediocri distantia a , in distantia quavis $a \pm x$ is motus erit $\frac{a}{a \pm x^2} m$, seu in seriem resolvendo hanc ex-

pressionem erit $m \mp \frac{2x}{a} m$, hinc differentia inter motum medium et verum erit $\pm \frac{2x}{a} m$, et et

summâ earum differentiarum conflabuntur æquationes centri Solis; cùm ergo æquationes apogæi

et Lunæ ex summâ quantitatum $\pm \frac{3x}{a} g$, $\frac{3x}{a} n$ constent, erunt istæ æquationes ubique in punctis correspondentibus seu in æqualibus ab aphelio Terræ distantis in ratione constanti $3 g$. et $3 n$ ad $2 m$: idèque erunt ubique proportionales æquationibus centri Solis.

(^o) Motus autem Solis est in duplicatâ ratione distantiae Terræ a Sole inversè (^p) et maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, est 1st. 56'. 20". prædictæ Solis eccentricitati 16½ congruens. (^q) Quod si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiae inversè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam 2st. 54'. 30". (^r) Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi et nodorum Lunæ generant, sunt ad 2st. 54'. 30". ut motus medius diurnus apogæi, et motus medius diurnus nodorum Lunæ sunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit æquatio maxima medii motus apogæi 19'. 43". et æquatio maxima medii motus nodorum 9'. 24". (^s) Additur verò æquatio prior

(^o) * *Motus Solis est in duplicatâ ratione distantiae inversè* scilicet motus Solis angularis e Terrâ spectatus; nam cùm Sol describat semper areas temporibus proportionales, arcus quos reverà describit sunt semper inversè ut distantia, sed præterea magnitudines apparentes eorum arcuum e Terrâ spectatorum sunt etiam inversè ut eorum a Terrâ distantia, ergo arcus quos Sol singulis temporibus æqualibus describere videtur e Terrâ, sunt in duplicatâ ratione distantiarum inversè.

(^p) * *Et maxima centri æquatio est* 1st. 56'. 20". Illam 1st. 55'. 50". facit Ill. Cassinus.

(^q) * *Quod si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiae inversè*; dicatur M motus Solis in distantia mediocri, quæ dicatur a, et distantia quævis alia sit a + x; si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiarum inversè, in distantia a + x foret $\frac{a^3}{a+x}$ M sive $\frac{a^3 M}{a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3}$ aut formando seriem, is motus in distantia a + x erit $M \pm \frac{3x}{a} M$ omissis reliquis terminis ob ex-

iguitatem fractionis $\frac{x}{a}$; ideòque differentia motus in distantia verâ et motus in distantia mediocri foret $\mp \frac{3x}{a} M$: in verâ autem hypothesi quòd

Solis motus crescat in ratione subduplicatâ inversè distantiarum, eodem ratiocinio invenitur quod in quovis loco motus Solis erit $\frac{a^2 M}{a^2 + 2ax + x^2}$

et divisione factâ erit is motus $M \mp \frac{2x}{a} M$, et differentia motus veri et motus medii erit $\mp \frac{2x}{a} M$, eritque ergo hæc differentia ad differentiam in priore hypothesi inventam ut 2 ad 3 in omnibus locis correspondentibus; sed æquationes conflantur ex summâ differentiarum motus veri et medii sumptarum in omnibus locis ab aphelio usque ad locum eum ubi æquatio applicatur; cùm ergo in utrâque hypothesi singulæ differentiae motus veri et medii sint in omnibus punctis correspondentibus in ratione constanti 2 ad 3 erunt etiam summæ earum differentiarum in locis correspondentibus, ipsæ nempe æquationes

in eadem ratione, ergo maxima centri æquatio in hypothesi verâ motum Solis decrescere in duplicatâ ratione distantiarum est ad æquationem maximam in hypothesi fictitiâ motum Solis decrescere in triplicatâ ratione distantiarum ut 2 ad 3 cùm ergo æquatio maxima sit per observationes 1st. 56'. 20". hæc altera erit $\frac{2}{3} \times 1st. 56'. 20"$ sive 2st. 54'. 30". Q. e. d.

(^r) * *Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi et nodorum Lunæ generant, sunt ad* 2st. 54'. 30". *ut motus medius apogæi et nodi ad motum medium Solis.* Nam statutum est motus horum esse in triplicatâ ratione distantiarum inversè, sit g motus medius apogæi in mediocri nempe distantia, n motus medius nodorum, et m motus medius Solis, decrescantque in triplicatâ ratione inversâ distantiarum, deprehenditur eodem modo ac in notâ præcedente quod in quolibet loco differentie inter motum verum et motum mediocrem erunt $\mp \frac{3x}{a} g, \mp \frac{3x}{a} n, \mp \frac{3x}{a} m$, æquationes maximæ sunt summa earum quantitatum sumptarum ab apogæo Solis usque ad mediocrem ejus a Terrâ distantiam, itaque illæ æquationes constituuntur per series omnium $\frac{3x}{a} g$, omnium $\frac{3x}{a} n$,

et omnium $\frac{3x}{a} m$, qualescumque ergo sint illæ quantitates variabiles x, cùm eadem sint in tribus hisce seriebus summæ earum serierum sive æquationes maximæ, erunt inter se ut illæ quantitates g, n et m, per quas omnes partes singularum illarum serierum ducuntur, illæ verò quantitates sunt motus medii apogæi, nodi et Solis, ergo datâ unâ ex his æquationibus, v. gr. datâ æquatione maximâ Solis et motu medio apogæi, nodi et Solis, habentur cæteræ æquationes maximæ statuendo illas esse ad eam æquationem datam, ut ii motus medii dati.

Liquet verò ex ipsâ hac demonstratione, verum quidem Solis motum medium assumi debere, non autem veram ipsius æquationem, sed eam quæ prodit fingendo Solis motum in triplicatâ ratione distantiarum decrescere.

(^s) * *Additur verò æquatio apogæi Lunæ et subducitur æquatio nodi ubi Terra pergit a per-*

et subducitur posterior, ubi Terra pergit a perihelio suo ad aphelium: et contrarium fit in oppositâ orbis parte.

(^t) Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis lunaris transit per Solem, quàm ubi eadem ad rectos est angulos cum lineâ Terram et Solem jungente: et propterea orbis lunaris paulo major est in priore casu quàm in posteriore. (^u) Et hinc oritur alia æquatio motûs medii lunaris, pendens a situ apogæi Lunæ ad Solem, quæ quidem maxima est cùm apogæum Lunæ versatur in octante cum Sole; et nulla cùm illud ad quadraturam vel syzygias pervenit: et motui medio additur in transitu apogæi Lunæ a Solis quadraturâ ad syzygiam, et subducitur in transitu apogæi a syzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam semestrem vocabo, in octantibus apogæi, quando maxima est, ascendit ad 3'. 45". circiter, (^x) quantum ex phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis

helio suo ad aphelium; motus apogæi Lunæ est progressivus, motus verò nodi est retrogradus; Terrâ autem a perihelio procedente uterque motus major fit motu medio, inde ergo plus procedit apogæum Lunæ, quàm per motum medium, plus recedit nodus, prior ergo æquatio addenda, posterior detrahenda.

(^t) * Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis lunaris transit per Solem, &c. Facile deducitur ex Cor. Theor. IV. calculi primi (pag. 66.) quod (existente x distantia Lunæ a Terrâ, r ejus distantia mediocri, et y sinu ejus distantie a quadraturâ, existente etiam F vis Solis in Terram in mediocri ejus distantia a) actio Solis Lunam trahentis secundum directionem radii orbitæ lunaris est $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times (\frac{3}{r} \frac{y}{y} - r)$.

Unde ea vis, Lunâ in quadraturis existente, fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times -r$, est ergo negativa et Lunam ad Terram attrahit; cùm verò Luna est in syzygiis, ea actio Solis fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times 2r$, est itaque positiva et Lunam a Terrâ distrahit; in locis autem similibus hæ Solis actiones sunt ut distantie x Lunæ a Terrâ. Hinc si apsides sint in syzygiis, sit verò Luna in quadraturis, ubi per actionem Solis ad Terram trahitur, ambæ distantie x Lunæ in utrâque quadraturâ positæ sunt simul æquales lateri recto orbitæ lunaris; cùm verò Luna est in syzygiis ubi per actionem Solis a Terrâ distrahitur, ambæ distantie x Lunæ in conjunctione et oppositione positæ sunt simul æquales axi majori, qui semper superat latus rectum.

Si verò apsides sunt in quadraturis, et Luna etiam in quadraturis, ambæ distantie x Lunæ in

utrâque quadraturâ positæ, simul sumptæ, sunt æquales axi majori, et cùm Luna est in syzygiis, ambæ distantie x Lunæ in conjunctione et oppositione positæ, sunt simul æquales lateri recto orbitæ lunaris.

Ergo cùm apsides sunt in syzygiis, actio Solis quæ Lunam ad Terram attrahit, est minor, et contra actio quæ Lunam a Terrâ distrahit est major quàm cùm apsides sunt in quadraturis, ideòque orbis lunaris paulo major fieri debet in priore casu quàm in posteriore.

De punctis autem inter quadraturas et syzygiis intermediis ab eo quod in his punctis extremis evenit, judicari potest, sed potissimum ex calculo quo æquatio ex hac causâ nata determinatur.

(^u) * Et hinc oritur alia æquatio motus medii lunaris, &c. Hujus æquationis calculum ejusque leges explicatas habes Probl. VI. calculi secundi (pag. 82.) ejusque Corollaris.

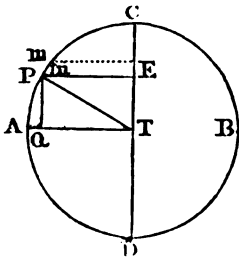
(^x) * Quantum ex phænomenis colligere potui, &c. Ex Coroll. 5. Probl. VI. (pag. 82.) æquatio hæc 3'. 56". est reperta, quædam autem causæ sunt cur hæc quantitas pro verâ quantitate adhiberi nequeat, sed hæc æquatio ex phænomenis sit colligenda; primò, quantitas f sive excentricitas orbitæ lunaris satis certo non est cognita, ut constat ex iis quæ de excentricitate dicta sunt, hic autem mediocrem excentricitatem assumpimus 5505 partium quarum radius orbitæ sit 100000 cum Newtono quam Cassinus facit tantum 5430 partium, et forte minor assumi deberet si attendatur ad excentricitatem orbitæ lunaris, qualis ea foret citra Solis actionem, ex quibus considerationibus, liquet æquationem inventam minorem factum iri quàm 3'. 56"., siquæ magis accessuram ad æquationem 3'. 45". quæ ex phænomenis colligitur: secundò cùm varias hypotheses assumpserimus, verò quidem proximam, non tamen veras absolutè, ut liquet ex Cor. I. Probl. I. (pag. 80.) ex iis erroribus ipsæ quan-

distantiâ a Terrâ. (7) Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione distantie Solis inversè; ideòque in maximâ Solis distantia est 3'. 34". et in minima 3'. 56". quamproximè: ubi verò apogæum Lunæ situm est extra octantes, evadit minor; (8) estque ad æquationem maximam, ut sinus duplæ distantie apogæi Lunæ a proximâ syzygiâ vel quadraturâ ad radium.

(9) Per eandem gravitatis theoriâ actio Solis in Lunam paulo major est ubi linea recta per nodos Lunæ ducta transit per Solem, quàm ubi linea illa ad rectos est angulos cum rectâ Solem ac Terram jungente.

titates absolutæ mutantur, sed manent earum proportionibus ex quibus leges æquationum pendunt, ita ut datâ aliquâ ex æquationibus per phænomena, reliquæ satis tuto exinde deduci queant.

(7) * Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione distantie Solis inversè. Probl. VI. (pag. 82.) hæc æquatio inventa est $\frac{15 A \times F q^3 f^2}{109.73 \times S.V.ar^3}$ $\times - 163.595$ P Q T, in quâ expressione a representat mediocrem Solis a Terrâ distantiam,



in aliâ itaque a Sole distantia loco a ponatur X, et loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$ quia vis Solis F est inversè ut quadrata distantiarum, hac ergo substitutione factâ æquatio fit $\frac{15 A a^2 F q^3 f^2}{109.73. S. V X^2. X r^3}$

$\times - 163.595$ P Q T tum loco $\frac{F}{V}$ substituitur $\frac{a M^2}{r A^2}$ (ut liquet ex Cor. Probl. I. calculi primi,

pag. 70.) æquatio evadit $\frac{15 M^2 a^3 q^3 f^2}{109.73 S. A. X^3 r^3}$

$\times - 163.595$ P Q T, et quia in octantibus est P Q T = $\frac{1}{2} r^2$ æquatio est $\frac{15 \times 163.595 \times M^2 a^3 q^3 f^2}{4 \times 109.73 + S. A X^3 r^3}$, in quâ cum nulla sit variabilis quantitas præter X^3 in denominatore occurrente, liquet æquationem cum apogæum est in octantibus, hoc est æquationem maximam esse ut X^3 inversè, hoc est augeri ac diminui in triplicatâ ratione distantie Solis X inversè; ideòque, &c.

Scilicet positâ excentricitate orbitæ Telluris .016 $\frac{1}{2}$, distantia maxima est $1 + .016\frac{1}{2}$, dis-

tantia mediocris 1, et distantia minima $1 - .016\frac{1}{2}$, itaque sumendo rationem triplicatam mediocris et maximæ distantie fiat ut $1 + 3 \times .016\frac{1}{2} + 3 \times .000285\frac{1}{2}$, &c. (1.0516) ad 1, ita 3'. 45". ad quartum qui erit 3'. 34". et sumendo rationem triplicatam inversam mediocris et minimæ distantie fiat ut $1 - 3 \times .016\frac{1}{2} + 3 \times .000285\frac{1}{2}$, &c. (.950197) ad 1 ita 3'. 45". ad quartum qui erit 3'. 56".

(8) * Estque ad æquationem maximam. Si quidem in quâcumque distantia Terræ a Sole, hæc æquatio est $\frac{15 M^2 a^3 r^3 f^2}{109.73 S. A. X^3 r^3} \times - 163.595$ P Q T, liquet quod supponendo distantiam X non variari, hæc æquatio erit ubique ut P Q T; in octantibus autem P Q T est $\frac{1}{2} r^2$, hinc in quovis loco hæc æquatio est ad eam quæ in octantibus obtineretur, manente eadem distantia Solis a Terrâ ut P Q T ad $\frac{1}{2} r^2$, sive quia P Q T est $\frac{1}{2} x y$ ut $\frac{1}{2} x y$ ad $\frac{1}{2} r^2$, et utrumque ducendo per $\frac{4}{r}$ ut $\frac{2 x y}{r}$ ad r , sed $\frac{2 x y}{r}$ est si-

nus duplæ distantie puncti P, hoc est apogæi a syzygiâ, aut a quadraturâ (perinde enim est ut ex trigonometriæ principiis liquet) hinc æquatio in quovis situ apogæi extra octantes est ad æquationem maximam quæ obtineretur in octantibus manente eadem distantia Telluris a Sole, ut sinus duplæ distantie apogæi Lunæ a proximâ syzygiâ, ad radium.

(9) * Per eandem, &c. Cùm linea recta per nodos ducta transit per Solem, tunc Sol versatur in plano ipsius orbitæ lunaris producto, ejus itaque actio non consumitur in dimovendâ Lunâ ab eo plano, sed tota impenditur ad eam vel a Terrâ distrahendam, vel ad Terram attrahendam, vel ad eam accelerandam aut retardandam in proprio suo plano; cùm autem linea nodorum est ad angulos rectos cum rectâ Solem ac Terram jungente, tunc Sol maxime discedit a plano orbitæ lunaris, hinc pars ejus actionis consumitur in admovendo plano orbitæ lunaris ad eclipticam, et per residuum duntaxat ejus actionis Lunæ errores in longum producit; hinc priori casu actio Solis in Lunam paulo major est quàm in posteriore, partem autem actionis Solis residuam sublata eâ ejus parte quæ in plano orbitæ lunaris dimovendo consumitur, ad calculum vocamus Probl. I. calculi tertii (pag. 84).

(b) Et inde oritur alia medii motûs lunaris æquatio, quam semestrem secundam vocabo, quæque maxima est ubi nodi in Solis octantibus versantur, et evanescit ubi sunt in syzygiis vel quadraturis, et in aliis nodorum positionibus proportionalis est sinni duplæ distantie nodi alterutrius a proximâ syzygiâ aut quadraturâ: (c) Additur verò medio motui Lunæ, si Sol distat a nodo sibi proximo in antecedentia, subducitur si in consequentia; et in octantibus, ubi maxima est, ascendit ad 47". in mediocri Solis distantia a Terrâ, (d) uti ex theoriâ gravitatis colligo.

(b) * Et inde oritur alia medii motûs lunaris æquatio. Hujus æquationis quantitatem et leges Probl. III. calculi tertii (pag. 85.) exposuimus, illamque $\frac{3 A. F. l^2}{8 S. V. ar^2} \times \frac{2 n m}{r}$ invenimus, sumendo l pro sinu inclinationis orbitæ, et n et m pro sinu et cosinu distantie nodorum a syzygiâ. Hinc cum $\frac{2 n m}{r}$ sit sinus duplæ distantie nodi a syzygiâ, cæteri verò termini sint constantes, hæc æquatio est maxima ubi nodi in Solis octantibus versantur, et evanescit ubi sunt in syzygiis vel quadraturis et in aliis nodorum positionibus proportionalis est sinni duplæ distantie nodi a syzygiâ, &c.

(c) * Additur verò medio motui Lunæ, si Sol distat a nodo sibi proximo in antecedentia, subducitur si in consequentia. Ex actione Solis in Lunam, Luna retardatur, ex diminutione verò ejus actionis propter obliquitatem plani orbitæ, lunaris, diminuitur hæc Lunæ retardatio, hoc est acceleratio quædam oritur respectu motûs, qui, omiſsa hac consideratione, fuerat determinatus; mediocris acceleratio hinc nata, et quæ includitur in medio motu Solis est

ubique $\frac{3 A. F. l^2}{2 S. V ar^2} \times \frac{r u}{2}$, vera au-

tem acceleratio est $\frac{3 A. F. l^2}{2 S. V ar^2} \times$

ANQ. Unde æquatio est $\frac{3 A. F. l^2}{2 S. V ar^2}$

$\times (\frac{r u}{2} - A N Q)$ per Probl. III.

calculi tertii (pag. 85, et seq.) jam

itaque si $\frac{r u}{2}$ sit major quàm A N Q

quod evenit in toto quadrante A N C, acceleratio mediocris est major verâ, et Luna magis processisse censetur quàm revera processit, hinc ista dif-

ferentia $\frac{3 A. F. l^2}{2 S. V. ar^2} \times (\frac{r u}{2} - A N Q)$ debet detrahi ex ejus loco invento ut verus locus habeatur, in hoc autem casu Sol qui puncto A respondere censetur, est in consequentia respectu nodi N.

Dum verò N versatur inter C et B, et n inter A et D, tunc $\frac{r u}{2}$ est minor quàm A N Q, sic itaque acceleratio mediocris est minor quàm

acceleratio vera, ideòque differentia $\frac{3 A. F. l^2}{2 S. V. ar^2}$

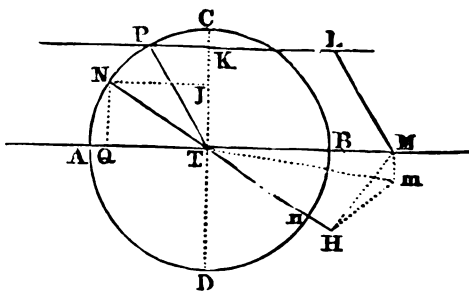
$\times (\frac{r u}{2} - A N Q)$ addi debet loco medio Lunæ, tunc autem Sol in A est in antecedentia respectu nodi proximi n.

3. Dum N versatur inter B et D et n in A et C $\frac{r u}{2}$ excedit A N Q; sive motus mediocris excedit verum; subduci itaque debet differentia, est verò in eo casu Sol in A in consequentia respectu nodi n.

Denique dum N est inter D et A, $\frac{r u}{2}$ minor est quàm A N Q, addi itaque debet æquatio loco medio Lunæ, et Sol est in antecedentia respectu nodi N.

Ergo æquatio subducitur ex medio motu Lunæ cum Sol est in consequentia respectu nodi proximi, additur verò ei motui cum Sol est in antecedentia.

(d) * Uti ex theoriâ colligo. Calculus noster Coroll. Probl. III. contentus, æquationem maxi-



mam 45".6 exhibet, qui numerus est adeo proximus numero 47". quem ex theoriâ gravitatis collegit Newtonus, ut credere facile sit ipsum hunc numerum ex theoriâ gravitatis collegisse eâ proximè ratione quæ in calculo (pag. 85.) adhibetur, differentiola enim ista oriri potest ex eo quod, vel angulum inclinationis orbitæ, vel quantitatem M mensis periodici citra actionem Solis considerati, paulo majorem fecerit quàm nos.

(^e) In aliis Solis distantis hæc æquatio maxima in octantibus nodorum est reciproce ut cubus distantie Solis a Terrâ, ideòque in perigæo Solis ad 49". in apogæo ejus ad 45". circiter ascendit.

(^f) Per eandem gravitatis theoriam apogæum Lunæ progreditur quam maximè ubi vel cum Sole conjungitur vel eidem opponitur, et regreditur ubi cum Sole quadraturam facit. (^g) Et eccentricitas fit maxima in priore casu et minima in posteriore, per Corol. 7, 8, et 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ sunt, et æquationem principalem apogæi generant, quam semestrem vocabo.

(^h) Et æquatio maxima semestris est 12^{gr}. 18'. circiter, quantum ex observationibus colligere potui. Horroxius noster Lunam in ellipsi circum Terram, in ejus umbilico inferiore constitutam, revolvi primus statuit. Halleius centrum ellipseos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. (ⁱ) Et ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progressu et regressu apogæi et quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur distantia mediocris Lunæ a Terrâ in

(^a) * In aliis Solis distantis. Eadem plane est demonstratio ac in notâ (^f) præcedente; cum

æquatio fit $\frac{3 A F l^2}{8 S V a r} \times \frac{2 n m}{r}$ in diversâ Solis a Terrâ distantia X, loco F, $\frac{a^2 F}{X^2}$, loco $\frac{F a M^2}{r A^2}$, æquatio evadit $\frac{3 M^2 a^2 l^2}{8 A. S. X^3 r^2}$ $\times \frac{2 n m}{r}$ et in octantibus quia $\frac{2 n m}{r} = r$, æqua-

tio est $\frac{3 M^2 a^2 l^2}{8 A. S. X^3 r}$, ideòque æquationes in octantibus in diversâ Solis a Terrâ distantia, sunt inter se inversæ ut X³, si fiat itaque ut cubus maximæ distantie Terræ a Sole qui est 1.0516, ad cubum 1 mediocris distantie, ita 47". æquatio pro mediocri distantia inventa erit ad 45". circiter, eaque erit æquatio in maximâ distantia Solis a Terrâ, et ut .950107 cubus minimæ distantie ad 1, ita 47". ad 49". circiter, quæ erit æquatio maxima cum Sol erit in perigæo. Eadem etiam ratione ac in notâ (^e) ostendetur quomodo in quavis Solis a Terrâ distantia, et in quavis positione nodi respectu Solis æquatio obtineri debeat.

(^f) * Per eandem gravitatis theoriam apogæum Lunæ progreditur quam maximè, &c. Per methodum ex ipsa Newtoni Principiis derivatam invenimus (pag. 86. et seq.) motum apsidis esse ut 3 y y — r r, sumendo y pro sinu distantie apsidis a quadraturâ; is ergo motus, juxta hunc calculum, evanescit cum y $\sqrt{3} = r$, cum nempe y est sinus arcus 35^{gr}. 15', positivus verò est in syzygiis; illic enim fit 3 y y — r r = 2 r r negativus in quadraturis; illic enim est 3 y y — r r = — r r.

(^g) * Et eccentricitas fit maxima in priori casu, cum nempe apsides sunt in syzygiis, et minima

in posteriore, cum nempe apsides sunt in quadraturis. Id utique statuitur toto calculo de excentricitate orbitæ lunaris superius pag. 91. et seq. tradito.

(^h) * Et æquatio maxima semestris, &c. Hanc ex observationibus determinandam liquet cum non satis feliciter obtineatur absoluta quantitas motus apogæi per calculos secundum Newtoniana Principia institutos; methodus autem a nobis indicata est admodum incompleta et rudis, et in ea multa, quæ considerari debuissent, sunt omissa: hinc cum in cæteris motibus Lunæ et æquationibus ad votum succedat theoria Newtoniana, in hoc casu aliquid adhuc desiderari, fatendum est.

(ⁱ) * Et ex motu in epicyclo. Ingeniosè et feliciter conjunctas esse unicâ constructione geometricâ excentricitatis variationes, et motus apogæi æquationes, ex iis quæ de excentricitate dicta sunt pag. 94. intelligi potest; illic enim ostenditur quod si T C sit excentricitas media f, C B maxima excentricitatis variatio ab excentricitate mediocri, B F arcus duplus distantie apsidis a syzygiâ, tunc linea T F est excentricitas, ostenditur verò, Probl. II. pag. 95. variationem maximam excentricitatis quæ est A B tam ex observationibus quam consentiente calculo sumi posse 1172 partium quarum radius orbitæ lunaris est 100000 et excentricitas T C 5505, simul autem cum constet ex observationibus æquationem semestrem apogæi 12^{gr}. 18'. esse, ejus anguli sinus est partium 1172 radio existente partium 5505, ut liquet si fiat ut radius 100000 ad sinum anguli 12^{gr}. 18'. qui est 21303 ita 5505 ad quartum qui est 1172½; hinc illum numerum pro maximâ variatione excentricitatis elegit Halleius, quia non procul est ab iis quos et observationes et calculus indicant, simulque est

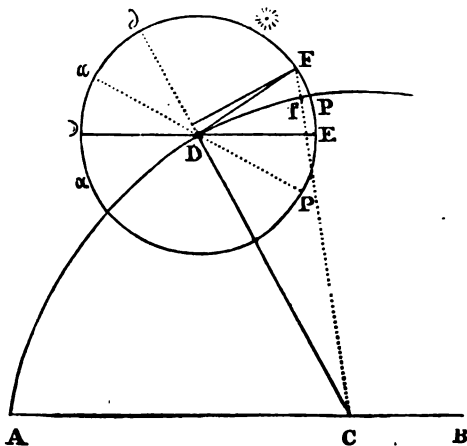
a Sole inversè. Ut idem adhuc velociùs moveatur in ratione simplici distantiae inversè, ab orbis centro D agatur recta D E versus apogæum Lunæ seu rectæ T C parallela, et capiatur angulus E D F æqualis excessui argumenti annui prædicti supra distantiam apogæi Lunæ a perigæo Solis in consequentia; ^(a) vel quod perinde est, capiatur angulus C D F æqualis complemento anomalie veræ Solis ad gradus 360. Et sit D F ad D C ut dupla eccentricitas orbis magni ad distantiam medio-crem Solis a Terrâ, et motus medius diurnus Solis ab apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab apogæo proprio conjunctim, id est, ut $33\frac{1}{2}$ ad 1000 et $52'. 27''. 16'''$. ad $59'. 8''. 10'''$. conjunctim, sive ut 3 ad 100. Et concipe centrum orbis Lunæ locari in puncto F, et in epicyclo, cujus centrum est D, et radium D F, interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentiâ circuli D A B D. ^(o) Hâc enim ratione

mentum annuum, fingatur apsidem immotam esse, Solem verò moveri, pendebit arcus B F ex motu Solis fietque major quo celerius Sol movebitur, sed motus Solis est inversè in ratione duplicatâ distantiarum Terræ a Sole (notâ o) ergo motus puncti F ex hac consideratione sequitur rationem inversam duplicatam distantiae Terræ a Sole.

⁽ⁿ⁾ * Vel quod perinde est. Si circa punctum D radio D F describatur circulus E F \odot d α γ P; in quo fit E Lunæ apogæum e centro D spectatum; γ Lunæ perigæum, α apogæum Solis, P Solis perigæum, \odot locus Solis, cum ex constructione sit d D E = D C B, idèque duplum argumenti annui, sive duplum distantie \odot E, erit E D C æqualis semi-circulo dempto 2 \odot E, sive erit $\frac{1}{2} c - 2 \odot E$; itaque si ei arcui E D C addatur E D F æqualis annuo argumento demptâ distantia apogæi Lunæ a perigæo Solis, sive $\odot E - P E$, fiet C D F = $\frac{1}{2} c - \odot E - P E$, sed cum $\frac{1}{2} c$ sit æqualis distantie perigæi Solis ab ejus apogæo, erit $\frac{1}{2} c = P E \odot \alpha$, ex quo itaque detracto P E et E \odot , est C D F = $\odot \alpha$ sive distantie Solis ab apogæo in antecedentia, aut quod idem est complemento ad 360° . arcus α γ P E F \odot , qui arcus est distantia Solis ab apogæo suo, in consequentia sumpta, quæ est Solis anomalia verâ.

Si punctum P foret in consequentia respectu puncti E, tunc E D F faciendus esset æqualis argumento annuo additâ distantia perigæi Solis a Lunâ, sicque fieret C D F = $\frac{1}{2} c - \odot + P E$ et quoniam in eo casu est $\frac{1}{2} c = P \odot \gamma \alpha$, et $-\odot E + P E = -P \odot$, erit C D F = $\odot \gamma \alpha$, sive erit distantia Solis ab apogæo in antecedentia posito, hoc est, complementum ad 360° . arcus α γ P E F \odot , qui arcus est distantia Solis ab apogæo suo in consequentia sumpta, quæ est Solis anomalia verâ.

^(o) * Hâc enim ratione. Æquationem hujus motus centri orbis lunaris quæ adhibenda est ut



moveatur velocius quàm per primam constructionem, idque in simplici ratione distantie inversè esse proportionalem æquationi centri Solis, constat eadem demonstratione quâ in notis ^(m) et ⁽ⁿ⁾ pag. 96. de æquationibus annuis apogæi et nodi idem probatum fuit.

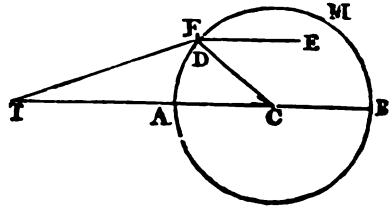
Dicatur a mediocri distantia Terræ a Sole, quævis alia distantia dicatur $a \pm x$, motus medius centri orbis lunaris in distantia a fit o, et quia ille motus est in triplicatâ ratione distantie Solis a Terrâ inversè, in aliâ quavis distantia

Terræ a Sole erit $\frac{a^3}{a \pm x^3}$, o et formando seriem,

erit $o \mp \frac{3x}{a} o$, sed si fingeretur eum motum acqui proportionem inversam duplicatam distan-

velocitas, quâ centrum orbis Lunæ in lineâ quâdam curvâ circum centrum C descriptâ movebitur, erit reciproce ut cubus distantie Solis a Terrâ quamproximè, ut oportet.

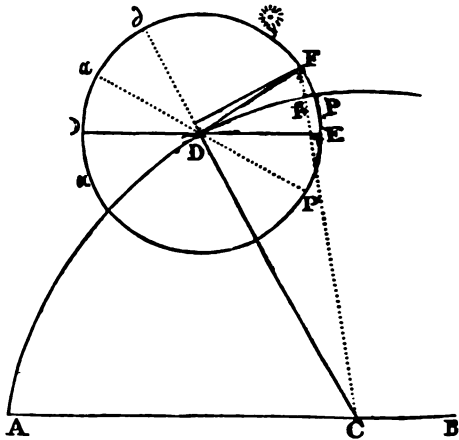
Computatio motûs hujus difficilis est, sed facilius reddetur per approximationem sequentem. Si distantia mediocris Lunæ a Terrâ sit partium 100000, et eccentricitas T C sit partium 5505 ut supra: recta C B vel C D invenietur partium 1172½ et recta D F partium 35½. Et hæc recta ad distantiam T C subtendit angulum ad Terram quem translatio centri orbis a loco D ad locum F generat in motu centri hujus: et eadem



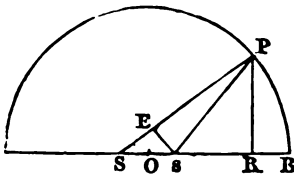
tiarum, inveniretur is motus singulis in locis o $\mp \frac{2x}{a}$ o, et ita assumptus fuerat in primâ constructione (vid. not. (m) præced.), ergo singulo in loco error commissus per hanc fictionem foret $\mp \frac{x}{a}$ o; pariter si Solis motus medius dicatur m ostensum est (not. (n) pag. 96, 97.) differentiam inter motum medium et verum esse $\mp \frac{2x}{a}$ m; ideó-

que cùm ratio $\mp \frac{x}{a}$ o ad $\mp \frac{2x}{a}$ m, sit in singulis punctis x eadem, æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a}$ o orta erit proportionalis

æquationi ex $\mp \frac{2x}{a}$ m ortæ, hoc est erit proportionalis æquationi centri Solis; sed æquatio centri Solis est quamproximè proportionalis sinui anomalie Solis not. 372. Lib. I. nam illic demonstratur quod si ex utroque foco S et s orbitæ Solis ducantur lineæ ad punctum P, erit B s P ano-



æquationis Solis, sive ad ipsam æquationem, nam in parvis angulis, arcus pro sinibus sumi possunt. Hinc sinus anomalie veræ est ad æquationem centri Solis in ratione datâ radii nempe ad duplam excentricitatem; hinc itaque, æquatio orta ex errore $\mp \frac{x}{a}$ o, erit ut sinus anomalie Solis, sed angulus C D F est complementum ejus anomalie ad 360°. sinus autem arcus aliqujus et sinus ejus complementi ad 360°. sunt unum et idem, ergo æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a}$ o



malia media, et B S P anomalie veræ, ideóque angulus S P s erit æquatio, ducatur ergo ex s in S P perpendiculum s E et ex P perpendiculum P R, ob similitudinem triangulorum S s E et s P R erit, S P ad P R ut S s ad s E, sive sumendo S P pro radio constanti (quod est proximè verum) erit, ut radius ad sinum anomalie veræ, ita dupla excentricitas ad sinum

nata est proportionalis sinui angulorum C D F, et si sumatur radius D F æqualis æquationi maximæ hinc natæ, ceteri omnes sinus angulorum C D F erunt ipsæ æquationes in datâ Solis anomalîâ, si itaque sumantur a puncto D arcus D f in circulo B D A æquales illis sinibus, erit f verus locus centri orbitæ lunaris, et quia ob exiguitatem horum sinuum respectu radii C D,

recta duplicata in situ parallelo ad distantiam superioris umbilici orbis Lunæ a Terrâ, subtendit eundem angulum, quem utique translatio illa generat in motu umbilici, et ad distantiam Lunæ a Terrâ (*) subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu Lunæ, quique propterea æquatio centri secunda dici potest. Et hæc æquatio, in mediocri Lunæ distantia a Terrâ, est ut sinus anguli, quem recta illa D F cum rectâ a puncto F ad Lunam ducta continet quamproximè, et ubi maxima est, evadit 2'. 25". (†) Angulus autem quem recta D F et recta a puncto F ad Lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum E D F ab anomalia media Lunæ, vel addendo distantiam Lunæ a Sole ad distantiam apogæi Lunæ ab apogæo Solis. Et ut radius est ad sinum

lineæ per C et f ducta cadit etiam in F, sumi potest F ut verus locus centri orbitæ lunaris.

Invenitur autem æquatio maxima orta ex errore

$\mp \frac{x}{a} o$; si attendatur quod Solis motus est ubi-

que $m \mp \frac{2x}{a} m$, sive $m \mp \frac{x}{a} \times 2 m$ ideoque

summam omnium errorum ex errore $\frac{x}{a} o$ fore

ad summam omnium errorum in Solis motu genitorum ut o ad 2 m, sive æquationem quæsitam esse ad æquationem Solis ut est motus centri orbitæ lunaris per circulum B D A ad duplum motum medium Solis respectu sui apogæi, sed quoniam arcus B D sunt semper dupli distantie Solis ab apogæo Lunæ, motus diurnus centri orbis lunaris per circulum B D A est etiam duplus motus Solis ab apogæo Lunæ, hinc æquatio quæsitæ est ad maximam æquationem Solis ut est radius D C ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ et ut duplus motus diurnus Solis ab apogæo Lunæ ad duplum motum diurnum Solis ab apogæo suo conjunctim, maxima autem Solis æquatio est ipsa dupla excentricitas orbis magni, hinc æquatio quæsitæ sive radius D F est ad duplam excentricitatem ut D C ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ, et ut motus diurnus Solis ab apogæo Lunæ ad motum diurnum Solis ab apogæo suo conjunctim, undè vicissim est etiam D F ad D C ut dupla excentricitas ducta per motum diurnum Solis ab apogæo Lunæ, ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ ductam per motum diurnum Solis ab apogæo suo.

(*) * Subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu Lunæ. Scilicet tota orbita Lunæ, ipsaque Luna per motum centri orbitæ ex D in F translata ex proprio loco mota censeri debet in locum alium per lineam ipsius D F duplam ipsique parallelam; cùm itaque distantia mediocri sit partium 100.000, si hæc linea quæ duplicata est 70.4, angulum rectum cum linea a Terrâ ducta efficiat, quo casu maximam æquationem facit, ipæ subtendit angulum 2'. 25". æquidem sinus duorum minutorum est 58.18

sinus trium 87.27. In aliis autem hujus lineæ positionibus respectu lineæ a Terrâ ductæ, anguli quos subtendit erunt ad istum ut est sinus anguli quem facit cum lineis a Terrâ ductis ad radium; nam in triangulis in quibus duæ lineæ sunt constantes, sed earum angulus variabilis, si una ex iis lineis alterius respectu sit minima, tertia linea pro constante assumi potest, est verò ad minimam lineam, ut sinus anguli variabilis ad sinum anguli oppositi minimæ lineæ; hinc sinus anguli variabilis et sinus anguli minimi sunt in ratione datâ. Ergo ut sinus anguli recti sive radius ad 2'. 25". ita sinus anguli quem facit linea a Terrâ ducta cum lineola parallela ad D F, ad angulum quo locus Lunæ mutatus cernitur.

(†) * Angulus autem quem facit linea a Terrâ ducta cum lineola parallela ad D F, et in ipso loco Lunæ posita, æqualis est illi quem facit recta D F et recta a puncto F ad Lunam ducta, saltem proximè quia F est centrum orbitæ lunaris a quo Terra non multum distat; fingatur, produci lineam D F et ex puncto F duci lineam parallelam lineæ D E, quæ ad apogæum Lunæ tendit, et ex eodem puncto F aliam duci lineam ad Lunam, angulus hujus lineæ cum lineâ D E erit anomalia media Lunæ; ergo angulus hujus lineæ cum lineâ D F producta erit differentia anguli E D F et anomalie mediæ Lunæ, sive quia erat E D F differentia argumenti annui, et distantia apogæi Lunæ a perigæo Solis si ex anomalia media Lunæ tollatur, argumentum annum superest distantie Lunæ a Sole, cui addi debet distantia apogæi Lunæ et perigæi Solis, sive (quia semi-circuli additi vel detracti non mutant valores angulorum eorumque sinuum) distantia apogæi Lunæ et apogæi Solis; cætera facile patebunt ex figuræ descriptione; exemplum esto in conjunctione ubi est ☉ locus Solis et Lunæ, liquet enim quod quando punctum ☉ est in consequentia respectu puncti F, Luna quæ transfertur per lineam parallelam lineæ D F transfertur in antecedentia; dum o contrâ, punctum ☉ est in antecedentia respectu puncti F, Luna transfertur in consequentia;

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

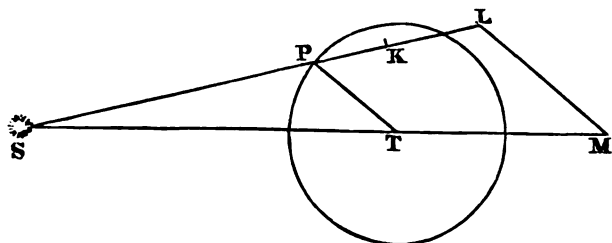
PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

SOLIS vis M L seu P T, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1. ad 638092.6. Et vis T M — L M seu 2 P K in syzygiis lunaribus



est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem Terræ, diminuuntur in ratione distantiarum a centro Terræ, id est, (*) in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideóque vis prior in superficie Terræ est ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus distant a Sole. Vi alterâ, quæ duplo major est, mare elevatur et sub Sole et in

(*) * In ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1. Quemadmodum in Prop. XXV. demonstratum est eam partem vis centripetæ lunaris in Solem quâ motus ejus circa Terram perturbatur et quæ radio orbitæ lunaris erat proportionalis, esse ad vim centripetam Lunæ in Terram in duplicatâ ratione temporum periodicorum Terræ circa Solem et Lunæ circa Terram, simili planè modo probatur eam quoque partem vis centripetæ in Solem, quæ

analogæ est radio Terræ, esse ad vim centripetam Lunæ in Terram in ratione radii Terræ ad radium orbitæ lunaris directè et ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram inversè. Quare vires Solis ad perturbandos motus corporum propè superficiem Terræ sunt ad vires Solis ad perturbandos motus Lunæ ut radius Terræ ad radium orbitæ lunaris, hoc est, ut 1 ad $60\frac{1}{2}$.

regione Soli oppositâ. (*) Summa virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90 gradibus distant a Sole, sive elevet eandem in regionibus sub Sole et Soli oppositis, hæc summa erit tota Solis vis ad mare agitandum; et eundem habebit effectum, ac si tota in regionibus sub Sole et Soli oppositis mare elevarer, in regionibus autem quæ 90 gradibus distant a Sole, nil ageret.

Hæc est vis Solis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi Sol tam in vertice loci versatur quàm in mediocri suâ distantia a Terrâ. (*) In aliis Solis positionibus vis ad mare attollendum est ut sinus versus duplæ altitudinis Solis supra horizontem loci directè et cubus distantiae Solis a Terrâ inversè.

Corol. Cùm vis centrifuga partium Terræ a diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ sub æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensurâ pedum Parisiensium 85472, ut supra in Prop. XIX.; vis solaris de quâ egimus, cùm sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideò ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 seu 1 ad 44527, (b) efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub Sole et Soli oppositis superet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus distant a Sole, mensurâ tantùm pedis unius Parisiensis et digitorum undecim cum tricesimâ parte digiti. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

(*) * Summa virium est ad vim gravitatis ut 3 ad 33604600 sive ut 1 ad 12868200.

(*) * In aliis Solis positionibus. Hæc vi aqua maximè deprimitur ubi Sol versatur in horizonte, et maximè elevatur ubi Sol in vertice loci versatur. Depressio autem et elevatio aquarum magis ac magis decrescit quo altius Sol ascendit supra horizontem, aut a vertice descendit. Præterea hæc depressio aut elevatio circa initium et finem lentius, circa medium verò celerius minuitur; sed hæc contingit successiva aquarum incrementa et decrementsa si vis maxima Solis in vertice loci exprimatur per diametrum circuli, hoc est, per sinum verum 180° . seu duplæ altitudinis Solis, supra horizontem; in aliis autem Solis positionibus vis eadem exhibeatur per sinus versos altitudinum duplicatarum; quare in variis Solis positionibus, vis ad mare attollendum sumi potest ut sinus versus duplæ altitudinis Solis supra horizontem, seclusâ tamen perturbatione quæ ex variâ Solis a Tellure distantia oritur. At vis Solis augetur vel minuitur quò propius ad Terram accedit aut longius ab eâ recedit, idque in ratione triplicatâ distantiarum inversâ (Cor.

14. Prop. LXVI. Lib. I.) considerari inque poterit vis Solis ad mare attollendum ut sinus versus duplæ altitudinis Solis supra horizontem loci directè et cubus distantiae Solis a Terrâ inversè. Cæterum tota hæc Propositio elegantè admodum calculo tractata legitur in tribus Dissertationibus quæ Vol. III. adjectæ sunt.

(b) * Efficiet ut altitudo aquæ. Quoniam et variis pendulorum observationibus et supereminè institutis gradûs meridiani mensuris sub circulo polari, Terra altior est sub æquatore quàm ex theoriâ Newtonianâ prodiit (Prop. XIX. Lib. hujus) paulò augenda erit altitudo aquæ in hoc Corollario definita. Observandum autem est Corollarium illud rigorosè verum non esse; Newtonus enim ex differentiâ diametri æquatoris et axis Terræ per simplicem proportionem colligit altitudinem aquæ ex vi Solis oriundam; uterque tamen casus est longè diversus, primus siquidem pendet a quadraturâ circuli, alter vero refertur ad quadraturam hyperbolæ (ut patet ex Cor. 2. Prop. XC. Lib. I. et not. 106. Lib. hujus). Sed quam parùm a veritate discrepet præsens Corollarium, apparet ex computo innot in Dissertatione clariss. Maclaurin, Prop. V.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim Lunæ ad mare movendum.

(^c) Vis Lunæ ad mare movendum colligenda est ex ejus proportionem ad vim Solis, et hæc proportio colligenda est ex proportionem motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii Avonæ ad lapidem tertium infra Bristolium, tempore verno et autumnali totus aquæ ascensus in conjunctione et oppositione luminarium, observante Samuele Sturmio, est pedum plus minus 45, in quadraturis autem est pedum tantum 25. Altitudo prior ex summâ virium, posterior ex earundem differentiâ oritur. Solis igitur et Lunæ in æquatore versantium et mediocriter a Terrâ distantium sunt vires S et L, et erit $L + S$ ad $L - S$ ut 45 ad 25, seu 9 ad 5.

In portu Plymuthi æstus maris ex observatione Samuelis Colepressi ad pedes plus minus sexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno et autumnali altitudo æstus in syzygiis superare potest altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus septem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia sit pedum novem, erit $L + S$ ad $L - S$ ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ seu 41 ad 23. Quæ proportio satis congruit cum priore. Ob magnitudinem æstus in portu Bristolæ, observationibus Sturmii magis fidendum esse videtur, ideoque donec aliquid certius constiterit, proportionem 9 ad 5 usurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, æstus maximi non incidunt in ipsas luminarium syzygias, sed sunt tertii a syzygiis ut dictum fuit, seu proximè sequuntur tertium Lunæ post syzygias appulsum ad meridianum loci, vel potius (ut a Sturmio notatur) sunt tertii post diem novilunii vel plenilunii, sed post horam a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadragesimam tertiam. Incidunt verò in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu Lunæ ad meridianum loci; ideoque proximè sequuntur appulsum Lunæ ad meridianum, ubi Luna distat a Sole vel ab oppositione Solis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in consequentia. Æstas et hyems maximè vigent, non in ipsis solstitiis, sed ubi Sol distat a solstitiis decimâ circiter parte totius circuitûs, seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus æstus maris oritur ab appulsu Lunæ ad

(^c) * *Vis Lunæ ad mare movendum.* Vid. noullii et Prop. IX. in Dissertatione clariss. Cap. VI. num. 10. in Dissertatione clariss. Ber. Maclaurini.

meridianum loci, ubi Luna distat a Sole decimâ circiter parte motûs totius ab æstu ad æstum. Sit distantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. ^(d) Et vis Solis in hac distantîâ Lunæ a syzygiis et quadraturis, minor erit ad augendum et ad minuendum motum maris a vi Lunæ oriundum, quàm in ipsis syzygiis et quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantîæ hujus duplicatæ seu anguli graduum 37, hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia superiore pro S scribi debet 0.7986355 S.

Sed et vis Lunæ in quadraturis, ob declinationem Lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam Luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ post quadraturas, in declinatione graduum plus minus 23. 13'. versatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare movendum diminuitur ^(e) in duplicatâ ratione sinus complementi declinationis quamproximè. Et propterea vis Lunæ in his quadraturis est tantum 0.8570327 L. Est igitur $L + 0.7986355 S$ ad $0.8570327 L - 0.7986355 S$ ut 9 ad 5.

^(f) Præterea diametri orbis, in quo Luna sine eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia Lunæ a Terrâ in syzygiis est ad distantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantîæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ a syzygiis, ubi æstus maximus generatur, et in gradu $18\frac{1}{2}$ a quadraturis, ubi æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam ut 69.098747 et 69.897345 ad $69\frac{1}{2}$. ^(g) Vires autem Lunæ ad mare movendum sunt in triplicatâ ratione distantiarum inversè, ideoque vires in maximâ et minimâ harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantîâ ut 0.9830427 et 1.017522 ad 1. ^(h) Unde fit

^(d) * Et vis Solis. Hanc viri quæ proportionem non multum a vero differre patet ex iis quæ immediatè præcedunt.

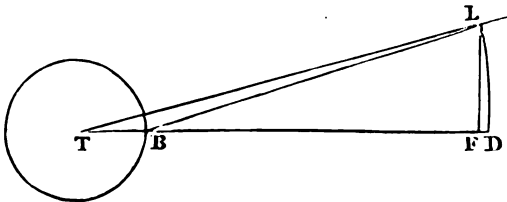
^(e) 122. * In duplicatâ ratione. Sit T B D planum æquatoris, T centrum Telluris, sitque Luna in L, erit angulus L B D, mensura declinationis ab æquatore, seu ob exiguum angulum

Luna versatur in plano æquatoris in D, est ad vim quæ eandem aquam directè a centro trahit, ubi Luna est in L, ut T L ad T F, hoc est, ut radius ad sinum complementi declinationis L T D, sepositâ vi aquæ centripetâ versus T. Sed auctâ vi illâ centripetâ, in eadem ratione minuitur vis altera aquam a centro trahens; quare, componendo, vis Lunæ in loco D, est ad vim ejus in L, ut quadratum sinus totius T L, ad quadratum sinus complementi T F, declinationis Lunæ L T D.

^(f) * Præterea diametri orbis (Prop. XXVIII. Lib. hujus).

^(g) * Vires autem Lunæ. (Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I.).

^(h) * Unde fit. Ut ex hac analogiâ vis L Lunæ colligi possit, ducenda sunt media et extrema, hæcque oriatur æquatio $1.017522 L \times 5 +$



T L B, erit declinatio illa quamproximè æqualis angulo L T D, cujus anguli cosinus est T F, sumpto T L, pro radio. Jam vis quæ aquam in loco æquatoris B, directè trahit a centro T, ubi

$0.7986355 S \times 5 = 0.9830427 \times 9 \times 0.8570327 L - 0.7986355 S \times 9$; et transponendo hæc habetur proportio $S : L = 0.9830427 \times 0.8570327 \times 9 - 0.17522 \times 5 : 0.7986355 \times 5 + 0.7986355 \times 9$

1.017522 L + 0.7986355 S ad 0.9830427 \times 0.8570327 L— 0.7986355 S
ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4.4815. Itaque cùm vis Solis sit ad
vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad
2871400.

Corol. 1. Cùm aqua vi Solis agitata ascendat ad altitudinem pedis
unius et undecim digitorum cum tricesimâ parte digiti, eâdem vi Lunæ
ascendet ad altitudinem octo pedum et digitorum $\frac{5}{8}$, et vi utrâque ad
altitudinem pedum decem cum semisse, et ubi Luna est in perigæo, ad
altitudinem pedum duodecim cum semisse et ultra, præsertim ubi æstus
ventis spirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus
excitandos abundè sufficit, et quantitati motuum probè respondet. Nam
in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in Mari Pacifico,
et Maris Atlantici et Æthiopici partibus extra tropicos, aqua attolli solet
ad altitudinem pedum sex, novem, duodecim vel quindecim. In Mari
autem Pacifico, quod profundius est et latius patet, æstus dicuntur esse
majores quàm in Atlantico et Æthiopico. Etenim ⁽¹⁾ ut plenus sit æstus,
latitudo maris ab oriente in occidentem non minor esse debet quàm gra-
duum nonaginta. In Mari Æthiopico ascensus aquæ intra tropicos minor
est quàm in zonis temperatis, propter angustiam maris inter Africam et
australem partem Americæ. In medio mari aqua nequit ascendere, nisi
ad littus utrumque et orientale et occidentale simul descendat: cùm tamen
vicibus alternis ad littora illa in maribus nostris angustis descendere
debeat. Eâ de causâ fluxus et refluxus in insulis, quæ a littoribus longis-
sime absunt, perexiguus esse solet. In portubus quibusdam, ubi aqua
cum impetu magno per loca vadosa, ad sinus alternis vicibus implendos
et evacuandos, influere et effluere cogitur, fluxus et refluxus debent esse
solito majores, uti ad Plymuthum et pontem Chepstowæ in Anglia; ad
montes S. Michaëlis et urbem Abrincatuorum (vulgo Avranches) in
Normannia; ad Cambaiam et Pegu in India Orientali. His in locis mare,
magnâ cum velocitate accedendo et recedendo, littora nunc inundat nunc
arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi et remeandi
prius frangi potest, quàm aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40,
vel 50 et amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum et vadosorum,
uti Magellanici et ejus quo Anglia circundatur. Æstus in hujusmodi
portubus et fretis per impetum cursus et recursus supra modum augetur.
Ad littora verò quæ descensu præcipiti ad mare profundum et apertum

Jam verò sumptis horumce numerorum logarith- garibus logarithmorum tabulis, prodit S ad L ut
ma, et quæsitis respondentibus numeris in vul- I ad 4.4815 quamproximâ

(¹) • Ut plenus sit æstus. (109.)

spectant, ubi aqua sine impetu effluendi et remeandi attolli et subsidere potest, magnitudo æstûs respondet viribus Solis et Lunæ.

Corol. 2. Cùm vis Lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perspicuum est quod vis illa sit longè minor quàm quæ vel in experimentis pendulorum, vel in staticis aut hydrostaticis quibuscunque sentiri possit. (*) In æstu solo marino hæc vis sensibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum est ad Solis vim consimilem ut 4.4815 ad 1, et vires illæ (per Corol. 14. Prop. LXIV. Lib. I.) sunt ut densitates corporum Lunæ et Solis et cubi diametrorum apparentium conjunctim; densitas Lunæ erit ad densitatem Solis ut 4.4815 ad 1 directè, et cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis inversè: id est (cùm diametri mediocres apparentes Lunæ et Solis sint 31'. 16½'' et 32'. 12'') ut 4891 ad 1000. (†) Densitas autem Solis erit ad densitatem Terræ ut 1000 ad 4000; et propterea densitas Lunæ est ad densitatem Terræ ut 4891 ad 4000 seu 11 ad 9. Est igitur corpus Lunæ densius et magis terrestre quàm Terra nostra.

Corol. 4. Et cùm vera diameter Lunæ ex observationibus astronomicis sit ad veram diametrum Terræ ut 100 ad 365; erit massa Lunæ ad massam Terræ ut 1 ad 39.788.

Corol. 5. (‡) Et gravitas acceleratrix in superficie Lunæ erit quasi triplo minor quàm gravitas acceleratrix in superficie Terræ.

Corol. 6. (§) Et distantia centri Lunæ a centro Terræ erit ad distantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ et Lunæ, ut 40.788 ad 39.788.

(¶) *Corol. 7.* Et mediocris distantia centri Lunæ a centro Terræ in octantibus Lunæ erit semi-diametrorum maximarum Terræ 60½ quàmproximè. Nam Terræ semi-diameter maxima fuit pedum Parisiensium 19658600, et mediocris distantia centrorum Terræ et Lunæ, ex hujus modi diametris 60½ constans, æqualis est pedibus 1187379440. Et hæc

(*) * *In æstu solo marino.* Hæc quidem vires ad movendum mare sufficiunt, sed alios effectus sensibiles producere non possunt. Etenim granum unum cum pondere granorum 4000 etiam accuratissimâ librâ comparatum sentiri vix potest, vis autem solaris est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, summaque virium Solis et Lunæ est ad eandem vim gravitatis ut 1 ad 2032890. Quare patet vires illas, licet conjunctas, multò minores esse quàm ut pondus corporis cujusvis in librâ appensi sensibilibiter augere vel minuire possint. Unde nec in experimentis pendulorum, barometrorum, vel in staticis aut hydrostaticis sensibilis edent effectus. Idem Corollarium eleganter demonstravit clariss. Eulerus num. 30. Dissertationis de Fluxu et Refluxu Maris.

(†) * *Densitas autem Solis.* (Cor. 3. Prop. VIII. Lib. hujus.)

(‡) * *Et gravitas acceleratrix.* Nam gravitas acceleratrix est ut massa directè et quadratè distantie a centro, hoc est, semi-diametri inverse (Cor. 1. Prop. LXXXV. Lib. I.) Ideoque gravitas acceleratrix in superficie Lunæ est ad gravitatem acceleratricem in superficie Terræ ut 1×13324 . ad 39.788×1000 , hoc est, ut 1 ad 3 circiter.

(§) * *Et distantia centri Lunæ.* (Gl. Lib. I.)

(¶) * *Corol. 7.* Computum eodem planè modo initur ac in Prop. IV. Lib. hujus.

distantia (per Corollarium superius) est ad distantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ et Lunæ, ut 40.788 ad 39.788: ideòque distantia posterior est pedum 1158268534. Et cùm Luna revolvatur, respectu fixarum, diebus 27, horis 7, et minutis primis $43\frac{1}{2}$; sinus versus anguli, quem Luna tempore minuti unius primi describit, est 12752341, existente radio 1000,000000,000000. Et ut radius est ad hunc sinum versum, ita sunt pedes 1158268534 ad pedes 14.7706353. Luna igitur vi illâ, quâ retinetur in orbe, cadendo in Terram, tempore minuti unius primi describet pedes 14.7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{1}{2}$ ad $177\frac{1}{2}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe Lunæ per Corol. Prop. III. Et hac vi Luna cadendo tempore minuti unius primi describet pedes 14.8538067. Et ad sexagesimam partem distantie Lunæ a centro Terræ, id est ad distantiam pedum 197896573 a centro Terræ, corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describet etiam pedes 14.8538067. Ideòque ad distantiam pedum 19615800, quæ sunt Terræ semi-diameter mediocris, grave cadendo describet pedes 15.11175, seu pedes 15, dig. 1, et lin. $4\frac{1}{4}$. Hic erit descensus corporum in latitudine graduum 45. Et per tabulam præcedentem in Prop. XX. descriptam, descensus erit paulo major in latitudine Lutetiæ Parisiorum existente excessu quasi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur per hoc computum in atitudine Lutetiæ cadendo in vacuo describent tempore unius secundi pedes Parisienses 15, dig. 1, et lin. $4\frac{1}{2}$ circiter. Et si gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur a motu diurno Terræ in illa latitudine, gravia ibi cadendo describent tempore minuti unius secundi pedes 15, dig. 1, et lin. $1\frac{1}{2}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine Lutetiæ supra ostensum est ad Prop. IV. et XIX.

Corol. 8. Distantia mediocris centrorum Terræ et Lunæ in syzygiis Lunæ est sexaginta semi-diametrorum maximarum Terræ, demptâ tricesimâ parte semi-diametri circiter. Et in quadraturis Lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est $60\frac{1}{2}$ semi-diametrorum Terræ. Nam hæ duæ distantie sunt ad distantiam mediocrem Lunæ in octantibus ut 69 et 70 ad $69\frac{1}{2}$ per Prop. XXVIII.

Corol. 9. Distantia mediocris centrorum Terræ et Lunæ in syzygiis Lunæ est sexaginta semi-diametrorum mediocrium Terræ cum decimâ parte semi-diametri. Et in quadraturis Lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est sexaginta et unius semi-diametrorum mediocrium Terræ, demptâ tricesimâ parte semi-diametri.

Corol. 10. In syzygiis Lunæ (P) parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, est 57'. 20'', 57'. 16'', 57'. 14'', 57'. 12'', 57'. 10'', 57'. 8'', 57'. 4''. respectivè.

In his computationibus attractionem magneticam Terræ non consideravi, cujus utique quantitas perparva est et ignoratur. Si quando verò hæc attractio investigari poterit, et mensuræ graduum in meridiano, ac longitudes pendulorum isochronorum in diversis parallelis, legesque motuum maris, et parallaxis Lunæ cum diametris apparentibus Solis et Lunæ ex phænomenis accuratius determinatæ fuerint: (q) licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.

PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire figuram corporis Lunæ.

Si corpus lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus et citimis et ultimis elevandum esset ad vim Lunæ, quâ mare nostrum in partibus et sub Lunâ et Lunæ oppositis attollitur, (r) ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem

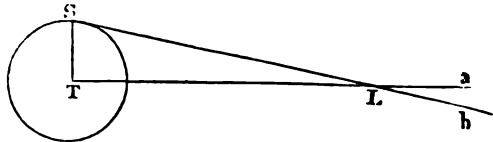
(P) 123. • *Parallaxis* Lunæ horizontalis in diversis latitudinibus seu distantis ab æquatore determinari potest. Parallaxis Lunæ horizontalis est differentia locorum in quibus Luna in horizonte posita, ex centro et superficie Terræ observata inter stellas fixas conspicitur. Hæc autem locorum distantia æqualis est angulo sub quo videretur semi-diameter Terræ ex loco Lunæ observata. Sit Luna in horizonte constituta in L; observator in superficiei terrestri loco S, Lunam inter stellas referet in b, sed idem observator in centro Terræ T positus Lunam referet in a. Est igitur differentia locorum æqualis a L b, qui æquatur angulo S L T, sub quo semi-diameter Terræ e loco Lunæ L spectatur.

Sed quoniam Terra est figuræ sphaeroidicæ, semi-diametri ejus in diversis latitudinibus inter se differunt, et est semi-diameter maxima secundum æquatorem ad minimam secundum polos, sive in latitudine 90°. ut 19658600 ad 19573000 circiter, estque earum differentia 85472 (Prop. XIX. Lib. huj.) in aliis latitudinibus differentia inter diametrum maximam et quamvis aliam est ad differentiam priorem in ratione duplicatâ sinus totius ad sinum cujusvis latitudinis quamproximè (Prop. XX. Lib. huj.) hinc in syzygiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris, hoc est, ubi distantia centrorum Lunæ et Terræ est semi-diametrorum maximarum Terræ 59.566 circiter (Cor. 8.) sub æquatore invenitur dicendo, ut est distantia Lunæ a Terrâ L S = 59.566,

ad semi-diametrum maximam T S = 1, in sinus totus ad sinum anguli T L S, qui est 57'. 20''. In aliis Lunæ locis minuitur parallaxis eadem ferè ratione ac semi-diametri Terræ, et hinc prodeunt parallaxes in latitudinibus graduum 0. 30. 38. 45. 52. 60. 90. quales a Newtono determinantur.

(q) • *Licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.* Theoriæ Newtoni de Fluxu et Refluu Maris plurima hic potuissimus adjungere, quorum ope calculos accuratius repetere licuisset. Verum materiam exhauriunt elegantissime Dissertationes quas Vol. III. addidimus.

(r) • *Ut gravitas acceleratrix.* Sit T, globus Terræ fluido satis profundo E A, co-opertus.



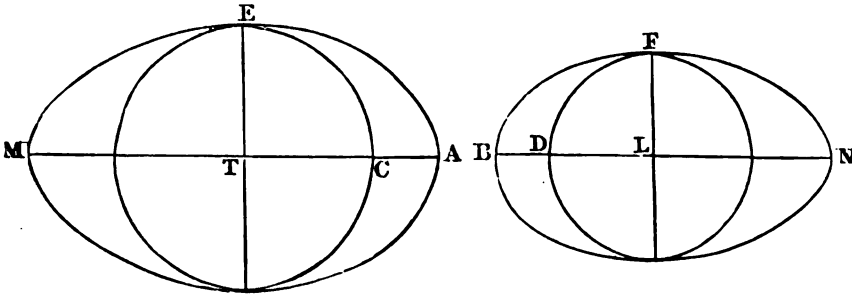
sitque L, globus Lunæ co-opertus fluido F B. Si gravitas acceleratrix Terræ in Lunam æqualis esset gravitati acceleratrici Lunæ in Terram, hoc est si æqualis esset materiæ quantitas in Lunâ et in Terrâ, globi duo T, L, sese componerent in figuras sphaeroidicas similes quarum axes M A. B N, jacerent in directum (106). Cùm enim omnia hinc inde ponantur æqualia præter ipsam molem, nulla est ratio cur figuræ illæ non sint

acceleratricem Terræ in Lunam, et diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id est, ut 39. 788 ad 1 et 100 ad 365 conjunctim, seu 1081 ad 100. Unde cùm mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes $8\frac{1}{2}$, fluidum lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes 93. Eaque de causâ figura Lunæ sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum Terræ, et superaret diametros perpendiculares excessu pedum 186. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit. Q. e. i.

Corol. ()* Inde verò fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc

inter se similes, alteraque in acutiorem sphæroidem desinat. Quare in casu præsentî, erit B L ad L F, ut T A ad T E, et vicissim B D ad A C sicut L F ad T E, hoc est, si æqualis esset gra-

meter Lunæ versùs centrum Terræ dirigitur (ex dem.) hinc fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. Positâ autem sphæroidicâ Lunæ figurâ, inter varias Lunæ partes non da-



vitas acceleratrix Terræ in Lunam atque Lunæ in Terram, altitudo fluidi lunaris in partibus proximis et remotissimis suprâ globum Lunæ, esset ad altitudinem fluidi terrestris analogam suprâ globum Terræ ut diameter Lunæ ad diametrum Terræ. Rursûs, si Terra et Luna æquales habeant diametros, erunt altitudines fluidi suprâ globos ut gravitates acceleratrices respectivè (Prop. LXXXIV. Lib. I.) Quare si neque gravitas acceleratrix in Lunam æqualissit gravitatis acceleratrici Lunæ in Terram, nec diameter Lunæ diametro Terræ æqualis, vis Terræ ad elevandum fluidum in partibus citimis et ultimis erit ad vim ipsam Lunæ quæ mare nostrum in partibus et sub Lunâ et Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam, et diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim, sive ut massa Lunæ quæ gravitati acceleratrici est proportionalis ad massam Terræ quæ itidem gravitati ejus acceleratrici est proportionalis, et ut diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim. De figurâ corporis Lunæ nova quàm plurima atque eximia habentur in Dissertationibus de Fluxu et Refluxu Maris.

(*) * Inde verò fit. Quoniam maxima dia-

bitur æquilibrium, nisi sphærois Lunæ axem suum Telluri obvertat (109); quare in alio situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium in minimo scilicet axis majoris suprâ minorem excessu, essent longè tardissimæ, adeò ut non turbetur lunaris motûs circâ axem æquabilitas, ideòque (per not. in Prop. XVII.) facies illa quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum respicere, neque statim abinde retrahi et in Terram converti.

124. Clariss. D. de Mairan in elegantissimâ Dissertatione de Motu Diurno Telluris circa Axem, quæ legitur in Monum. Paris. an. 1729. exponit admodum ingeniosè prout semper facit, cur eadem Lunæ facies in Terram continuò obvertatur, variasque explicat inæqualitates librationis lunaris in longitudinem. Conjecturam facit vir doctissimus, homogeneam non esse Lunæ materiam, sed hemisphærium inferius superiori gravius supponit; quo posito facile demonstrat Lunam respectu Telluris in situ constanti manere. Observat deinde fieri non posse ut constans maneat Lunæ positio, nisi constans quoque sit velocitas fluidi in quo Lunam ipsam deferri assumit. Sed in omni orbitâ ellipticâ

situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium essent longè tardissimæ: adeò ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in Prop. XVII. allatam) respicere, neque statim abinde retrahi et in Terram converti.

LEMMA I.

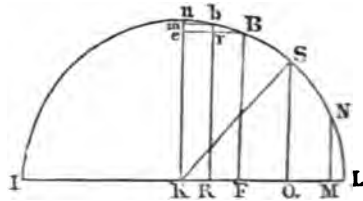
Si A P E P p Terram designet uniformiter densam, centroque C et polis P, p et æquatore A E delineatam; et si centro C radio C P describi intelligatur sphaera P a p e; sit autem Q R planum, cui recta a centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; et Terræ totius exterioris P a p A P e p E, quæ sphaera modò descripta altior est, particule singule conentur recedere hinc inde a plano Q R, sitque conatus particule cujusque ut ejusdem distantia a plano: dico primò, quod tota particularum omnium in æquatoris circulo A E, extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis et efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto A, quod a plano Q R maximè distat, consistentium vim et efficaciam, ad Terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendum, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione æquatoris et plani Q R jacentem, peragetur.

Nam centro K diametro I L describatur semi-circulus I N L. Dividi intelligatur semi-circumferentia I N L in partes innumeras æquales, et a partibus singulis N ad diametrum I L demittantur sinus N M. ⁽¹⁾ Et

vel excentricâ qualis est orbita Lunæ, variables sunt hujusce fluidi velocitates, quare Luna in eodem situ consistere non potest, sed oscillationes quasdam in longitudinem patitur; ex quibus fiet ut modò nobis detegatur aliqua pars hemispherii quod occultum esse solet, modò autem nobis abscondatur aliqua pars hemispherii quod solet esse conspicuum, idque magis vel minus contingere debet pro majori vel minori inæqualitate velocitatum fluidi. Hæc ratione explicari poterit cur lunaris librationis quantitas in longitudinem major aliquando ab astronomis observatur quàm ex Prop. XVII. Lib. hujus, prodire debet. Verùm tota hæc explicatio ad rem nostram et Newtonianum systema accommodabitur, si vorticum loco substitutur attractio, quemadmodum a clariss. Daniele Bernoullio factum est, cujus eximiam Dissertationem de Fluxu et Refluxu Maris Cap. III. consulat lector.

⁽¹⁾ 125. * Et summa quadratorum. Divisa intelligatur semi-circumferentia I N L, in particulas æquales innumeras n b, N L, N S, b B, &c. erecti-que sinus b R, N M, &c. erit sinus

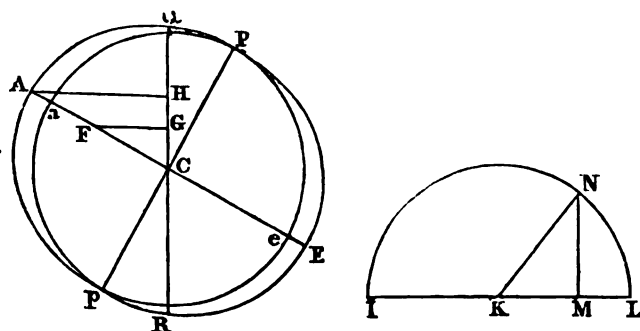
b m, seu K R, æqualis sinui N M, et ita de cæteris (Prop. XXVI. Lib. III. Elem.). Quare sinus omnes ut K R, K F, æquales erunt sinibus ut N M, S Q, ac proinde summa quadratorum ex sinibus omnibus N M, æqualis erit



summæ quadratorum ex sinibus omnibus K M. Præterea quadratum semi-diametri K N, æquale est quadratis sinuum K M, M N. Quare (ob summam quadratorum K M, æqualem summæ quadratorum N M,) summa quadratorum ex omnibus semi-diametris K N, dupla est summa

summa quadratorum ex sinibus omnibus $N M$ æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus $K M$, et summa utraque æqualis erit summæ quadratorum ex totidem semi-diametris $K N$; ideóque summa quadratorum ex omnibus $N M$ erit duplo minor quàm summa quadratorum ex totidem semi-diametris $K N$.

Jam dividatur perimenter circuli $A E$ in particulas totidem æquales, et ab earum unaquaque F ad planum $Q R$ demittatur perpendicularum $F G$,



ut et a puncto A perpendicularum $A H$. Et vis, quâ particula F recedit a plano $Q R$, erit ut perpendicularum illud $F G$ per hypothesin, et hæc vis ducta in distantiam $C G$ ^(u) erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Ideóque efficacia particulæ in loco F , erit ad efficaciam particulæ in loco A , ut $F G \times G C$ ad $A H \times H C$, ^(*) hoc est, ut $F C q$ ad $A C q$; et propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A , ut summa omnium $F C q$ ad summam totidem $A C q$, hoc est (per ^(v)) jam demonstrata) ut unum ad duo. Q. e. d.

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano $Q R$, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: ædem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem Terram, circum axem tam in plano illo $Q R$ quàm in plano æquatoris jacentem.

LEMMA II.

Iisdem positis: dico secundò quod vis et efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circulo $A E$ unifor-

quadratorum ex omnibus sinibus $N M$, ideóque summa quadratorum ex omnibus $N M$, erit duplo minor quàm summa quadratorum ex totidem semi-diametris $K N$.

^(u) • *Erùt efficacia.* (47. Lib. I.)

^(*) • *Hoc est, ob triangula $A C H$, $F C G$, similia.*

^(v) • *Per jam demonstrata.* (150.)

miter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.

Sit enim I K circulus quilibet minor æquatori A E parallelus ; sintque L, l particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum P a p e sitæ. Et si in planum Q R, (*) quod radio in Solem ducto perpendicularare est, demittantur perpendiculara L M, l m : vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum Q R, (a) proportionales erunt perpendicularis illis L M, l m. Sit autem recta L l plano P a p e parallela et bisecetur eadem in X, et per punctum X agatur N n, quæ parallela sit plano Q R et perpendicularis L M, l m occurrat in N ac n, et in planum Q R demittatur perpendicularum X Y. (b) Et particularum L et l vires contrariæ, ad Terram in contrariis partes rotandam, sunt ut $L M \times M C$ et $l m \times m C$, hoc est, ut $L N \times M C + N M \times M C$ et $l n \times m C - n m \times m C$; seu $L N \times M C + N M \times M C$ (c) et $L N \times m C - N M \times m C$: et harum differentia $L N \times M m - N M \times \overline{M C + m C}$ est vis particularum ambarum simul sumptarum ad Terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $L N \times M m$ (d) seu $2 L N \times N X$ est ad particularum duarum ejusdem magnitudinis in A consistentium vim $2 A H \times H C$, (e) ut $L X q$ ad $A C q$. Et pars negativa $N M \times \overline{M C + m C}$ seu $2 X Y \times C Y$ ad particularum earundem in A consistentium vim $2 A H \times H C$, ut $C X q$ ad $A C q$. Ac proinde partium differentia, id est, particularum duarum L et l simul sumptarum vis ad Terram rotandam est ad vim particularum duarum iisdem æqualium et in loco A consistentium ad Terram itidem rotandam, ut $L X q - C X q$ ad $A C q$. Sed si circuli I K circumferentia I K dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes $L X q$ ad totidem $I X q$ ut 1 ad 2 (per Lem. I.) atque ad totidem $A C q$, ut $I X q$ ad $2 A C q$; et totidem $C X q$ ad totidem $A C q$ ut $2 C X q$ ad $2 A C q$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli I K sunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A,

(*) * Quod radio in Solem ducto. (Per hyp. Lem. I.)

(a) * Proportionales erunt. (Per hypothes. ejusdem Lem.)

(b) * Et particularum L et l. (Ex dem. in Lem præced.)

(c) * Et $L N \times m C - N M \times m C$. Nam ob similitudinem triangulorum $L N : N M = l n : n m$, sed est $N M = n m$; quare $L N = l n$, ideoque $l n \times m C - n m \times m C = L N \times m C - N M \times m C$ et ob $m C =$

$m M + M C$, erit virium illarum differentia = $L N \times M m - N M \times \overline{M C + m C}$.

(d) * Seu $2 L N \times N X$. Nam, ob similitudinem triangulorum, est $N X = n X$, ideoque $N n$ seu $M m = 2 N X$, ac proinde $L N \times M m = 2 L N \times N X$.

(e) * Ut $L X q$ ad $A C q$. Est enim $L N : A H = L X : A C$ et $N X : H C = L N : A C$, ideoque per compositionem rationum $L N \times N X : A H \times H C = L X q : A C q$. Simili argumento patet partem negativam esse ad vim particularum earundem in A consistentium ut $C X q$ ad $A C q$.

ut $I X q - 2 C X q$ ad $2 A C q$: et propterea (per Lem. I.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli $A E$, ut $I X q - 2 C X q$ ad $A C q$.

Jam verò si sphaeræ diameter $P p$ dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem $I K$; (f) materia in perimetro circuli cujusque $I K$ erit ut $I X q$: ideóque vis materiæ illius ad Terram rotandam, erit ut $I X q$ in $I X q -$

$2 C X q$. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli $A E$ perimetro consisteret, esset ut $I X q$ in $A C q$. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circularum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi $A E$ consistentis, ut omnia $I X q$ in $I X q -$

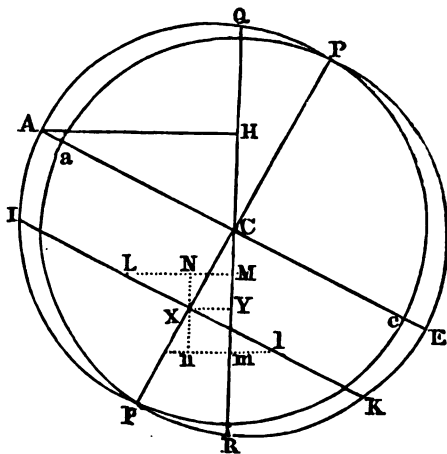
$2 C X q$ ad totidem $I X q$ in $A C q$, (g) hoc est, ut omnia $A C q - C X q$ in

$A C q - 3 C X q$ ad totidem $A C q - C X q$ in $A C q$, id est, ut omnia $A C q q - 4 A C q \times C X q + 3 C X q q$ ad totidem $A C q q - A C q \times C X q$, hoc est, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio est $A C q q -$

$4 A C q \times C X q + 3 C X q q$, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio est $A C q q - A C q \times C X q$; (h) ac proinde per methodum fluxionum, ut $A C q q \times C X - \frac{1}{2} A C q \times C X \text{ cub.} + \frac{2}{3} C X q \text{ c ad}$

$A C q q \times C X - \frac{1}{2} A C q \times C X \text{ cub.}$ id est, si pro $C X$ scribatur tota $C p$ vel $A C$, ut $\frac{2}{3} A C q \text{ c ad } \frac{2}{3} A C q \text{ c}$, hoc est, ut duo ad quinque.

$Q. e. d.$



(f) * *Materia in perimetro circuli.* Sunt enim zonæ sphaericæ similes ut quadrata radiorum.

(g) *Hoc est, ut omnia, &c.* Nam ex centro C , ad punctum I , ducta intelligatur recta CI , erit $I X^2 = C I^2 - C X^2$: sed est $C I = A C$, quare $I X^2 = A C^2 - C X^2$, ac proinde $I X q$ in $(I X q - 2 C X q) = A C q - C X q$ in $A C q - 3 C X q$.

(h) * *Ac proinde per methodum fluxionum.* Quantitates $A C q q - 4 A C q \times C X q +$

$3 C X q q$ et $A C q q - A C q \times C X q$, concipiantur multiplicatæ per fluxionem rectæ $C X$, sumptisque fluentibus, erit fluens prioris quantitatis $A C q q \times C X - \frac{1}{2} A C q \times C X \text{ cub.} + \frac{2}{3} C X q \text{ cub.}$ fluens autem posterioris quantitatis fiet $A C q q \times C X - \frac{1}{2} A C q \times C X \text{ cub.}$ et ut habeatur efficacia tota, pro $C X$ scribatur $C p$ vel $A C$, erit fluens prior ad posteriorem ut $\frac{2}{3} A C q \text{ cub.}$ ad $\frac{2}{3} A C q \text{ cub.}$

(1) LEMMA III.

Iisdem positis: dico tertiò quod motus Terræ totius circum axem jam antè descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in Terrâ ad materiam in annulo, et ratione trium quadratorum ex arcu quadrantalı circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam et numeri 925275 ad numerum 1000000.

Est enim motus cylindri circum axem suum immotum revolventis ad motum spheræ inscriptæ et simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia

(1) 126. * Lemma demonstratur. Revolutione semi-circuli A F B, et rectanguli eidem circumscripti A E D B, describantur spheræ et cylindrus circumscriptus. Sit radius C B = 1, peripheria circuli hoc ratio descripti = n, abscissa C P = x, ordinata P M = y, quælibet ipsius pars P R = v, R r = d v; peripheria circuli radio P R, descripti = n v, annulus circularis ex revolutione lineolæ R r = n v d v, velocitas puncti R = v, motus annuli prædicti = n v² d v, motus totius circuli radio P R, descripti = $\frac{1}{2}$ n v², motus circuli radio P M, descripti = $\frac{1}{2}$ n y², motus circuli radio P N descripti = $\frac{1}{2}$ n, motus cylindri totius = $\frac{2}{3}$ n.

Sit P p = d x motus annuli solidi revolutione figuræ P M m p descripti =

$$\frac{1}{3} n y^2 d x = \frac{1}{3} n d x \times (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{1}{3} n d x \times (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} n x^2 d x \times$$

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}. \text{ Undè motus solidi revolutione}$$

$$\text{figuræ C F M P, descripti} = \frac{1}{4} n \int d x$$

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} n x (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{14} n$$

$$\times C F M B = \frac{1}{32} n n, \text{ adeoque motus spheræ}$$

$$\text{totius} = \frac{1}{16} n n. \text{ Est igitur motus cylindri ad}$$

$$\text{motum spheræ ut } \frac{2}{3} n \text{ ad } 16 n n, \text{ seu ut } 16 \text{ ad}$$

$$\frac{3}{2} n, \text{ hoc est, ut quælibet quatuor æqualia qua-}$$

$$\text{drata ad tres ex circulis sibi inscriptis; nam qua-}$$

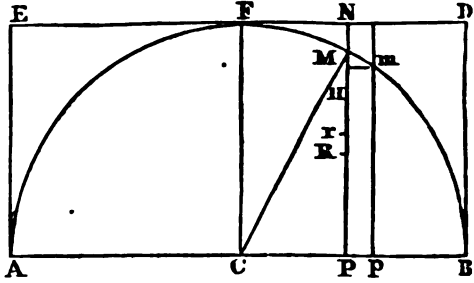
$$\text{dratum diametri 2 est } 4 \text{ et } 4 \times 4 = 16, \text{ circulus}$$

$$\text{verò cujus diameter 2, et peripheria n, est } \frac{1}{2} n \text{ et}$$

$$\text{tres hujusmodi circuli sunt } \frac{3}{2} n.$$

Materia annuli tenuissimi spheram et cylindrum ad communem eorum contactum F am-

bientis sit m, et velocitas erit ut C F, sive ut 1; adeoque motus = n, et proinde motus cylindri ad motum annuli illius est $\frac{2}{3} n$ ad m, sive ut



2 n ad 3 m, hoc est, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; basis enim cylindri est circulus $\frac{1}{2} n$ et altitudo diamet

A F = 2, ideoque cylindrus = n. Prædicti annuli materiæ sit a a n, ideoque motus ipsius circa axem cylindri = a a n. Revolvatur jam idem annulus circa proprium axem quem exhibeat diameter A B; et particula materiæ annuli respondens arcui infinitesimo M m, erit a² × M m et hujus motus a² y × M m = a² d x, ob proportionem M m : m H (d x) = C M (1) : P M (y). Quare motus partis F M, annuli est a² x, et factâ x = 1, motus quadrantis annuli = a² est motus totius annuli circa proprium axem = 4 a². Est igitur motus annuli circa axem cylindri ad ejusdem motum circa axem proprium ut a a n, ad 4 a a, seu ut n ad 4, hoc est, ut circumferentia circuli n, ad duplum diametri 4. Quamobrem motus cylindri est ad motum spheræ ut . . . 16 ad $\frac{3}{2} n$ motus annuli circa axem cylindri est ad motum cylindri ut . . . m ad $\frac{3}{2} n$ et motus annuli circa axem proprium est ad ejus motum circa axem cylindri ut . . . 4 ad n.

quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: et motus cylindri ad motum annuli tenuissimi, sphaeram et cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiae in cylindro ad triplum materiae in annulo; et annuli motus iste circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

HYPOTHESIS II.

Si annulus praedictus Terrae omni reliqua sublata, solus in orbe Terrae, motu annuo circa Solem ferretur, et interea circa axem suum ad planum eclipticae in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolueretur: idem foret motus punctorum aequinoctialium, sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materia rigida et firma constaret.

Quare, per compositionem rationum et ex aequo, motus sphaerae circa axem proprium est ad motum annuli ut n^3 ad 64 m. Est autem n^3 ad 64 m ut $\frac{2n}{3} \times \frac{5n^2}{16}$ ad $8 \times m$, sed $\frac{2n}{3}$, est quantitas materiae in Terrae; m, quantitas materiae in annulo $\frac{5n^2}{16}$ est summa trium quadratorum ex arcu quadranti circuli A F B, et 8 est summa duorum quadratorum ex diametro A B. Quare motus Terrae totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli praedicti circum axem eundem, in ratione quae componitur ex ratione materiae in Terrae ad materiam in annulo, et ratione trium quadratorum ex arcu quadranti circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro, id est, in ratione materiae ad materiam et numeri 925275 ad numerum 1000000, posita ratione diametri ad peripheriam ut 1 ad 3.141 quamproxime. Q. e. d.

127. *Lemma.* Semi-axe majori C A et minori C P, describatur semi-ellipsi P A p, atque radio C P, describatur semi-circulus P a p, circa axem P p revolvi concipiantur tum semi-circulus tum semi-ellipsi, erit sphaera motu semi-circuli genita ad sphaeroidem semi-ellipticos revolutione descriptam ut $C a^2$ ad $C A^2$. Sit $p = x$, $G e = y$, $C p = r$, $C A = a$, exprimatque $\frac{r}{p}$

rationem radii ad peripheriam, erit $\frac{p y}{r}$, peripheria circuli radio G e descripti. Praterea (ex natura ellipsos 248. Lib. I.) $C a (r) : C A (a)$

$= G e (y) : E e$, ideoque $E e = \frac{a y}{r}$, hinc

peripheria circuli radio E e descripti $= \frac{p a y}{r r}$,

ejusdemque circuli area $= \frac{p a^2 y^2}{2 r^3}$; area au-

tem circuli radio G e descripti est $\frac{p y^2}{2 r}$. Quare

fluxio sphaeroidis fit $\frac{p a^2 y^2 d x}{2 r^3}$, et fluxio sphae-

rae est $\frac{p y^2 d x}{2 r}$. Sed (ex natura circuli) y^2

$= 2 r x - x x$; hinc fluxio sphaeroidis est

$\frac{2 p a^2 r x d x - p a^2 x^2 d x}{2 r^3}$, et fluxio sphaerae

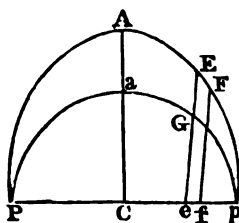
$\frac{2 p r x d x - p x x d x}{2 r}$, sumptisque fluentibus,

erit fluens prima ad alteram ut $\frac{p a^2 r x^2}{r^3} -$

$\frac{p a^2 x^3}{6 r^3}$ ad $\frac{p r x^2}{2 r} - \frac{p x^3}{6 r}$. Jam loco x, substituatur 2 r, erit sphaeroidis tota, ad totam sphaeram ut

$\frac{4 p a^2 r^3}{r^3} - \frac{8 p a^2 r^3}{6 r^3}$ ad $\frac{2 p r^3}{r} -$

$\frac{8 p r^3}{6 r}$, hoc est, ut a^2 , ad r^2 , sive in ratione



duplicata $C A^2$ ad $C a^2$. Simili argumento patet sphaeram ellipsos semi-axe majori tanquam radio descriptam esse ad ellipsoidem in ratione duplicata semi-axis majoris ad minorem.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire præcessionem æquinotiorum.

Motus mediocris horarius nodorum Lunæ in orbe circulari, ubi nodi sunt in quadraturis, erit $16''$. $35'''$. $16''$. $36'$. et hujus dimidium $8''$. $17'''$. $38''$. $18'$. (ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto sidereo $20^{\text{gr.}}$. $11'$. $46''$. Quoniam igitur nodi Lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{\text{gr.}}$. $11'$. $46''$. in antecedentia; et si plures essent Lunæ motus, nodorum cujusque (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) forent ut tempora pèriodica; si Luna spatio diei siderei juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{\text{gr.}}$. $11'$. $46''$. ut dies sidereus horarum 23. 56'. ad tempus pèriodicum Lunæ dierum 27.7 hor. 43'; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; sive Lunæ illæ se mutuo non contingant, sive liquescant et in anulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat et inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit Terræ omni P a p A P e p E quæ globo P a p e superior est; et quoniam globus iste ad Terram illam superiorem ^(k) ut a C qu. ad A C qu. — a C qu. id est (cùm Terræ semi-diameter minor P C vel a C sit ad semi-diametrum majorem A C ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; si annulus iste Terram secundùm æquatorem cingeret et uterque simul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus Lem. III.) ut 459 ad 52441 et 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223, ideóque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhærebat, et motum suum, quo ipsius nodi seu puncta æquinotialia regrediuntur, cum globo communicet: ^(l) motus qui restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; et propterea motus punctorum æquinotialium diminuetur in eâdem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinotialium corporis ex annulo et globo compositi ad motum $20^{\text{gr.}}$. $11'$. $46''$. ut 1436 ad 39343 et 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus nodi Lunarum (ut supra explicui) ^(m) atque ideò quibus puncta æquinotialia annuli regredi-

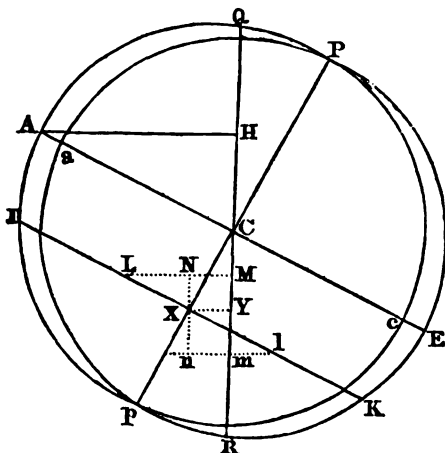
^(k) * Ut a C qu. ad A C qu. — a C qu. Globus iste est ad Terram totam ut a C² ad A C² (Lem. præced.) ideóque annulus materiæ inter globum et Terram interceptus, hoc est, excessus materiæ in Terrâ suprâ materiam in globo est ut A C qu. — a C qu.

^(l) * Motus qui restabit in annulo. (22. Lib. I.)

^(m) * Atquè ideò. (Vid. not. 101. Lib. hujus.)

untur (id est vires 3 I T in fig. p. 22. et 24.) sunt in singulis particulis ut distantiae particularum a plano Q R, et his viribus particulæ illæ planum fugiunt; et propterea (per Lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem in morem figuræ

P a p A P e p E ad superiorem
illam Terræ partem constituen-
dam spargeretur, vis et efficacia
tota particularum omnium ad
Terram circa quamvis æqua-
toris diametrum rotandam, at-
que ided ad movenda puncta
æquinocialia, evaderet minor
quam prius in ratione 2 ad 5.
Ideoque annuus æquinotiorum
regressus jam esset ad 20^{or}. 11'.
46". ut 10 ad 79092 : ac pro-
inde fieret 9^{or}. 56^{min}. 50^{sec}.



R

Cæterum hic motus (ⁿ) ob inclinationem sequatoris ad planum eclipticæ minuendus, idque in ratione $\sin 91706$ (qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$.) ad radium 100000. Quâ ratione motus iste jam fiet $9''. 7'''. 20^{iv}$. Hæc est annua præcessio æquinociorum a vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis, ut 4.4815 ad 1 circiter. (°) Et vis Lunæ ad æquinoctia movenda est ad vim Solis in eâdem proportione. Indeque prodit annua æquinoctiorum præcessio a vi Lunæ oriunda 40''. 52'''. 52^{iv}. ac tota præcessio annua a vi utrâque oriunda 50''. 00'''. 12^{iv}. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam præcessio æquinoctiorum ex observationibus astronomicis est annuatim minorum secundorum plus minus quinquaginta.

(P) Si altitudo Terræ ad æquatorem superet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quàm $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quàm ad centrum: et præcessio æquinociorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

(*) • *Ob inclinationem.* Pro majori vel minori inclinatione plani aequatoris ad planum eclipticæ minore esse vel majorem regressum æquinoctiorum patet ex not. 101. Lib. hujus. Illud autem decrementum obtinetur, si minuatür motus in ratione sinüs complementi inclinationis ad radium. Sed planum æquatoris inclinatur ad planum eclipticæ gradibus $23\frac{1}{2}$ circiter, quare cùm motus æquinoctiorum fit tardissimus, satis

accurate minuitur motus ille in ratione sinus
91706. qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$
ad radium 100000.

(°) * *Et vis Lunæ.* (Cor. 18. 19. Lib. I.)

(P) * *Si altitudo Terræ.* Quò enim altior erit materia ad æquatorem, eò levior sit oportet ut materiam quæ est versus polos in æquilibrio possit sustinere. Cæterum quia in tribus non satis laudandis Dissertationibus Vol. III. adjunctis,

Descripsimus jam systema Solis, Terræ, Lunæ, et planetarum : superes ut de cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA IV.

Cometas esse Lunâ superiores et in regione planetarum versari.

(^q) Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas supra regiones sublunares, (^r) sic ex parallaxi annuâ convincitur eorum descensus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes sub exitu apparitionis aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos et Solem ; at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos et Solem ; et justo tardiores vel retrogradi, si Terra sita est ad contrarias partes. (^s) Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in planetis, qui pro motu Terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardius progredi videntur, nunc verò celerius. Si Terra pergit ad eandem partem cum cometa, et motu angulari circa Solem tantò celerius fertur, ut recta per Terram et cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa e Terrâ spectatus ob motum suum tardiozem apparet esse retrogradus ; sin Terra tardius fertur, motus cometæ (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in

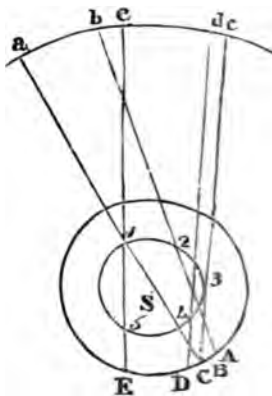
nova occurrunt quamplurima de figurâ Telluris, de viribus Solis et Lunæ, præcessionem æquinotiorum, eâdem quâ hactenus factum est, methodo, accuratius licebit computare.

(^q) * *Ut defectus parallaxeos diurnæ.* Parallaxis diurna cometæ est differentia locorum in quibus cometa ex centro Terræ, vel ex eo superficie Terræ loco ad quem cometa verticalis est, et ex quovis alio loco superficie Terræ observatus inter stellas fixas refertur. Hæc parallaxis diurna, maxima est in Lunâ, ubi ea in horizonte constituitur, inde verò magis magisque decrescit quò altius Luna suprâ horizontem elevatur. Quia verò hæc parallaxis non observatur in cometis, patet eos esse Lunâ superiores (30.).

(^r) * *Sic ex parallaxi annuâ.* Parallaxis annua ex motu circâ Solem oritur, hæcque respicit longitudinem cometæ, hoc est, distantiam ejus in eclipticâ a primo Arietis puncto. Quomodo ex hac parallaxi Newtonus colligat cometas descendere in regiones planetarum, explicabitur in decursu.

(^s) 128. * *Continget hoc maximè.* Sit S, Sol, A B E, orbita Telluris et a b c, sphaera fixarum ad quam planetæ referantur, exhibeatque, 1, 2, 3, 4, planetæ alicujus inferioris orbitam. Moveatur Terra ex A, per B, in C, et intereâ planeta

ex 1, per 2, in 3, hic planeta ex a, per b, in c, secundum ordinem signorum progredi videbitur. At si Terra moveatur ex C, per D, in E et p

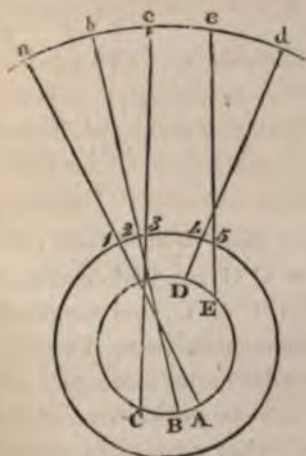


neta ex 3, per 4 in 5, idem planeta per d, in e retrogredi videbitur.

Jam verò representet 1, 2, 3 orbem planetæ

contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia cometæ in hunc modum

superioris, sitque $A B C$, orbis Terræ. Moveatur Terra ex A , per B , et C in D , planeta



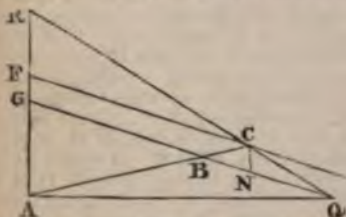
$F C$ parallela rectæ $G Q$, ipsique $Q R$ occurrens in C , erit juncta $A C$, recta quæsitæ. Nam ob parallelas $F C$, $G Q$, est $A B : B C :: A G : G F$, sed (per constr.) $G F$, $A G$, sunt in datâ ratione m ad n . Quare eandem inter se rationem habent partes interceptæ $A B$, $B C$.

Idem fit trigonometricè. Nam in triangulo $A Q G$, datur latus $A G$, et præterea noti sunt anguli $A Q G$, $Q A G$, ideoque dabitur $A G$, ac proinde innotescit etiam $G F$, datam habens rationem ad $A G$ (per constr.) quare dabitur recta $C N$ æqualis et parallela rectæ $G F$. Rursus in triangulo $Q N C$, cognitis angulo $C Q N$, et angulo $C N Q$, qui æqualis est angulo $F G N$, hoc est, anguli prius inventi $A G Q$, complemento ad duos rectos, atque insuper dato latere $C N$, innotescet $C Q$, tandem in triangulo $A C Q$, datis lateribus $Q A$, $Q C$, et angulo intercepto $A Q C$, invenientur latus $C A$ atque anguli $Q A C$, $Q C A$, id est, magnitudo et positio rectæ $A C$.

130. Lemma. Datâ positione quatuor rectis $Q A$, $Q B$, $R B$, $R D$, in eodem plano jacen-

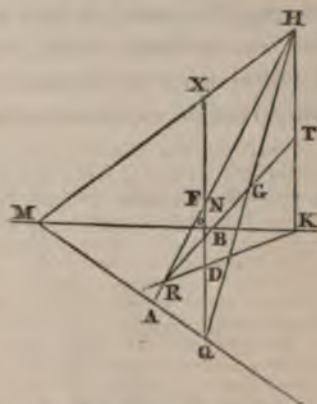
autem superior ex 1 per 2 et 3 in 4, hic planeta secundum ordinem signorum progredi videbitur. At si Terra moveatur ex D in E , planeta verò ex 4 in 5, idem planeta ex loco d in e , retrogredi apparebit. Quia verò planetæ modò in consequentia, modò in antecedentia ferri videntur, necessum est ut modò tardiores, modò celeriores appareant, atque in ipso veluti motuum æquilibrio, neque in consequentia neque in antecedentia sensibilibiter pergant, sed quasi stationarii videantur. Hæc itaque planetarum phænomena ex motu Terræ maximè contingunt, oriri tamen possunt etiam aliquantulum ex inæquali planetarum motu.

129. Lemma. Datâ positione tribus rectis $Q A$, $Q B$, $Q C$, ex eodem puncto Q ductis et in eodem plano jacentibus, ducere rectam $A C$,



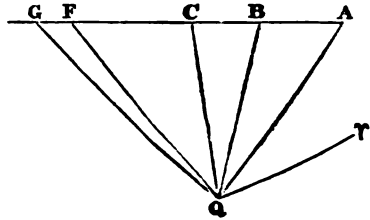
ex puncto quolibet A , ità ut partes $A B$, $C B$, sint in datâ ratione m , ad n .

Ex A ducatur utcumque recta $A R$, rectis $Q C$, $Q B$, productis occurrens in G , R , capiunturque $G F$, $A G$, in datâ ratione m ad n (Prop. XII. Lib. VI. Elem.). Per F , agatur

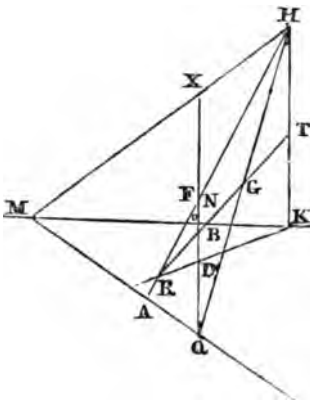


tibus ducere rectam $M K$, ità ut $M O$, sit ad $O N$ ut m ad n , et $O N$ ad $N K$ ut n ad r . Capiatur $B G$, ad $B A$, sicut $n + r$ ad m . Item capiatur $F B$ ad $B D$ ut $m + n$ ad r . Junctæ rectæ $Q G$, $R F$, producantur donec concurrant. Per punctum concursus H , ducatur $H K$ parallela rectæ $B D$; itemque $H M$, parallela rectæ $R B$, erit $M K$ recta quæsitæ. Nam propter parallelas $H M$, $T N$ (per constr.) erit $K N$ ad $N M$, ut $K T$ ad $T H$. Sed quia $H K$ parallela est rectæ $F D$, $K T$ est ad $T H$ ut $D B$ ad $B F$, hoc est, (per constr.) ut r ad $m + n$, ac proinde $K N$ est ad $N M$ ut r ad $m + n$. Rursus ob parallelas $H K$, $O X$, erit $M O$ ad $O K$ ut $M X$ ad $X H$, sed quia $H M$, parallela est rectæ $A G$, erit $M X$ ad $X H$ ut $A B$ ad $B G$, id est, (per constr.) ut m ad

colligitur. Sunto γ Q A, γ Q B, γ Q C observatæ tres longitudines cometæ sub initio motûs, sitque γ Q F longitudo ultimò observata, ubi cometa videri desinit. (*) Agatur recta A B C, cujus partes A B, B C rectis Q A et Q B, Q B et Q C interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur A C ad G, ut sit A G ad A B ut tempus inter observationem primam et ultimam ad tempus inter observationem primam et secundam, et jungatur Q G. Et si cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progredieretur, foret angulus γ Q G longitudo cometæ tempore observationis ultimæ. Angulus igitur F Q G, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra et cometa in contrarias partes moventur, additur angulo γ Q G, et sic motum apparentem cometæ velociorem reddit: sin cometa pergit in easdem partes cum Terrâ, eidem subducitur, motumque cometæ vel tardiolem reddit, vel forte retrogradum; (b) uti modò exposui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, et idcirco pro parallaxi cometæ meritò habendus est, neglecto videlicet ejus incremento



$n + r$. Est igitur M O ad O K ut r ad $m + n$. Quare, dividendo et ex æquo, tres rectæ M O,



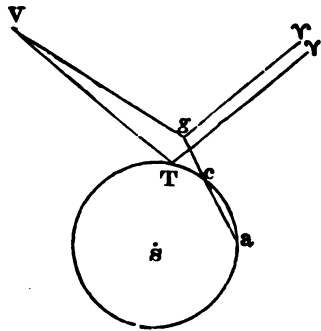
O N, N K, sunt in eadem ratione cum tribus quantitativibus m , n , r . Idem fit trigonometricè. Nam rectarum quatuor datarum Q A, Q B, R B, R D, dantur intersectiones omnes ac proindè rectæ Q B, D B, R B, B A, R D, sunt magnitudine datæ. Præterea dantur etiam B F

et B G, utpotè habentes datam rationem ad B D et R A. Jam verò in triangulo R B F, datis lateribus B R, B F, cum angulo intercepto R B F, dantur latus R F et angulus R F B ac proindè etiam datur angulus Q F H. Similiter in triangulo Q B G, datis lateribus Q B, B G, et angulo Q B G, dabitur angulus B Q G; quare in triangulo Q F H, datis duobus angulis Q F H, F Q H, cum latere Q F, quod est summa vel differentia rectarum datarum Q B, Q F innotescet latus Q H. Tandem in triangulo Q H M, dato angulo H Q M qui est summa vel differentia notorum angulorum B Q A, H Q B, datoque angulo Q M H qui æqualis est angulo dato Q A B, simulque noto latere Q H, innotescunt latera H M, Q M. Simili prorsus modo inveniuntur latera R E, H K, in triangulo R K H. Igitur in triangulo M H K, notis lateribus H M, H K, et angulo intercepto M H K, qui æqualis est angulo dato A B Q, innotescunt anguli H M K, H K M et basis M K. Datæ autem angulis H M Q, H M K, dabitur horum summa vel differentia Q M K, hoc est positio rectæ M K, ob rectam Q M, positione datam. Simili modo rectæ Q O, R N, R K et anguli quos M K cum his rectis efficit, trigonometricè inveniuntur.

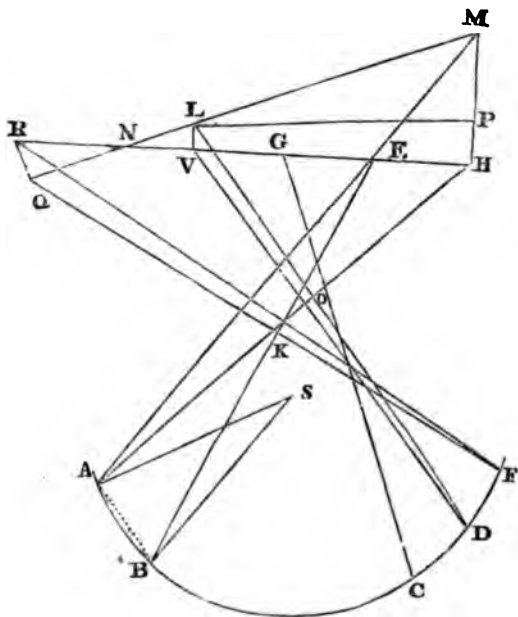
(*) * Agatur recta A B C. (129.)

(b) * Uti modò exposui. (128.)

vel decremento nonnullò, quod a cometæ motu inæquabili in orbe proprio
oriri possit. Distantia verò cometæ ex hâc parallaxi sic colligitur. De-
signet S Solem, a c T orbem magnum, a locum Terræ in observatione
primâ, c locum Terræ in observatione tertiâ, T locum Terræ in observa-
tione ultimâ, et T γ lineam rectam versus
principium Arietis ductam. Sumatur an-
gulus γ T V æqualis angulo γ Q F, hoc
est, æqualis longitudini cometæ ubi Terra
versatur in T. Jungatur a c, et produca-
tur ea ad g, ut sit a g ad a c ut A G ad A C,
et erit g locus quem Terra tempore obser-
vationis ultimæ, motu in rectâ a c unifor-
miter continuato, attingeret. Ideoque si
ducatur g γ ipsi T γ parallela, et capia-
tur angulus γ g V angulo γ Q G æqualis,
erit hic angulus γ g V æqualis longitudini
cometæ e loco g spectati; et angulus T V g parallaxis erit, quæ oritur a
translatione Terræ de loco g in locum T: ac proinde V locus erit cometæ
in plano eclipticæ. (*) Hic autem locus V orbe Jovis inferior esse solet.



(^c) 131. * *Hic autem locus V.* Recta HV, referat vestigium cometæ in plano eclipticæ, sinq̃ue V, G, E, H, quatuor cometæ loca in plano eclipticæ præcedenti methodo inventa. Sit S, Sol, A B C D, orbis magnus, sinq̃ue A, B, C, D, quatuor Terræ loca ad tempora observationum nota. In triangulo ASB, dantur latera S A, S B, daturque angulus A S B, differentia scilicet locorum Terræ e Sole visorum; quare dabuntur anguli S A B, S B A, notaque erit in partibus semi-diametri orbis magni recta A B, chorda nempe arcûs a Tellure interim percurâ. Rursus in triangulo K A B, dantur omnes anguli, nam datur angulus K A B, qui est summa vel differentia notorum angulorum S B A, S B K. Quare datur ratio laterum A K, A B, sed data est ratio rectarum S A, A B, dabitur itaque ratio S A ad K A. At (131.) nota est ratio inter K O et K H, innotesceat igitur ratio inter S A et K H; quare datur A H, distantia cometæ a Terrâ in partibus semi-diametri orbis magni. Simili plane modo invenientur aliorum locorum distantie a Terrâ E autem locus V, ubi, cometa videtur ex datis observationibus inito c



methodum expositam, orbe Jovis inferior esse solet.

ex datis observationibus inito computo per 132. Cometæ vestigium in plano eclipticæ

Idem colligitur ex curvaturâ viæ cometarum. (4) Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in

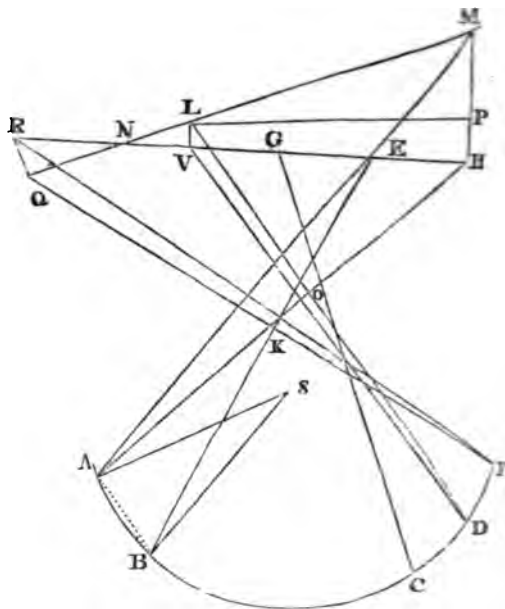
jam determinavimus; ut autem veram obtineamus cometæ trajectoryam, ex loco H, ad planum eclipticæ erecta intelligatur normalis H M, tangens anguli latitudinis cometæ ad datum observationis tempus posito A H, radio, eritque M, locus verus cometæ ad tempus datum; est enim positio rectæ A H, ejus longitudo et angulus M A H, latitudo. Similiter in loco V, ad idem eclipticæ planum erigatur normalis V L, æqualis tangenti latitudinis ad idem tempus observatæ, sumpto D V, pro radio, erit L, locus verus cometæ, ideòque juncta recta L M, est ipsa trajectorya quesita. Patet autem distantiam loci M, ab A, sive rectam A M, esse ad rectam A H, ut secans latitudinis in H, ad radium, et ita porro de aliis cometæ locis.

133. Cætera quæ ad motum cometæ pertinent facillè definiuntur. Invenitur L M, recta scilicet percurra a cometa, dum Tellus ab A ad D movetur. Ducatur enim L P ipsi V H parallela cum rectâ M E concurrens in P. In triangulo P L M, præter angulum rectum in P, datur latus L P, æquale lateri V H, atque etiam datur latus P M, æquale differentiæ rectarum datarum M H, L V, quare dabitur L M. Producat M L, donec cum H V, concurrat in N, erit N nodus. Præterea N V erit ad V L, ut V H ad P M, itemque L N ad L V ut L M ad M P, et ideò dabuntur L N, L V; capiatur tempus quod sit ad tempus inter observationem in M, et observationem in L, ut N L ad L M, habebitur tempus inter observationem in L, et appulsum cometæ ad nodum; cum enim cometa in lineâ rectâ uniformiter moveri supponatur, tempora sunt ut spatia. Dabitur quoque locus cometæ in nodo versantis; cum enim detur punctum N, et propter tempus cognitum inter observationem in L, et appulsum cometæ ad nodum, detur quoque locus Terræ pro hoc momento, dabitur positio rectæ hæc puncta jungentis, hoc est longitudo cometæ in nodo existentis. Tandem ob datam distantiam nodi a loco V datamque latitudinem cometæ in eodem loco, dantur in triangulo sphærico rectangulo latera duo circa angulum rectum, ac proinde innotescit inclinatio hypothenusæ, id est, semitæ ipsius cometæ ad eclipticam.

134. Ex dictis colligitur quâ ratione ad tempus quodlibet propositum definiri possint locus cometæ e Terrâ visus, illiusque distantia a Terrâ. Determinentur ut suprâ vestigium orbitæ in plano eclipticæ H E V R, ipsaque vera cometæ orbita M L N Q. Capiatur H R ad H V, ut

spatium inter observationem primam tempusque datum ad spatium inter observationem primam et quartam. Dato Terræ loco ad tempus propositum, putâ F, datur positio rectæ F R, ac proinde datur longitudo cometæ quesita (132). Præterea fiat R Q ad R N, sicut M H ad H N, patet dari latitudinem cometæ ad tempus datum (loc. cit.). His autem datis, obtineri possunt distantia cometæ a Terrâ (ibid.) in hac ergo hypothese quod cometæ in lineis rectis uniformiter moveantur, determinari possunt præcipua motûs cometarum elementa. Hæc de re consulat lector Opusculum clariss. viri Domini Cassini de Cometâ an. 1664; Davidis Gregorii Astronomiam Physicam, et Cassini filii Theoriam Cometarum in Monumentis Paris. an. 1727.

(4) * Pergunt hæc corpora. Est et alia parallaxis proveniens ex motu Terræ circa Solem. Hæc latitudinem cometarum respicit, hoc est, distantiam eorum ab eclipticæ veris



boream aut austrum, undè fit ut cometæ in sphærâ fixarum a cursu circulari deflectere et lineam admodum irregularem videantur describere. Cum enim planum in quo cometa movetur, cum plano eclipticæ in quo Terra fertur, non coincidat, cometa modò suprâ eclipticam in septentrionem ascendit, modò infrâ eclipticam in

fine cursûs, ubi motûs apparentis pars illa, quæ a parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, et quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; et insignis ejus quantitas, meo computo, collocavit disparentes cometas satis longe infra Jovem. Unde consequens est quod in perigæis et periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis et inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum (*) ex luce capitum. Nam corporis cœlestis a Sole illustrati et in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicatâ ratione distantiae: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis distantiam a Sole, et in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur et lucis quantitas et apparens diameter cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè et ratione duplicatâ lucis ad lucem inversè. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum sexdecim pedum a Flamstedio observata et micrometro mensurata, æquabat 2'. 0"; nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11". vel 12". Luce verò et claritate capitis superabat caput cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: et quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, et diameter apparens globi sit quasi 21". ideoque lux globi et an-

austrum descendit. Quia tamen in eodem plano semper incedit, orbem circularem, Tellure quiescente, videretur describere, sed quoniam Tellus ipsa movetur in plano eclipcticæ, cometa pro diversis Terræ locis observatus, modò versùs boream altius ascendere, modò versùs austrum inferius descendere apparebit. Observationibus compertum est cometas propemodum in circulis maximis pergere, quandiu moventur celerius, at in fine cursûs deflectere solent ab his circulis; hæc autem deflexio pendet ex ipsâ trajectory cometarum curvaturâ de quâ infra. Quare deinceps trademus normam computi quo Newtonus disparentes cometas satis longè infrâ Jovem collocavit, nonnullaque afferemus exempla cometarum qui infrâ orbes Martis et inferiorum planetarum descenderunt.

(*) 135. * *Ex luce capitum.* Intelligentur duæ superficies sphericæ concentricæ, minor una, major altera, et in centro utriusque constitutum fingatur corpus aliquod lucidum. Quoniam corpus illud radios suos per omnem circuitum diffundit, evidens est eandem radiorum quantitatem in concavâ superficie utriusque

sphæræ contineri, ideoque densitates radiorum erunt in ratione superficierum sphericarum inversè, hoc est, in ratione duplicatâ semi-diametrorum sive distantiarum a corpore lucido inversè (14. Lib. I.). Quare nullâ distantiarum habitâ ratione, sensatio quæ a radiis nervos opticos percutientibus excitatur, est ut quadratum distantiae inversè. Sed quò remotius est lucidum, eo pauciores radii ad oculum perveniunt, idque in duplicatâ ratione distantiarum (loco suprâ cit.) hoc est, in duplicatâ ratione diametri apparentis diminuitur. Quare, componendo, corporis cœlestis a Sole illustrati et in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in ratione quadruplicatâ distantiae. Erit itaque quadratum distantiae cometæ a Sole ad quadratum distantiae planetæ ab eodem in ratione compositâ ex duplicatâ ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ et ratione lucis planetæ ad lucem cometæ. Undè distantia cometæ a Sole est ad distantiam planetæ ab eodem in ratione compositâ ex ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ et ratione subduplicatâ lucis planetæ ad lucem cometæ.

nuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30": erit distantia cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inversè, et 12" ad 30". directè, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus cometa anni 1665 mense Aprili, ut auctor est Hevelius, claritate suâ pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum ratione coloris videlicet longè vividiora. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, et cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6'. at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat Jove, et nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porro cùm diameter capillitii cometarum rarè superet 8'. vel 12', diameter verò nuclei, seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet stellas hæc ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cùm lux earum cum luce Saturni non rarè conferri possit, eamque aliquando superet, manifestum est, quod cometæ omnes in periheliis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longè suprâ. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: quâ certe ratione non magis illustrari deberent a Sole nostro, quàm planetæ, qui hic sunt, illustrantur a stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem cometarum per fumum illum maximè copiosum et crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tantò propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexæ planetas æmuletur. Inde verisimile fit cometas longè infra sphaeram Saturni descendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex caudis. (f) Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia cometarum, ne fumus a capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate et expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quàm capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari et intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam et fulgentissimam emittit, (g) Jovem ipsum splendore suo multum

(f) * *Hæ vel ex reflexione fumi sparsi, ut postea probabitur.*

(g) * *Jovem ipsum splendore suo.* Id variis observationibus confirmat Newtonus in Opusculo de Mundi Systemate. Cometa anni 1679. Decembris 12. et 15. stilo veteri, quo tempore caudam clarissimam emittebat et luci multorum Jovium per tantum spatium diffusæ ac dilatatæ non imparē, magnitudine nuclei, ut observabat

Flamstedius, cedebat Jovi, adeoque Soli longè vicinior, quin imò minor erat Mercurio. Nam die 17. mensis hujus, ubi Terræ propior erat, apparuit Cassino per telescopium ped. 35. paulo minor globo Saturni. Die 8. mensis hujus, tempore matutino, vidit Halleus caudam brevem et latam, et quasi ex corpore Solis jamjam oriturū exeuntem, ad instar nubis insolito more fulgentis, nec prius disparentem quàm Sol ipse

superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illustrabitur a Sole, ideòque erit Soli multò propior. Quinetiam capita sub Sole delitescunt, et caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu cometarum a Terrâ Solem versùs, ac decrescente in eorum recessu a Sole versùs Terram. Sic enim cometa posterior anni 1665. (observante Hevelio) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideòque præterierat perigæum; splendor verò capitis nihilominus indies crescebat, usque dum cometa radiis solaribus obtectus desiit apparere. Cometa anni 1683. (observante eodem Hevelio) in fine mensis Julii, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur usque ad Sept. 4. quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensuratâ colligitur: quippe quam Hevelius reperit Aug. 6. esse tantum 6'. 5". inclusa coma, at Sept. 2. esse 9'. 7". Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine motus, at initio tamen in vicinâ Solis longe lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem Hevelius. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius a Sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad Terram. Cometa anni 1618. circa medium mensis Decembris, et iste anni 1680. circa finem ejusdem mensis, celerrimè movebantur, ideòque tunc erant in perigæis. Verùm splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modo exierant de radiis solaribus; et splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput cometæ prioris, juxta observationes Cysati, Decemb. 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, et Decemb. 16. (jam in perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. Jan. 7. Keplerus de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 men-

inciperet suprâ horizontem conspici. Superabat igitur hic splendor lucem nubium usque ad ortum Solis, et immediato Solis splendori solùm cedendo vincebat longè lucem omnium stellarum conjunctum. Non Mercurius, non Venus, non ipsa Luna in tantâ Solis orientis vicinitate cerni solet. Fingamus lucem hanc dilatatam co-

minorem coarctari et splendore longè fortiori jam reddita magis conspicua, Mercurium longè superabit, adeòque erit Soli viciniôr. Diebus 12. et 15. ejusdem mensis, cauda hæc per spatium longè majus diffusa apparuit rariôr, et luce tamen adeò forti ut stellis fixis vixdum apparentibus cerneretur, et mox trabis mirum in modum fulgentis speciem exhibuit.

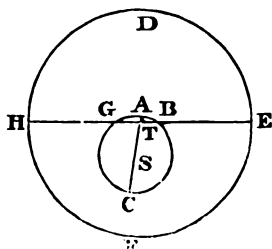
sis Decemb. conspectum et a Flamstedio observatum est caput cometæ posterioris in distantia novem graduum a Sole; id quod stellæ tertie magnitudinis vix concessum fuisset. Decemb. 15. et 17. apparuit idem ut stella tertie magnitudinis, diminutum utique splendore nubium juxta Solem occidentem. Decembr. 26. velocissimè motus, inque perigæo prope-modum existens, cedebat ori Pegasi, stellæ tertie magnitudinis. Jan. 3. apparebat ut stella quartæ, Jan. 9. ut stella quintæ, Jan. 13. ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. Jan. 25. vix æquabat stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia a perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales a Terrâ distantias, æqualiter lucere debuissent, in plagâ Solis maximè splendère, ex alterâ perigæi parte evanescere. Igitur ex magnâ lucis in utroque sita differentia, concluditur magna Solis et cometæ vicinitas in situ prior. Nam lux cometarum regularis esse solet, et maxima apparere ubi capita velocissimè moventur, atque ideo sunt in perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur cometæ ^(h) luce Solis a se reflexâ.

Corol. 2. ⁽ⁱ⁾ Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum, deberent sæpiùs apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ

^(h) * *Luce Solis a se reflexâ.* Nam a Terrâ recedentibus cometis et ad Solem accedentibus, augetur eorum splendor, decrescente licet diametro, ut ex præcedentibus observationibus patet.

⁽ⁱ⁾ * *Ex dictis etiam intelligitur.* Referat S Solem, T, Terram, circulus D E F H, sphaeram fixarum. Quoniam cometæ splendent luce Solis a se reflexâ, (Cor. 1.) ii non videbuntur, nisi a



Sole ita illustrentur ut oculi nostri hâc luce moveri possint. Præterea cometæ per caudas suas maximè fiunt conspicui, has autem caudas non emittunt priusquam ad Solem aliquantulum incaluerint, quare patet cometas sese conspicuos non præbere nisi ad definitam quandam a Sole distantiam accedant. Ponatur itaque sphaera A B C G, Soli concentrica ad talem distantiam descripta ut nullus cometa propter illustrationis

defectum, detegi possit, priusquam ad sphaera hujus superficiem pervenerit, juncta recta S T, producat utrinque donec superficiei huic occurrat in A, et C. Per T, ductum intelligatur planum H E, cui normalis est recta A C, planum illud sphaeram dividet in duo hemisphaera quorum unum H F E, est versus Solem; alterum verò H D E, Soli opponitur. Cometæ omnes in sphaeræ segmento B C G, existentes, videbuntur in hemisphaerio versus Solem, omnes autem qui versantur in segmento B A G videbuntur in hemisphaerio quod Soli opponitur. Quare si segmentum B C G, majus sit segmento B A G, plures cometæ videbuntur in hemisphaerio versus Solem quam in opposito. Jam vero cometæ nudis oculis se priùs detegendos non exhibent quàm sint Jove propiores; ponatur itaque S A, circiter $\frac{1}{2}$ distantiae Martis a Sole, hoc est S A sit circiter dupla ipsius S T, erit segmentum B G C plusquam quadruplo majus segmento B A G, ideòque quadruplo vel quintuplo plures cometæ detegentur in hemisphaerio versus Solem quam in hemisphaerio opposito. At si cometa cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum, foret S A, longè major quàm S T, et ideo cometæ sæpiùs deberent apparere in partibus Soli oppositis, forent enim Terræ viciniore quàm in segmento B A G, versantur, ceteros verò in segmento B C G, Sol interpositus obscuraret. Et his intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem Solis.

viciniores, qui in his partibus versarentur; et Sol interpositus obscuraret cæteros. Verùm percurrendo historias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in hemisphærio Solem versus, quàm in hemisphærio opposito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adedò illustrantur a Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quàm sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longè major sita est a latere Terræ, quod Solem respicit; inque parte illâ majore cometæ, Soli ut plurimum viciniore, magis illuminari solent.

Corol. 3. (*) Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistantiâ destituuntur. Nam cometæ vias obliquas et nonnunquam cursui planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrimè, et motus suos, etiam contra cursum planetarum diutissimè conservant. (!) Fallor ni genus planetarum sint, et motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod scriptores aliqui meteora esse volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. (m) Capita cometarum atmosphæris ingentibus cinguntur; et atmosphæræ infernè densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si e planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, et corpus firmum sub nubibus propè delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus planetæ illius formata sunt, quæ situm mutant inter se, et firmum Jovis corpus per nubes illas difficiliter cernitur. Et multo magis corpora cometarum sub atmosphæris et profundioribus et crassioribus abscondi debent.

(*) • *Hinc etiam manifestum est.* Clariss. Cassinus in Mon. Paris. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosè reduxit. Observatos plurimorum cometarum motus retrogrados meras esse apparentias conjectatur, non secus ac directus planetarum circumsolarium motus apparet aliquandò retrogradus. Sed quamvis celeberrimi hujusce astronomi judicium maximè veneremur, nonnullos tamen cometas motu verè retrogrado contrà seriem signorum cursum tenuisse conabimur ostendere, ubi hæc de re plura dicendi locus dabitur, postquam scilicet tradiderimus motuum cometarum elementa. Obliquas esse nonnunquam cometarum vias et cursui planetarum contrarias fateri non dubitarunt quidam Cartesiani. Verùm quâ ratione diversi illi cometarum motus cum vorticibus conciliari possint, difficilè intelligitur, cum enim cometæ in regiones planetarum descendant, ne-

cesse videtur ut rapidissimo vorticum torrente contrarii cometarum motus maximè perturbentur, citòque destruantur, ac tandem cometæ hujusce torrentis vi rapiantur. At summè regulares esse cometarum motus, et contrà cursum planetarum diutissimè conservari, nonnullis cometarum exemplis deinceps patebit.

(!) • *Fallor, ni genus planetarum sint.* Quàm gravibus fundamentis nitatur hæc sententia manifestum erit postea ex variis cometarum phænomenis.

(m) • *Capita cometarum atmosphæris ingentibus cingi variis argumentis imposterum confirmavit Newtonus.* Cæterum in ipsis cometarum corporibus non fieri perpetuas mutationes illas i decursu constabit independentè omninò ab illi opinione quæ cometis ingentes atmosphæræ tribuit.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, et radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere.

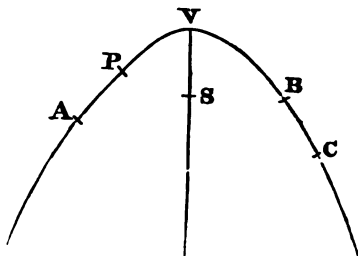
(^a) Patet per Corol. 1. Prop. XIII. Libri Primi, collatum cum Prop. VIII. XII. et XIII. Libri Tertii.

Corol. 1. Hinc si cometæ in orbem redeunt, orbes erunt ellipses, et tempora periodica erunt ad tempora periodica planetarum (^o) in axium principalium ratione sesquuplicatâ. (^p) Ideoque cometæ maximâ ex parte supra planetas versantes, et eo nomine orbes axibus majoribus describentes,

(^a) * *Patet.* Quoniam cometæ motu suo lineas curvas circa Solem describunt, ut ex observationibus constat, vi aliquâ a motu rectilineo detorqueuntur (per leg. I.). Quoniam autem hæc vis quæ planetas a lineis rectis detorquet maximè tendit versus Solem ut potè corpus cætera omnia systematis solaris corpora longè superans, eadem quoque vis in cometas Solem maximè debet respicere. Sed vis acceleratrix in planetis est in duplicatâ ratione distantiarum a Sole inversâ (Prop. VIII. Lib. III.). Quare eandem quoque legem observare debent cometæ quæ sunt corpora planetis similia, ac proinde (Cor. Prop. XIII. Lib. I. et Prop. XIII. Lib. III.) cometæ non secus ac planetæ in sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moventur et radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describunt. Hæc ita se habent, si Sol e loco suo nullatenus moveatur; sed quamvis Sol per attractionem planetarum perpetuo motu agitur, non tamen longè recedit a communi gravitatis centro planetarum omnium, ideoque etiam cometæ qui in regionibus a Sole maximè dissitis commorantur, non magnopere huius centri situm turbare possunt. Quare orbitarum suarum umbilicus non longè distabit a centro Solis, ac proinde propositio hæc vera est quamproximè. Quantum accuratè observatis cometarum motibus congruat, patebit deinceps.

156. Keplerus aliiqve post eum astronomi non pauci, cometas in lineis rectis moveri posuerunt, et inde cometarum quorundam loca observationibus satis congrua calculo investigarunt. Res ita succedere potest, si observetur cometa in eâ tantum orbitæ suæ parte quæ a rectâ non multum differat. Sit A P V B C, sectio conica admodum excentrica in cuius umbilico altero S collocatum sit Solis centrum. Ponamus cometam observari, dum orbitæ suæ partem A P, describit; fieri potest ut reliquo tempore, dum scilicet a loco P, per V, B, ad locum C promovetur, in regiones remotissimas abiens oculis se subducatur et sub radiis solaribus delitescat respectu observatoris in Tellure circa Solem S motâ, vel etiam accidere potest ut, motu Telluris ita exigente, cometa percurrentis orbitæ partem

A P V B, sub solaribus radiis abscondatur et tunc primum observetur cum ad locum B pervenerit, lineam B C descripturus. In hoc utroque casu via cometæ a lineâ rectâ parum differt. In primo casu, cometæ a Sole absorpti credentur, quia ad Solem accedentes, pro destructis habebuntur. In altero casu, e Sole videbuntur emergere quia tunc primum acce conspicuos præbuerunt, dum a Sole in remotas regiones discedebant. Porro dum cometa versus Solem



descendit, putâ dum A P percurrit postea ad Solem accedens sub ejus radiis latet, putâ dum P V B describit, tandemque dum ad alterum Solis partes subito emergit, usurpatur sæpè pro novo cometa a priori in A P diverso, et duas rectæ A P, B C pro duabus trajectorys habetur. Ex his patet cur trajectorys rectilineæ, observatis cometarum motibus plerumque respondeant. Id fit scilicet eò quod aliqua duntaxat portio trajectorys pro integrâ trajectoryâ habetur. At si tota simul consideretur tam in ascensu versus Solem quam in descensu, aliam nullam præter sectionem conicam satisfacere constabit.

(^o) * *In axium principalium ratione sesquuplicatâ.* (Prop. XV. Lib. I.)

(^p) * *Ideoque cometæ maximâ ex parte supra planetas versantes, quo tempore scilicet oculis nostros fugiunt, et eo nomine orbes axibus majoribus quam planetæ describentes tardius revolvuntur.*

tardius revolvantur. Ut si axis orbis cometæ sit quadruplo majore axe orbis Saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est, ad annos 90. ut $4 \sqrt{4}$ (seu 8) ad 1. ideòque erit annorum 240.

Corol. 2. (P) Orbes autem erunt parabolis adeò finitimi, ut eorum vice parabolæ sine erroribus sensibilibus adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) velocitas cometæ omnis, erit semper (q) ad velocitatem planetæ cujusvis circa Solem in circulo revolvantis, in subduplicatâ ratione duplæ distantiae planetæ a centro Solis, ad distantiam cometæ a centro Solis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, seu ellipseos in quâ Terra revolvitur, semi-diametrum maximam esse partium 100000000: (r) et Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, et motu horario partes 71675½. Ideòque cometa in eâdem Telluris a Sole distantia mediocri, eâ cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, et motu horario partes 101364½. (s) In majoribus autem vel minoribus distantis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum et horarium in subduplicatâ ratione distantiarum reciproçè, ideòque datur.

Corol. 4. (t) Unde si latus rectum parabolæ quadruplo majus sit radio

(P) * Orbes autem erunt parabolis adeò finitimi. Orbes cometarum sunt admodum excentrici, ut ex observationibus colligitur, et valdè exigua est portio orbis quem toto apparitionis tempore describunt, exiguo enim temporis spatio sese conspicuos præbent. Verùm si in ellipsi centrum ad infinitam ab umbilico distantiam removeatur, portio ellipsis cujus abscissa finita est, abit in parabolam. Quare elliptici orbes cometarum erunt parabolis valdè finitimi.

(q) * Ad velocitatem planetæ cujusvis circa Solem in circulo revolvantis; hoc est, ad velocitatem ejus mediocrem.

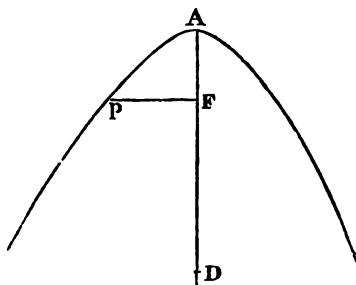
(r) * Et Terra. Fiat hæc analogia: ut est tempus periodicum Terræ circa Solem ad totam peripheriam circuli 3.141, ita dies una vel hora una ad partem peripheriæ unâ die vel horâ unâ descriptam.

(s) * In majoribus autem vel minoribus. (Cor. 6. Prop. IV. et Prop. XV. Lib. I. vel per Cor. 6. Prop. XVI. ejusdem Libri.)

(t) * Undè si latus rectum. Ex umbilico parabolæ F, ducatur ad axem A D, ordinata P F, erit area A P F, ad aream circuli quartâ parte lateris recti seu radio A F descripti (Theor.

II. de parabolâ, Lib. I.) ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Nam si radius circuli sumatur æqualis unitati, erit area circuli ad quadratum diametri, ut 3.14159 ad 4. Sed rectangulum sub ordinatâ P F et abscissâ F A, est dimidium hujus qua-

drati, hoc est 2, et area parabolica A P F, hujus rectanguli duæ tertiæ partes, hoc est $\frac{4}{3}$ (per Theor. IV. de parab. Lib. I.). Quare area parabolica A P F, est ad aream circuli radio A F descripti ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Si igitur velo-



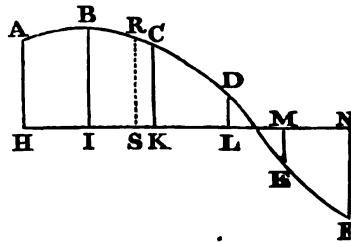
citas cometæ revolvantis in parabolâ eadem esset cum velocitate planetæ gyrantis in circulo, in eâdem quoque ratione foret tempus quo cometa describit arcum parabolæ A P, ad tempus periodicum planetæ. Sed velocitas cometæ est ad velocitatem planetæ in eâdem distantia a Sole ut $\sqrt{2}$ ad 1, in hac igitur ratione diminuenda est prior ratio. Undè tempus quo cometa de-

LEMMA VI.

Ex observatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Designent H I, I K, K L, L M tempora inter observationes H A, I B, K C, L D, M E observatas quinque longitudes cometæ, H S

b 2 b 3 b 4 b 5 b
 c 2 c 3 c 4 c
 d 2 d 3 d
 e 2 e
 f



tempus datum inter observationem primam et longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis A B C D E; et per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata R S, erit R S longitudo quæsitæ.

Eâdem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

(*) Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, putà graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem et latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, putà graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

(*) 137. * Si longitudinum observatarum, (patet per not. in Cor. præced.). Methodus Lemmatis præcedentis, quæ methodus interpolationum dici solet, in rebus astronomicis usus habere potest eximios. Hanc methodum adhibuit clariss. Meierus Tom. II. Comment. Acad. Petropol. ad Investiganda Solstitiorum Momenta. Circâ tempus solstitii observentur aliquæ Solis altitudines meridianæ, illasque Solis altitudines representent quædam ordinatæ, et tempora inter observationes elapsa ordinarum intervallis exhibeantur. Deinde transeat parabola per extremitates ordinarum, abscissa quæ correspondet minimæ ordinatæ, tempus solstitii determinabit. Cæterum definiri potest tempus solstitii per

plures observationes et parabolam plurium dimensionum, vel per tres observationes ductam et parabolam conicam, uti fecit Halleus. Verum in quocumque casu adhibeatur interpolationum methodus, oportet differentias observatas sensibiliter majores esse erroribus qui in ipsa observatione committi possunt, hæc autem adhibita curâ, satis accurate determinari poterunt plurima astronomiæ phænomena quæ aliâ quodam viâ forent determinatu difficillima. Elegantissimum ejusdem methodi exemplum dedit nobis geometra D. Clairaut in Mon. Paris. an. 1736, ubi determinandæ Telluri figuræ modum exponit ex mensurâ plurium meridiani arcuum in diversis latitudinibus captâ.

intervalla $H I$, $I K$, $K L$, $L M$, &c. unitates esse, et dic $A H = a$,
 $- H S = p$, $\frac{1}{2} p$ in $- I S = q$, $\frac{1}{3} q$ in $+ S K = r$, $\frac{1}{4} r$ in $+ S L = s$,
 $\frac{1}{5} s$ in $+ S M = t$; pergendo videlicet ad usque penultimum perpen-

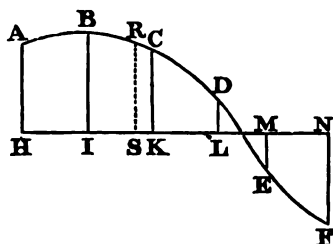
$b \quad 2b \quad 3b \quad 4b \quad 5b$

$c \quad 2c \quad 3c \quad 4c$

$d \quad 2d \quad 3d$

$e \quad 2e$

f



diculum $M E$, et præponendo signa negativa terminis $H S$, $I S$, &c. qui jacent ad partes puncti S versus A , et signa affirmativa terminis $S K$, $S L$, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S . Et signis probe observatis, erit $R S = a + b p + c q + d r + e s + f t$, &c.

Cas. 2. Quod si punctorum H , I , K , L , &c. inæqualia sint intervalla $H I$, $I K$, &c. collige perpendicularum $A H$, $B I$, $C K$, &c. differentias primas per intervalla perpendicularum divisas b , $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; secundas per intervalla bina divisas c , $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias per intervalla terna divisas d , $2d$, $3d$, &c. quartas per intervalla quaterna divisas e , $2e$, &c. et sic deinceps; id est, ita ut sit $b = \frac{A H - B I}{H I}$,

$$2b = \frac{B I - C K}{I K}, 3b = \frac{C K - D L}{K L}, \text{ \&c. deinde } c = \frac{b - 2b}{H K}, 2c = \frac{2b - 3b}{I L},$$

$$3c = \frac{3b - 4b}{K M}, \text{ \&c. postea } d = \frac{c - 2c}{H L}, 2d = \frac{2c - 3c}{I M}, \text{ \&c. In-}$$

ventis differentiis, dic $A H = a$, $- H S = p$, p in $- I S = q$, q in $+ S K = r$, r in $+ S L = s$, s in $+ S M = t$; pergendo scilicet ad usque perpendicularum penultimum $M E$, et erit ordinatim applicata $R S = a + b p + c q + d r + e s + f t$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproximè. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, et parabola per eadem duci intelligatur: erit area parabolæ hujus eadem quamproximè cum areâ curvæ illius quadrandæ. (*) Potest autem parabola per methodos notissimas semper quadrari geometricè.

(*) Potest autem parabola, per methodos notissimas (165. Lib. I.) semper quadrari geometricè. Invenitur itaque æquatio definiens curvam parabolicam quæ transibit per curvæ quadrandæ puncta quotlibet, erit area parabolæ hujus eadem

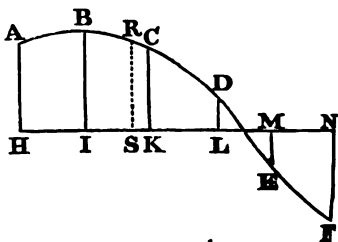
quamproximè cum areâ curvæ illius quadrandæ. Quò plura sunt puncta curvæ propositæ per quæ transit curva parabolica, eò propius area hujus accedit ad aream illius.

LEMMA VI.

Ex observatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Designent H I, I K, K L, L M tempora inter observationes H A, I B, K C, L D, M E observatas quinque longitudes cometæ, H S

b 2 b 3 b 4 b 5 b
 c 2 c 3 c 4 c
 d 2 d 3 d
 e 2 e
 f



tempus datum inter observationem primam et longitudinem *quaesitam*. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis A B C D E; et per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata R S, erit R S longitudo *quaesita*.

Eâdem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur *latitudo* ad tempus datum.

(*) Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, putâ graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem et latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, putâ graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

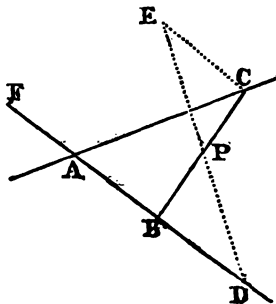
(*) 137. * Si longitudinum observatarum, (patet per not. in Cor. præced.). Methodus Lemmatis præcedentis, quæ methodus interpolationum dici solet, in rebus astronomicis usus habere potest eximios. Hanc methodum adhibuit clariss. Meierus Tom. II. Comment. Acad. Petropol. ad Investiganda Solstitiorum Momenta. Circâ tempus solstitii observentur aliquæ Solis altitudines meridianæ, illasque Solis altitudines repræsentent quædam ordinatæ, et tempora inter observationes elapsa ordinarum intervallis exhibeantur. Deinde transeat parabola per extremitates ordinarum, abscissa quæ correspondet minimæ ordinatæ, tempus solstitii determinabit. Cæterum definiri potest tempus solstitii per

plures observationes et parabolam plurium dimensionum, vel per tres observationes duntaxat et parabolam conicam, uti fecit Halleus. Verum in quocumque casu adhibeatur interpolationum methodus, oportet differentias observatas sensibilibiter majores esse erroribus qui in ipsa observatione committi possunt, hæc autem adhibita curâ, satis accurate determinari poterunt plurima astronomiæ phænomena quæ aliâ quidem viâ forent determinatu difficillima. Elegantissimum ejusdem methodi exemplum dedit cumius geometra D. Clairaut in Mon. Paris. an. 1736, ubi determinandæ Telluri figuræ modum exponit ex mensurâ plurium meridiani arcuum in diversis latitudinibus captâ.

LEMMA VII.

Per datum punctum P ducere rectam lineam B C, cujus partes P B, P C, rectis duabus positione datis A B, A C, abscissæ; datam habeant rationem ad invicem.

A puncto illo P ad rectarum alterutram A B ducatur recta quævis P D, et producat eadem versus rectam alteram A C usque ad E, ut sit P E ad P D in datâ illâ ratione. Ipsi A D parallela sit E C; et si agatur C P B, erit P C ad P B ut P E ad P D. Q. e. f.

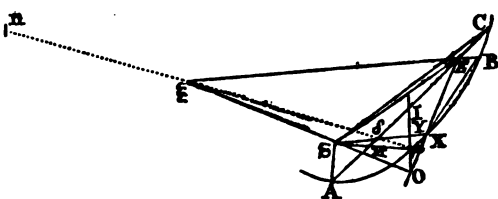


LEMMA VIII.

Sit A B C parabola umbilicum habens S. Chorda A C bisecta in I abscindatur segmentum A B C I, cujus diameter sit I μ et vertex μ . In I μ producta capiatur μ O æqualis dimidio ipsius I μ . Jungatur O S, et producat eam ad ξ , ut sit S ξ æqualis 2 S O. Et si cometa B moveatur in arcu C B A, et agatur ξ B secans A C in E: dico quod punctum E abscindet de chordâ A C segmentum A E tempori proportionale quamproximè.

Jungatur enim E O secans arcum parabolicum A B C in Y, et agatur μ X, quæ tangat eundem arcum in vertice μ , et actæ E O occurrat

in X; (*) et erit area curvilinea A E X μ A ad aream curvilineam A C Y μ A ut A E ad A C. Ideoque cum triangulum A S E sit ad



(*) * Et erit area. Quoniam chorda A C bisecta est in I, erit semi-segmentum A μ I æquale semi-segmento μ I C. Item quia μ X tangit parabolam in μ , erit μ X, parallela chordæ A C (per Lem. IV. de conic. Lib. I.) ac proinde triangulum O I E simile est triangulo O μ X, ideoque ob I O triplam ipsius μ O, erit triangulum I O E trianguli μ O X, noncuplum et triangulum I O E trapezii I μ X E, sesquiquotuplum. Præterea triangulum I A O, est trianguli I A μ , sesquialterum (omittuntur in

figurâ aliquæ lineæ ad vitandam confusionem) cum idem sit trianguli utriusque vertex A, sitque basis O I sesquialtera basis μ I, triangulum verò A μ I, subsesquiterium est semi-segmenti A μ I (Prop. XXIV. Archimed. de parab. vel Theor. IV. de parab. Lib. I.). Quare triangulum A O I est sesquiquotuplum semi-segmenti A μ I, hoc est, in ratione compositâ ex rationibus sesquialterâ et subsesquiteriâ ac proinde triangulum A O I, est ad semi-segmentum A μ I sicut triangulum I O E, ad trapezium μ X I E, et

punctum ξ , si punctum B magis distat a vertice principali parabolæ quàm punctum μ ; et citra, si minus distat ab eodem vertice.

$$\frac{A I^2}{8 S \mu} = \frac{x^4 + 16 f^2 x^2}{32 f x^2 + 512 f^2 x}, \text{ ac proinde}$$

$$m O = \mu O - m \mu = \frac{x^4 + 16 f^2 x^2}{32 f x^2 + 512 f^2 x}$$

$$+ \frac{16 f f - x x}{16 f}, \text{ ideoque } S O =$$

$$\sqrt{\left\{ \frac{1}{4} x x + \left(\frac{x^4 + 16 f^2 x^2}{32 f x^2 + 512 f^2 x} + \frac{16 f f - x x}{16 f} \right)^2 \right\}} \text{ et } \xi O = 3 \sqrt{\left\{ \frac{1}{4} x x + \left(\frac{x^4 + 16 f^2 x^2}{32 f x^2 + 512 f^2 x} + \frac{16 f f - x x}{16 f} \right)^2 \right\}}.$$

Insuper ex puncto ξ , ad abscissam A R erectâ perpendiculari ξV , ob similitudinem triangulorum S m O, S ξ V, fit S O : q μ = ξ S : ξ V, ideoque $\xi V = x$. Præterea S O : m O = S ξ : S V, ac proinde S V = 2 m O, hincque prodit A V = A S + 2 m O, et V R = A R - A S - 2 m O. Sed ob triangulorum simi-

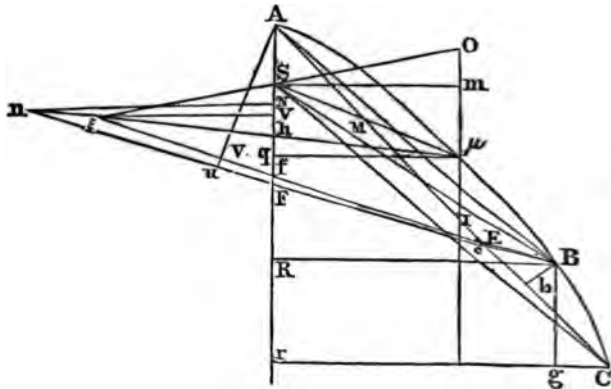
erit A f : A V = R f : R B, ideoque A V = $\frac{R A B \times A f}{R f}$. Denique ductâ B b, perpendi-

lari ad A C, similia erunt triangula E A V, B b e, ac proinde B b : b E = A V : A E, et invertendo B b : A V = b E : A E, atque componendo B b + A V : A V = b E + A E:

A E, hinc A E = $\frac{A b \times A V}{B b + A V}$. Jam loco A b,

B b, A V, substitutis eorum valoribus modò inventis prodit A E, paulò minor quàm $\frac{(y^2 + 12 f^2 y) \sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f (x^2 + 12 f^2 x)}$

Investigandus superest valor rectæ A e, qui prodit ex constructione scholii hujus. Quoniam similia sunt triangula ξ S h, ξ O μ , erit ξ S : S h = ξ O : O μ , hinc S h = $\frac{\xi S \times O \mu}{\xi O}$; m inventa est suprâ recta S q, invenietur itaque q h,



litudinem $\xi V (x) : B R (y) = V f : R f$, et componendo, $\xi V + B R : B R = V f + R f : R f$, quare $R f = \frac{V R + B R}{\xi V + B R}$, datur itaque R f, per x et y. Præterea $f B^2 = R B^2 + R f^2$, sed R B : B f = $\xi V : \xi f = \frac{\xi V \times B f}{R B} = \frac{x \times \sqrt{R B^2 + R f^2}}{y}$, et hinc

$$\xi B = \sqrt{R B^2 + R f^2} + \frac{x \times \sqrt{R B^2 + R f^2}}{y}.$$

Deinde in triangulo A B C, dantur latera A B, A C, et præterea datur latus B C; ductâ enim B g perpendiculari ad r C, erit B C = $\sqrt{B g^2 + g C^2} = \sqrt{R r^2 + (R B - r C)^2}$;

datur itaque perpendicularis B b = $\sqrt{\frac{3}{4} B C^2}$.

Insuper ducatur A V perpendicularis ad A B, ob similitudinem triangulorum A V f, B R f,

ac proinde etiam h μ = $\sqrt{q h^2 + q \mu^2}$. Præterea $\xi S : S O = \xi h : h \mu$; quare $\xi h = \frac{S \xi \times \sqrt{q h^2 + q \mu^2}}{S O}$, ac proinde tota re-

ta $\xi \mu = \sqrt{q h^2 + q \mu^2} + S \xi \times \frac{\sqrt{q h^2 + q \mu^2}}{S O}$.

Deinde (per constr.) fit $\xi n = \frac{27 M I \times A B}{16 M \mu}$.

Sed A M : M I = A S : I μ , ac proinde, componendo A M + M I : M I = A S + I μ : I μ , invenietur itaque M I, ideoque tota recta a p.

Insuper h μ : q h = h r : h M, invenietur itaque h N, ac proinde et N n, ob triangulum h r N, rectangulum. Præterea (ex præced.) inventa est h R, ideoque etiam datur n R. Jam fiat r N : N F = B R : R F, et invertendo N F : R F = r N : B R, atque componendo N F + R F : R F = r N + B R : B R, hinc

Scholium.

Si jungatur $\mu \xi$ secans A C in δ , et in ea capiatur ξn , quæ sit ad μB ut 27 M I ad 16 M μ : acta B n secabit chordam A C in ratione temporum (*) magis accuratè quàm priùs. Jaceat autem punctum n ultra

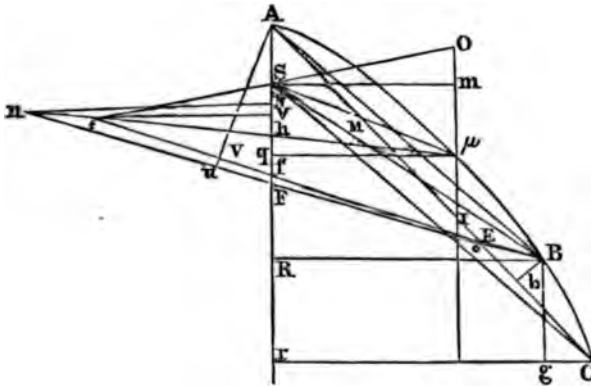
B C, majus est tempore quo idem cometa factus
 velocior describit arcum B A. Accurati-
 us itaque eligenter tempora parum inaequalia ut
 punctum E potius abeat versus C, quàm versus
 A, ob rationem modò allatam.

139. Si vertex μ , segmenti parabolici $A \mu C$ parum distet a vertice principali, sitque punctum B proximum puncto μ , recta $S \mu$, ex parabolæ umbilico S , ad verticem μ , ducta dividet chordam $A C$, in M , ferè in ratione temporum, ut ex precedentibus patet.

140. Si fuerit recta $S \mu$ admodum magna respectu abscissae μI , erit $S V$, tripla ipsius $M V$. Quoniam enim rectae $S V O$, $S M \mu$; in hoc casu pro parallelis haberi possunt, erit $I V$ ad

VM ut IO ad μ O, hoc est, (per constr. Lem. VIII.) ut 3 ad 1.

141. *Isidem positus, erit* $V\xi = 3VS + 3I\mu$; quoniam enim (per constr.) $S\xi = 2SO$, erit $O\xi = 3SO = 3SV + 3VO$. Jam utrinque auferatur VO , fiet $V\xi = 3SV + 2VO$. Sed ob rectas VO , $M\mu$ parallelas, VO est ad $M\mu$, ut IO ad $I\mu$, hoc est, ut 3 ad 2, ideoque $2VO = 3M\mu$. Præterea rectæ $S\mu$, $I\mu$, æquales constituunt angulos cum rectâ tangente parabolam in μ , quæ est chorda AC parallela (per Theor. III. de parab. et Lem. IV. de conic.). Quare æquales sunt anguli $M\mu I$, $I\mu M$, ac proinde recta $M\mu = I\mu$; unde fit $3I\mu = 2VO$, et $V\xi = 3VS + 3I\mu$.



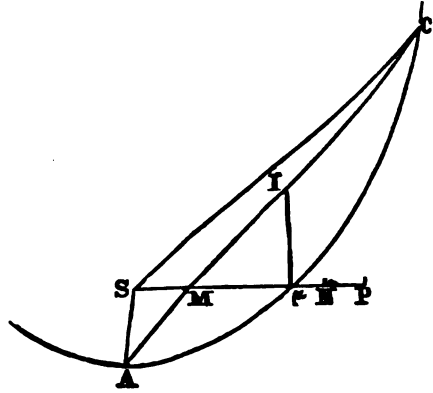
(*) 142. *Magis accuratè quam priùs. Sit A vertex principalis parabole, S umbilicus, A S = f, Ideoque latus rectum principale = 4 f. Ponatur B B' = y, r C = x, erit area A S B C = $\frac{x^3 + 12 f^2 x}{24 f}$, et area A S B A' = $\frac{y^3 + 12 f^2 y}{24 f}$ (Theor. IV. de parab.); ac proinde area ASBC, est ad aream A S B A, ut $\frac{x^3 + 12 f^2 x}{24 f}$ ad $\frac{y^3 + 12 f^2 y}{24 f}$, seu ut $x^3 + 12 f^2 x$ ad $y^3 + 12 f^2 y$, id est, in ratione temporum accuratè. Præterea est A C = $\sqrt{A r^2 + r C^2} = \sqrt{\frac{x^4 + 16 f^2 x^2}{4 f}}$; quare si fiat $x^3 + 12 f^2 x$ ad $y^3 + 12 f^2 y$ ut $\sqrt{\frac{x^4 + 16 f^2 x^2}{4 f}}$ ad*

$A E = \frac{(y^3 + 12 f^2 y) \sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f (x^3 + 12 f^2 x)}$,
erit quoque recta $A C$ ad hanc rectam $A E$, in
ratione temporum accuratè.

Jam verò investigandus est valor rectæ A E, qui prodit ex constructione Lemmatis præcedentis. Ex umbilico S, erigatur ad μ O perpendicularis S m, hæc erit æqualis ordinatæ q μ . Deinde (Theor. I. de parab.) q μ , dimidia est ipsius r C seu $\frac{1}{2} x$, et $\mu m = q S = \frac{x x - 16 f f}{16 f}$. Præterea est $\mu I = 2 \mu O$ (per constr.) et $\mu I = \frac{A I^2}{4 S \mu}$ (165 et Theor. II. de parab.) Sed est $A I^2 = \frac{x^4 + 16 f^2 x^2}{64 f^2}$, et $S \mu^2 = \left(\frac{x^2 - 16 f^2}{16 f} \right)^2 + \frac{1}{4} x x$, quare est μO seu

progredetur ea semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi SP æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ A C.

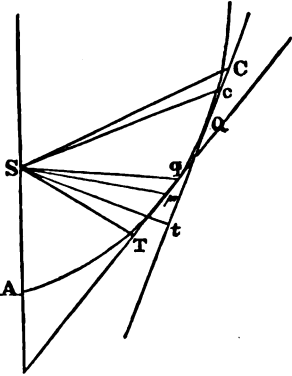
Nam si cometa velocitate, quam habet in μ , eodem tempore progredetur uniformiter in rectâ, quæ parabolam tangit in μ ; (e) area, quam radio ad punctum S ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ A S C μ . (h) Ideoque contentum sub longitudine in tangente descriptâ et longitudine S μ esset ad contentum sub longitudinibus A C et S M, ut area A S C μ ad trian-



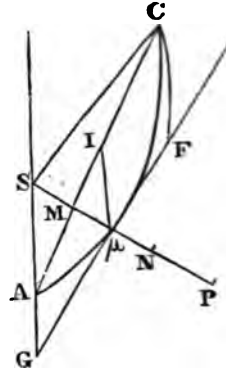
(e) * *Aren, quam radio.* Cometa velocitate quam habet in μ , relictâ parabolâ, progrediatur uniformiter in rectâ μ Q, quæ parabolam tangit in μ , area S μ Q, quam radio ad punctum S, ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ A S C μ , quam eodem tempore describit. Sumantur enim lineolæ C c, q μ , a cometa descrip-

libus numero triangulis componentur spatia A S C μ , S μ Q ac proinde triangulum S μ Q æquale est areæ parabolicæ, A S C μ .

(h) * *Ideoque.* Quoniam recta S μ , cum tangente in μ , et chordâ A C, æquales consti-
tuit angulos (Lem. IV. de conicis), spatium conten-
tum sub longitudine descriptâ in tangente et sub



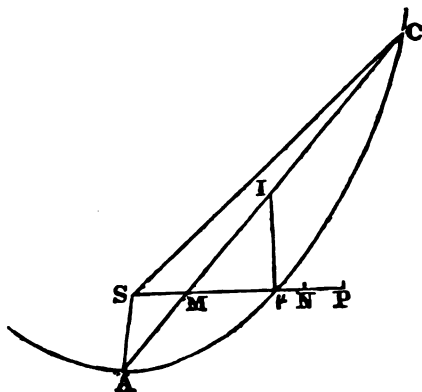
tæ et a parabolæ umbilico S, ad tangentes C t, μ T, erigantur perpendiculares S t, S T, veloci-
tas in C, est ad velocitatem in μ ut S T ad S t
(Cor. 1. Prop. I. Lib. I.) sed velocitates in C,
et μ , sunt ut spatia eodem tempore percur-
sa, putâ C c et q μ ; est igitur C c ad μ q ut S T ad S t.
Quare triangulum S μ q, æquale est triangulo
C S c. Istud autem ubique obtinet in triangulis
minimis, trilinea A S C μ , S μ Q constituentibus.
Quia verò æqualia insumuntur tempora ad per-
currendas lineas A C, μ Q (ex hyp.) ex æqua-



S μ , erit ad spatium contentum sub chordâ A C
et rectâ S M, ut area A S C μ , ad triangulum
A S C, id est, ut triangulum S A C + spa-
tiar. C A c ad triangulum S A C, id est, ut
triangulum S A C + $\frac{2}{3}$ parallelogrammi A G F C.

ad triangulum A S C, hoc est, ut A C $\times \frac{1}{2}$ S M
+ A C $\times \frac{2}{3}$ I μ ad A C $\times \frac{1}{2}$ S M, sive ut
S M + $\frac{4}{3}$ I μ ad S M. Sed μ N, sumpta est

$S N$ sit ad ipsius pondus in Solem in altitudine $S P$, ut $S P$ ad $S \mu$: cometa pondere quod habet in altitudine $S N$ eodem tempore, in Solem



cadendo, describet spatium $\frac{A I q}{4 S \mu}$, (*) id est, spatium longitudini $I \mu$ vel $M \mu$ æquale. Q. e. d.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in parabola moti trajectoryam ex datis tribus observationibus determinare.

Problema hocce longè difficillimum multimodè aggressus, composui Problemata quædam in Libro primo, quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulo simpliciore excogitavi.

Seligantur tres observationes (°) æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproximè distantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi cometa tardius movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum, ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos; vel ut punctum E (in fig. Lem. VIII.) incidat in punctum M quamproximè, et inde aberret versus I potius quàm versus A. (P) Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus cometæ locus per Lemma sextum.

Designet S Solem, T, t, r tria loca Terræ in orbe magno, T A, t B, r C observatas tres longitudes cometæ, V tempus inter observationem

S N, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in distantia S P, ut $S P^2$ ad $S N^2$, hoc est, ob proportionales S P, S N, $S \mu$, ut S P ad $S \mu$.

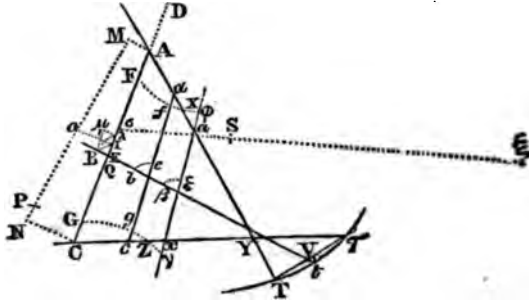
(*) • Id est. (Lem. IX.)

(°) • Æqualibus temporum intervallis. Ratio patet per not. 138.

(P) • Si tales observationes. (Ibid.)

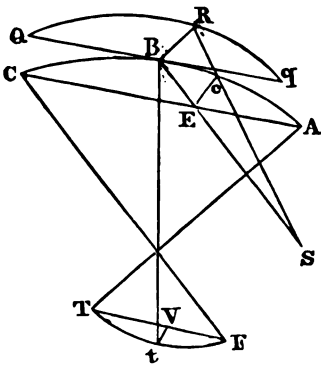
observatione primâ ac tertiâ quamproximè, si modò B sit locus ejus rectè assumptus in observatione secundâ.

Ad A C bisectam in I erige perpendiculum I i. Per punctum B age occultam B i ipsi A C parallelam. Junge occultam S i secantem A C in λ , et comple parallelogrammum i I λ μ . Cape I σ æqualem $\frac{2}{3}$ I λ , et per Solem S age occultam σ ξ æqualem $\frac{2}{3}$ S σ + $\frac{2}{3}$ i λ . Et deletis jam literis



A, E, C, I, a puncto B versus punctum ξ duc occultam novam B E, quæ sit ad priorem B E in duplicata ratione distantie B S ad quantitatem $S \mu + \frac{1}{3}$ i λ . Et per punctum E iterum duc rectam A E C eadem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes A E et E C sint ad invicem, ut tempora inter observationes V et W. Et erunt A et C loca cometæ (*) magis accuratè.

ut $S R^2$ ad $S t^2$, et spatia eodem tempore, urgentibus illis viribus deorsum versus Solem, descripta, sunt inter se ut vires (Lem. X. Lib. I.);



quare recta R e, est spatium per quod cometa e quiete ex R demissus versus Solem caderet semisse temporis quo Terra describit arcum T t, hoc est, semisse temporis quo cometa describit

trajectoriæ suæ arcum interceptum inter duas longitudes T A, T C, ideóque punctum R est in arcus istius chordâ. Unde si tam arcus trajectoriæ Q R q binis longitudinibus T A, T C terminati quàm puncti e, concipiantur vestigia normalibus ad planum eclipticæ demissis signata, nempe A, B, C et E, erit punctum E in chordâ arcus A B C. Sed chorda arcus A B C dividitur a rectâ S B ferè in ratione temporum quibus cometa ad eclipticam reductus, describit arcus A B, B C, (165.) et (per constr.) in eadem ratione dividitur recta A C, nullaquæ alia hisce conditionibus potest satisfacere. Cum igitur oporteat chordam arcus qui est vestigium portionis trajectoriæ inter longitudes T A, T C interceptæ, a rectis T A, T C terminari et per E transire et in E dividi in ratione temporum, cùmque recta A C hasce conditiones sola et unica obtineat, evidens est rectam A C esse chordam prædicti arcus, ac proinde puncta A et C sunt quamproximè vestigia cometæ in plano eclipticæ in observationibus primâ et tertiâ, si modò B sit locus ejus rectè assumptus in observatione secundâ.

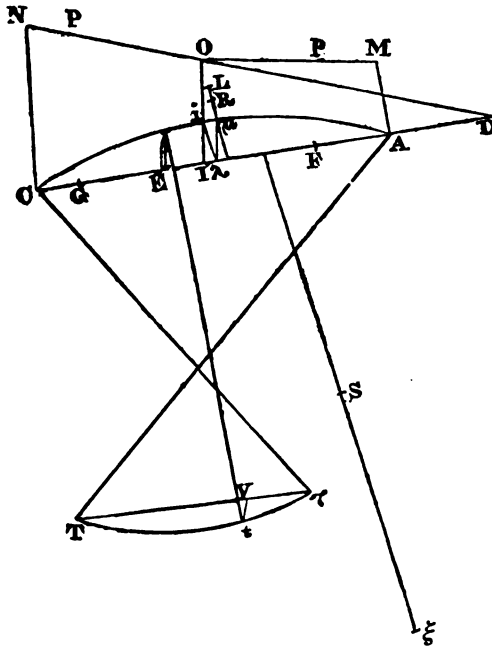
(*) * *Magis accuratè.* Quoniam (per constr. præced.) assumptus est locus B vero non satis proximus, et licet accuratè sumptus fuisset,

(^u) Sin punctum P non incidat in punctum N, in rectâ A C capiatur C G ipsi N P æqualis, ita ut puncta G et P ad easdem partes rectæ N C jaceant.

gens latitudinis in observatione tertiâ ad radium T C; jungatur M N secans I O in O. Si erigatur trapezium A C N M normaliter ad planum eclipticæ manente rectâ C A, erunt puncta M, N loca vera cometæ, si modò punctum B sit ejus vestigium in plano eclipticæ in observatione secundâ, et planum transiens per tria puncta M, O, N, est planum trajectory cometæ, ideóque recta M N est chorda arcûs trajectory parabolicæ a cometâ descriptæ inter observationem primam et tertiam, et S M, S N sunt distantie cometæ a Sole in observatione primâ et tertiâ respective, hoc est, distantia vera cujusvis puncti trajectory cometæ a Sole est hypotenusa trianguli rectanguli cujus alterum latus est distantia a Sole vestigi illius puncti in plano eclipticæ, alterum autem est perpendicularum ex isto vestigio normaliter ad planum eclipticæ excitatum et ad punctum trajectory terminatum. Quia

verò aliqua ex istis perpendicularis sunt longiora ut N C, quædam breviora ut M A, inter hæc medium quoddam usurpetur, putâ hic I O. Et universaliter loquendo, distantia cujusvis puncti trajectory cometæ a Sole erit quamproximè hypotenusa trianguli rectanguli cujus alterum latus est distantia puncti analogi in vestigio trajectory descripto, et alterum latus est ipsa recta I O. Quibus positis in I A, eâve productâ capiatur I D = $S\mu + \frac{1}{2}i\lambda = SR$, factâ L R = L μ , et jungatur D O, hæc quamproximè æquabitur puncti trajectory cujus μ est vestigium distantie a Sole auctæ duabus tertiis rectæ interjectæ inter punctum istud et chordam arcûs trajectory, ipsam scilicet M N in trapezio A C N M, id est, recta D O æqualis est rectæ in plano trajectory cometæ analogæ ipsi S R in ejus vestigio in plano eclipticæ, hoc est D O æqualis est rectæ S R in parabolâ (Lem. X.). Jam (per Corol. 3. Prop. XL.) conferatur velocitas cometæ, dum in parabolâ suâ trajectory movetur in distantia a Sole æquali rectæ D O, cum velocitate Telluris circâ Solem, et definiatur linea quam cometæ, cum prædictâ velocitate æquabiliter motus, percurreret toto tempore quo Tellus arcum ϵ t T describit, sive toto tempore quo cometæ arcum A B C in eclipticâ percurrit, in partibus arcûs T t ϵ a Tellure interim percurrit. Id autem facile præstaturo modo sequenti. Calculo inveniaturo longitudo arcûs ϵ t T a Tellure descripti inter observationem primam et tertiam, posito quovis numero rotundo pro mediocri distantia Terræ a Sole, longitudo putâ M P quæ

est ad longitudinem priûs inventam X, in subduplicatâ ratione diametri orbis magni ad rectam notam D O, quæque proindè datur, est ipsa longitudo quæsita, ea nempe quæ, cometæ æquabiliter latus cum velocitate quam trajectory suam parabolicam describens habet ad distantiam a Sole æqualem rectæ D O, percurreret tempore quo cometæ arcum cujus chorda M N reverâ percurrit. Nam (per Cor. 3. Prop. XL.) velocitas cometæ in hac distantia D O, est ad velocitatem Telluris in prædictâ ratione. Sed (per Lem. X.) dista longitudo M P æqualis est chordæ arcûs quem cometæ isto tempore reverâ describit; quare si reperiaturo M P æqualis chordæ M N, hoc est, si punctum P incidat in punctum N rectè assumptum fuit punctum B in longitudine secundò observat pro vestigio cometæ, ideóque erunt A, B, C, tria loca come-



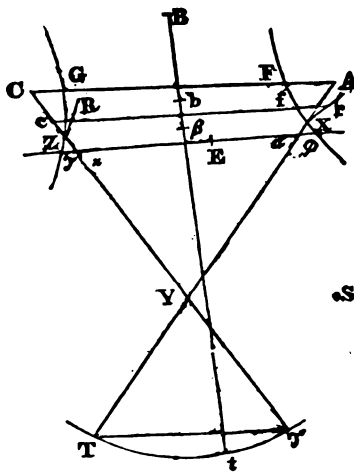
tæ per quæ orbis ejus in plano eclipticæ describi debet.

(^u) * Sin punctum P non incidat in punctum N, in rectâ M N eâve productâ, si opus est, (vid. fig. præced.) capiatur M P, N P æquales longitudini priûs inventæ, capiuntur etiam C G, C F, æquales M P, N P, ita ut G et P ad easdem partes rectæ N C jaceant. Præterea eâdem methodo quâ ex assumpto puncto B, inventa

Eadem methodo, quâ puncta E, A, C, G, ex assumpto puncto B inventa sunt, inveniuntur ex assumptis utcumque punctis aliis b et β puncta nova e, a, c, g et ϵ, α, γ . Deinde si per G, g, γ ducatur circumferentia circuli G g, γ , secans rectam τ C in Z: erit Z locus cometæ in plano eclipticæ. Et si in A C, a, c, α, γ capiantur A F, a, f, α, ϕ ipsis C G, c, g, γ respectivè æquales, et per puncta F, f, ϕ ducatur circumferentia circuli F f, ϕ , secans rectam A T in X; erit punctum X alius cometæ locus in plano eclipticæ. Ad puncta X et Z erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios T X et τ Z, et habebuntur loca duo cometæ in orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca illa duo describatur parabola, et hæc erit trajectory cometæ. Q. e. i.

(*) Constructionis hujus demonstratio ex Lemmatibus consequitur, quippe cùm recta A C secetur in E in ratione temporum, per Lemma

sunt puncta E, A, C, G, ex assumptis aliis punctis b et β , inveniuntur nova puncta e, a, c, g , et ϵ, α, γ . Quod si longitudo prius inventa M P, minor fuerit quàm M N, aut A G, vel C F, punctum b , sumendum erit propius puncto Y, in quo C τ et A T concurrunt, et ita porro, ita ut saltem α, γ , minor fiat quàm α, γ . Per puncta G, g, γ , describatur circulus qui



rectam τ C, secabit inter G et α , putà in Z, si puncta nova b, β , sumpta fuerint, ut jam diximus. Similiter per puncta F, f, ϕ , describatur circulus rectam T A intersecans in X, erunt puncta Z, X, loca cometæ ad eclipticam reducta, sive cometæ vestigia in observatione primâ et tertiâ, si B sit ejusdem vestigium in observatione secundâ. Idem similiter obtinet in a, c , et b , item in α, γ , et β . Jam verò demonstratum est

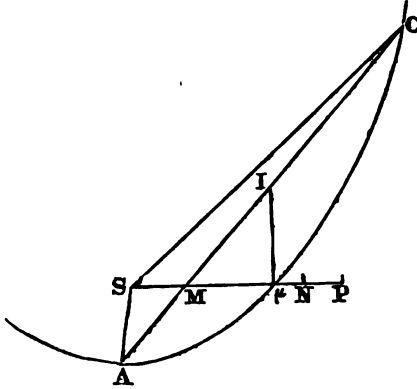
locum B, esse vestigium cometæ in observatione secundâ si puncta N, P, coincident, itaque A et F; quare si reliquis manentibus, coincident puncta C, G, erit C, vestigium cometæ in observatione tertiâ. Similiter coincidentibus punctis A, F, erit A, vestigium cometæ in observatione primâ. Ut autem puncta illa coincident, traductus est circulus transiens per tria puncta G, g, γ , rectam τ C, secans in Z. Cùm igitur punctum Z, sit tam in loco punctorum C, namque recta τ C, quàm in loco punctorum G, namque circulo, quondò punctum C reperitur in Z, punctum G in illo etiam reperietur, id est, in isto casu coincident puncta C, G, ideòque punctum Z est verum cometæ vestigium in plano eclipticæ in observatione tertiâ, huic enim conveniunt omnes condiciones requisitæ. Similiter ob easdem rationes, punctum X est verum cometæ vestigium in observatione primâ. Quare si ex puncto Z, ad planum eclipticæ excitata intelligatur normalis Z R æqualis tangenti latitudinis notæ in observatione tertiâ ad radium τ Z, erit R locus verus cometæ in orbe proprio. Similiter ad planum eclipticæ erigatur perpendicularis X Y, æqualis tangenti latitudinis in observatione primâ ad radium T X, punctum Y, erit alter cometæ locus in orbe proprio. Quare (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca binis R, r, describatur parabola, hæc erit trajectory cometæ. Quia verò parabolæ per puncta R, r, et umbilico S, descriptæ duplex positio esse potest (ut patet ex constr. Prop. XIX. Lib. I.) ex eodem umbilico S, et binis punctis R, r, due describi poterunt parabolæ; utra autem pro orbe cometæ sumenda sit ex aliâ quâvis cometæ observatione manifestum erit. Nam locus cometæ qui ex alterâ harum parabolarum colligitur, cum observato loco conveniet, locus autem ex alterâ parabolâ deductus nequaquam observationibus congruet.

(*) * Constructionis hujus demonstratio. Patet ex notis præced.

(c) LEMMA IX.

Rectæ I μ et μ M et longitudo $\frac{A I q}{4 S \mu}$ æquantur inter se.

Nam $4 S \mu$ est latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.



LEMMA X.

Si producat S μ ad N et P, ut μ N sit pars tertia ipsius μ I, et S P sit ad S N ut S N ad S μ. Cometa, quo tempore describit arcum A μ C, si

$$R F = \frac{B R \times N R}{r N + B R}, \text{ ideòque datur } B F = \frac{r N + B R}{\sqrt{B R^2 + R F^2}}. \text{ Deinde } B F : B R = r F : F N, \text{ et inde } r F = \frac{B F \times F N}{B R}, \text{ atque}$$

$$\text{recta tota } r B = \frac{-B F \times F N}{B R} + \sqrt{B R^2 + R F^2}.$$

Ducatur recta A u, perpendicularis ad A B, erit ob triangulorum A u F, R B F, similitudinem A F : A u = R F : R B, ideòque A u = $\frac{R B \times A F}{R F}$, et hinc prorsus ut suprà habetur

$$A e = \frac{A b \times A u}{B b + A u} \text{ Ex hactenus dictis patet}$$

dari rectas A E, A e, per x, y, et quantitates constantes. Jam loco A b, B b, A u, substitutis eorum valoribus analyticis, fit A e, paulò maior quàm A E, et paulò minor quàm $\frac{(y^3 + 12 f^2 y) \sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f (x^3 + 12 f^2 x)}$.

Quare recta B n, secabit chordam A C, in e, in ratione temporum magis accuratè quàm recta ξ B.

Idem scholium faciliùs demonstrari potest hoc modo. Quoniam A e = $\frac{A b \times A u}{A b + A u} = A b -$

$$\frac{A b \times A b}{A u + B b} \text{ (ex dem.) erit } A e \text{ semper minor}$$

quàm A b. Jam verò factà analogià $x^3 + 12 f^2 x : y^3 + 12 f^2 y = \frac{\sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f}$,

$$\frac{(y^3 + 12 f^2 y) \sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f \sqrt{x^3 + 12 f^2 x}}, \text{ si } A e$$

æqualis foret huic quarto termino, haberetur ratio temporum accuratè (Prop. I. Lib. I). Sed quartus ille terminus major est rectà A e; nam terminus ille major est quàm chorda A B, est

$$\text{enim } A B = \frac{\sqrt{y^4 + 16 f^2 y^2}}{4 f} = \sqrt{x^3 + 12 f^2 x} \times$$

$$\frac{\sqrt{y^4 + 16 f^2 y^2}}{4 f \sqrt{x^3 + 12 f^2 x}} \text{ hæc autem quantitas minor}$$

$$\text{est quàm } \frac{(y^3 + 12 f^2 y) \sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f \sqrt{x^3 + 12 f^2 x}}. \text{ Sed}$$

(per constr.) ità ducitur μ n, ut recta n B semper secet chordam A C in puncto e, quod proximius est puncto C quàm punctum E; quare cum recta A e semper minor sit verà, maior tamen quàm A E, hæc magis quàm illa ad justum valorem accedet, ac proinde recta n B, secet chordam A C, in ratione temporum magis accuratè quàm recta ξ B. Res eodem modo demonstratur, ubi- cumque sumatur punctum A.

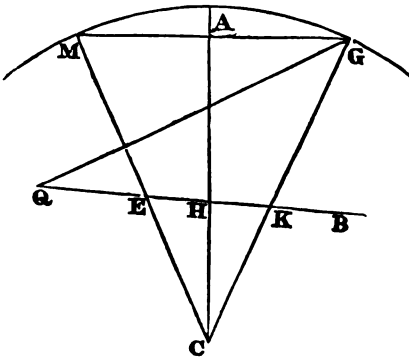
(i) • Lemma IX. (Patet per num. 139 Lib. huj. et Theor. I. et II. de parab. Lib. I.)

ideoque ipsi $M N$ æqualis fuerit, si modò B sit verus cometæ locus in plano eclipticæ.

Cæterum puncta B, b, β non quælibet, sed vero proxima (*) eligere convenit. Si angulus $A Q t$, in quo vestigium orbis in plano eclipticæ descriptum secat rectam $t B$, præter propter innotescat; in angulo illo ducenda erit recta occulta $A C$, quæ sit ad $\frac{2}{3} T t$ in subduplicatâ ratione $S Q$ ad $S t$. Et agendo rectam $S E B$, cujus pars $E B$ aequetur longi-

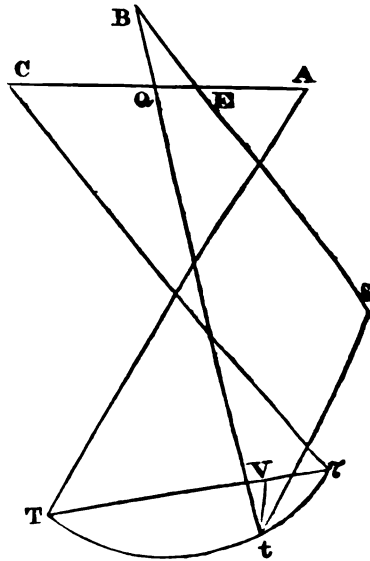
quocumque $C M$, rectam $Q B$ secantes in E , ut semper sit $E M$ æqualis rectæ datæ $A H$, curva in quâ sunt puncta M, A , dicitur conchois. Jam verò inter latera anguli $G Q B$,

gravitas acceleratrix versùs Solem eadem sit in distantia Telluris a Sole, atquè in distantia cometæ ab eodem, quæ est hypothesis Galilæi de gravitate, a verâ non multum distans, æquales



ducere oporteat rectam $G K$, quæ transeat per punctum datum C , et æqualis sit rectæ datæ $C K$, puncto C tanquam polo et intervallo dato $A H = C K$ describatur conchois quæ occurrat rectæ $C G$, in G patet fore $K G$ æqualem rectæ datæ $C K$. Q. e. f.

(*) * *Eligere convenit.* Si præter propter innotescat angulus quem vestigium orbitæ cometæ continet cum rectâ Terram et cometam in observatione secundâ conjungente, sive huic æqualis angulus $A Q t$ (Lem. IV. de con.) quem chorda $A C$ continet cum rectâ $t B$, id quod præstari poterit per num. 133. tunc punctum B , primò assumendum hoc modo determinabitur. Ducatur recta $A C$, rectis positione datis $T A, T C$ utrinque comprehensa, rectamque $t B$, positione datam, in angulo æquali dato in Q intersecans quæ sit ad $\sqrt{2} \times T t$, hoc est, proximè ad $\frac{2}{3} T t$, in subduplicatâ ratione $S t$ ad $S Q$, et agatur per S , recta $S E B$, talis ut pars $E B$ a cruribus anguli $A Q B$ intercepta, æqualis sit rectæ $t V$ (144. 145.) punctum B , ita definitum, est illud ipsum quod commodè primâ vice usurpari poterit pro vestigio cometæ in plano eclipticæ. Ponatur B , esse vestigium cometæ in plano eclipticæ et arcum parabolicum per A, C, B transeuntem esse vestigium arcus trajectory inter observationem primam et tertiam descripti. Jam verò in hypothesi quod



erunt $B E, t V$, utpotè spatia cadendo versùs Solem eodem tempore percurra a cometâ et a Tellure, ac proinde erit $A C$ chorda parabolæ ad $\sqrt{2} \times T t$ chordam circuli cujus centrum cum umbilico parabolæ coincidit in subduplicatâ ratione rectæ $S t$, ad rectam $S E$, (Cor. 7. Prop. XVI. Lib. I.) Sed sumpta est $A C$ ad $\sqrt{2} \times T t$ in subduplicatâ ratione $S t$ ad $S Q$, et $A C$ secat rectam $t B$ in angulo $A Q t$, sive oportebat, atque $B E$ æqualis est ipsi $t V$; quæ recta $A C$ obtinet quamproximè omnes conditiones requisitas ut sit chorda arcus qui est vestigium trajectory cometæ inter longitudinem primam $T A$, et tertiam interceptæ, ac proinde punctum B , habet omnes conditiones ut sit proximè vestigium cometæ in observatione secundâ. Recti igitur determinatum est punctum B , quod primâ vice usurpare licet.

gulum A S C, id est, ut S N ad S M. Quare A C est ad longitudinem in tangente descriptam, ut S μ ad S N. Cùm autem velocitas cometæ in altitudine S P sit (per Corol. 6. Prop. XVI. Lib. I.) ad ejus velocitatem in altitudine S μ , in subduplicatâ ratione S P ad S μ inversè, id est, in ratione S μ ad S N; ⁽¹⁾ longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in tangente descriptam, ut S μ ad S N. Igitur A C et longitudo hâc novâ velocitate descripta, cùm sint ad longitudinem in tangente descriptam in eâdem ratione, æquantur inter se. Q. e. d.

⁽²⁾ Corol. Cometa igitur eâ cum velocitate, quam habet in altitudine S $\mu + \frac{1}{2}$ I μ , eodem tempore describeret chordam A C quamproximè.

LEMMA XI.

Si cometa motu omni privatus de altitudine S N seu S $\mu + \frac{1}{2}$ I μ demitteretur, ut caderet in Solem, et eâ semper vi uniformiter continuatâ urgeretur in Solem, quâ urgetur sub initio; idem semisse temporis, quo in orbe suo describit arcum A C, descensu suo describeret spatium longitudini I μ æquale.

Nam cometa, quo tempore describit arcum parabolicum A C, eodem tempore eâ cum velocitate, quam habet in altitudine S P (per Lemma novissimum) describet chordam A C, ideóque (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) eodem tempore in circulo, cujus semi-diameter esset S P, vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum, cujus longitudo esset ad arcûs parabolici chordam A C, in subduplicatâ ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in Solem in altitudine S P, cadendo de altitudine illâ in Solem, describeret semisse temporis illius ⁽¹⁾ per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis S P, id est, spatium $\frac{A I q.}{4 S \mu}$. ⁽²⁾ Unde cùm pondus cometæ in Solem in altitudine

æqualis $\frac{1}{3}$ I μ , et est M $\mu = \mu$ I (num. 139).

Quare M N = $\frac{4}{3}$ I μ . Est igitur spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente et rectâ S μ , ad spatium contentum sub chordâ A C, et rectâ S M, ut S M $\frac{1}{2}$ M N ad S M, hoc est, ut S N ad S M: Unde si longitudo descripta in tangente dicatur L, erit L \times S μ : A C \times S M = S N: S M, ideóque longitudo descripta in tangente erit ad chordam A C, ut $\frac{S N}{S \mu}$ ad $\frac{S M}{S M}$, hoc est, ut S N ad S μ .

⁽¹⁾ • Longitudo. Nam longitudes iisdem

temporibus uniformi motu descriptæ sunt ut velocitates (5. Lib. I.).

⁽²⁾ • Corol. Si S μ , sit admodum magna respectu μ N, tres geometricè proportionales S μ , S N, S P, erunt etiam arithmeticè proportionales quamproximè, id est N P; æquabitur μ N, sive trienti ipsius I μ , ideóque μ P, æqualis quamproximè $\frac{2}{3}$ ipsius I μ . Quare patet Corollarium.

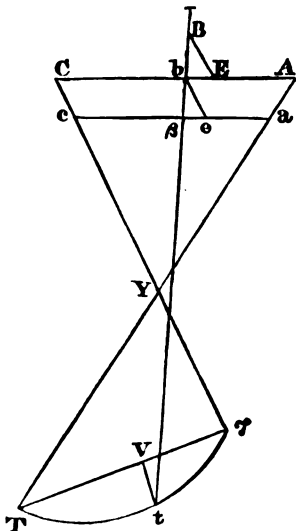
⁽¹⁾ • Per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I. Vel per num. 201. ejusdem Lib.

⁽²⁾ • Undè cùm pondus cometæ. Gravitæ acceleratrix cometæ versus Solem in distantia

perexigua obvenerit; postquam inventa sunt puncta F, f et G, g, actæ rectæ F f et G g secabunt T A et r C (*) in punctis quæsitis X et Z.

(*) • In punctis quæsitis X et Z. (Ut patet ex notâ (*), in hanc Prop.).

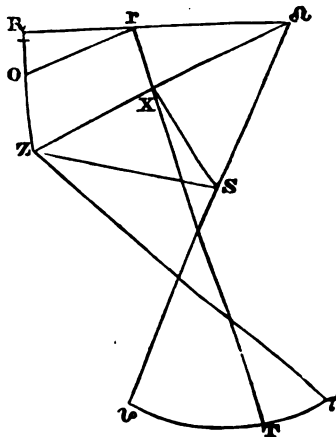
146. Si elliptica cometæ orbita magis accuratè observationibus satisfacere deprehendatur, ea sic poterit describi. Reperiatur vestigium cometæ in plano eclipticæ in observatione secundâ, eundem ordinem situmque obtinet vestigium illud



inter puncta B, b, β , quem punctum Z, inter C, c, γ , vel X, inter A, a, α . Ex vestigio sic invento, ad planum eclipticæ erigatur normalis quæ est tangens latitudinis in observatione secundâ ad radium æqualem distantie inter locum t, dictumque vestigium. Hujus perpendiculi extremum punctum signabit locum cometæ in orbitâ propriâ secundò observatum. Denique umbilico S, per puncta X, Z, et punctum modò inventum describatur ellipsis (Prop. XX. Lib. I.), hæc erit quæsita cometæ trajectory.

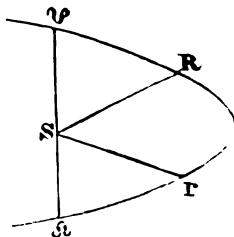
147. Ex præcedentis Problematis solutione colligi possunt positio lineæ nodorum trajectorye et tempus quo cometa nodos tenet. Iisdem manentibus, et per easdem litteras designatis ut supra, producantur rectæ Z X, R r, donec concurrant in Ω , junganturque S Z, S X, S Ω jam verò (ex præced.) data sunt omnia puncta S, Z, X, ideoque trianguli S Z X, tam latera quàm anguli, ac proinde innotescit etiam angulus S X Ω . Ex loco r, ducatur r O, ad Z X parallela rectæ R Z, occurrens in O, erunt triacula R O r et r X Ω , æquiangula, ideoque cum ex notis lateribus O r = Z X, et O R, differentiâ notarum rectarum R Z et r X unâ

cum angulo recto R O r, innotescant reliqua latera et anguli, dabuntur quoque anguli trianguli r X Ω . Sed datur in hoc triangulo latus unum X r, dabuntur ergò et reliqua nempe X Ω et r Ω . Deinde in triangulo Ω X S, nota sunt latera X S, X Ω , cum angulo inter-



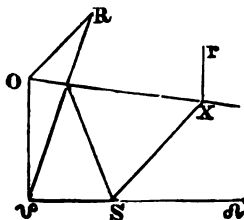
cepto S X Ω , innotescet itaque angulus X S Ω . Sed datur (per observ.) positio rectæ S X, sive angulus quem facit cum T X. Nam in triangulo X T S, dantur latera T S, T X et angulus X T S, distantia inter locum Solis cognitum locumque cometæ primò observatum. Unde innotescit T X S, ac proinde et positio rectæ Ω S Ω , hoc est, dabuntur loca nodorum e Sole visa. Quod si æquales fuerint rectæ Z R, X r, nodorum linea parallela est rectæ Z X, ideoque positione cognita.

Ad determinandum tempus quo cometa in nodo versatur, sit R r, trajectory cometæ (per

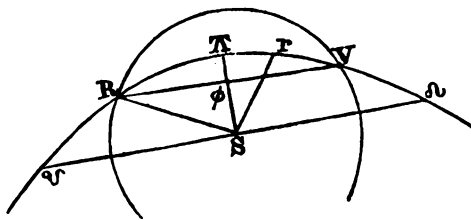


Prop. præced.) descripta, sitque superius inventa nodorum linea Ω S Ω , trajectory in Ω et Ω occurrens, erit (Prop. I. Lib. I.) intervallum

O 8. Deinde in triangulo $R O 8$, dantur
latera circa rectum $O R$ et $O 8$, ideóque notus



erit angulus $O \mathcal{U} R$, qui est inclinatio plani
trajectoriae ad planum eclipticae.



servatione primâ, dum cometa versabatur in r , est ad intervallum temporis inter observationem primam et tertiam ut area $r S \sigma$ ad aream $R r S$, habebitur illud ipsum tempus quo cometa perihelium occupat.

150. Hinc etiam cometæ perigæum ejusque tempus determinabitur. Cùm enim detur tempus inter observationem primam et tertiam interceptum, quo scilicet data area $r R \delta$, a cometâ radio ad Solem ducto describitur, data quoque erit area uno die similiter descripta. Præterea datur r , locus cometæ in observatione primâ, quare dantur loca cometæ in proprio orbe ad dies singulos. Sed dantur loca Telluris in orbitâ suâ, notusque est situs mutuus inter Telluris orbitam et cometæ trajectoryam. Unde innotescit tempus quo cometa est Terræ proximus, hoc est, tempus quo cometa in perigæo versatur.

Exemplum.

Proponatur cometa anni 1680. Hujus motum a Flamstedio observatum et ex observationibus computatum, atque ab Halleio ex iisdem observationibus correctum, tabula sequens exhibet.

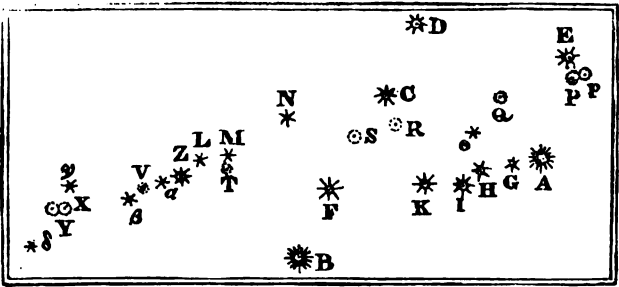
	Tem. appar.	Temp. verum	Long. Solis	Cometæ	
	h. ' "	h. ' "	o ' "	Longitudo o ' "	Lat. bor. o ' "
1680. Dec. 12	4. 46	4. 56. 0	♄ 1. 51. 23	♄ 6. 32. 30	8. 28. 0
21	6. 32½	6. 36. 59	11. 6. 44	♄ 5. 8. 12	21. 42. 13
24	6. 12	6. 17. 52	14. 9. 26	18. 49. 23	25. 23. 5
26	5. 14	5. 20. 44	16. 9. 22	28. 24. 13	27. 0. 52
29	7. 55	8. 3. 2	19. 19. 43	♄ 13. 10. 41	28. 9. 58
30	8. 2	8. 10. 26	20. 21. 9	17. 38. 20	28. 11. 53
1681. Jan. 5	5. 51	6. 1. 38	26. 22. 18	♄ 8. 48. 53	26. 15. 7
9	6. 49	7. 0. 53	♄ 0. 29. 2	18. 44. 4	24. 11. 56
10	5. 54	6. 6. 10	1. 27. 43	20. 40. 50	23. 43. 52
13	6. 56	7. 8. 55	4. 33. 20	25. 59. 48	22. 17. 28
25	7. 44	7. 58. 42	16. 45. 36	♄ 9. 35. 0	17. 56. 30
30	8. 7	8. 21. 53	21. 49. 58	13. 19. 51	16. 42. 18
Feb. 2	6. 20	6. 34. 51	24. 46. 59	15. 13. 53	16. 4. 1
5	6. 50	7. 4. 41	27. 49. 51	16. 59. 6	15. 27. 3

His adde observationes quasdam e nostris.

	Tem. appar.	Cometæ Longitudo	Cometæ Lat. bor.
1681. Feb. 25	8 ^h . 30'	♄ 26°. 18'. 35"	12°. 46'. 46"
27	8. 15	27. 4. 30	12. 36. 12
Mar. 1	11. 0	27. 52. 42	12. 23. 40
2	8. 0	28. 12. 48	12. 19. 38
5	11. 30	29. 18. 0	12. 3. 16
7	9. 30	♄ 0. 4. 0	11. 57. 0
9	8. 30	0. 43. 4	11. 45. 52

Hæ observationes telescopio septupedali, et micrometro filisque in foco telescopii locatis peractæ sunt: quibus instrumentis et positiones fixarum inter se et positiones cometæ ad fixas determinavimus. Designet A stellam quartæ magnitudinis in sinistro calcaneo Persei (Bayero o) B stellam sequentem tertiæ magnitudinis in sinistro pede (Bayero ζ) et C stellam sextæ magnitudinis (Bayero n) in talo ejusdem pedis, ac D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ stellas alias minores in eodem pede.

Sintque p, P, Q, R, S, T, V, X, loca cometæ in observationibus infra descriptis : et existente distantia A B partium $80\frac{7}{12}$, erat A C partium $52\frac{1}{4}$, B C $58\frac{1}{2}$, A D $57\frac{5}{12}$, B D $82\frac{6}{11}$, C D $23\frac{2}{3}$, A E $29\frac{1}{4}$, C E $57\frac{1}{2}$, D E $49\frac{1}{4}$, A I $27\frac{7}{12}$, B I $52\frac{1}{2}$, C I $36\frac{7}{12}$, D I $53\frac{5}{11}$, A K $38\frac{2}{3}$, B K 43,



C K $31\frac{1}{2}$, F K 29, F B 23, F C $36\frac{1}{4}$, A H $18\frac{5}{8}$, D H $50\frac{7}{8}$, B N $46\frac{5}{12}$, C N $31\frac{1}{2}$, B L $45\frac{1}{12}$, N L $31\frac{1}{2}$. H O erat ad H I ut 7 ad 6 et producta transibat inter stellas D et E, sic ut distantia stellæ D ab hac rectâ esset $\frac{1}{6}$ C D. L M erat ad L N ut 2 ad 9, et producta transibat per stellam H. His determinabantur positiones fixarum inter se.

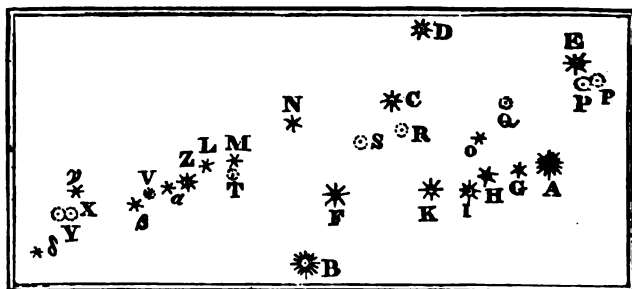
Tandem Poundius noster iterum observavit positiones harum fixarum inter se, et earum longitudes et latitudes in tabulam sequentem retulit.

Fixarum.	Longitudinea.			Lat. boreæ.		
	o	'	"	o	'	"
A	26.	41.	50	12.	8.	3
B	28.	40.	23	11.	17.	54
C	27.	58.	30	12.	40.	25
E	26.	27.	17	12.	52.	7
F	28.	28.	37	11.	52.	22
G	26.	56.	8	12.	4.	58
H	27.	11.	45	12.	2.	1
I	27.	25.	2	11.	53.	11
K	27.	42.	7	11.	53.	26
L	29.	33.	34	12.	7.	48
M	29.	18.	54	12.	7.	20
N	28.	48.	29	12.	31.	9
Z	29.	44.	48	11.	57.	13
α	29.	52.	3	11.	55.	48
β	0.	8.	23	11.	48.	56
γ	0.	40.	10	11.	55.	18
δ	1.	3.	20	11.	30.	42

Positiones verò cometæ ad has fixas observabam ut sequitur.

Die Veneris Feb. 25. st. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. cometæ in p existentis distantia a stellâ E erat minor quàm $\frac{5}{15}$ A E, major quàm $\frac{1}{3}$ A E, ideóque æqualis $\frac{3}{15}$ A E proxime: et angulus A p E nonnihil obtusus erat, sed ferè rectus. Nempe si demitteretur ad p E perpendiculum ab A, distantia cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{3}$ p E.

Eâdem nocte horâ $9\frac{1}{2}$, cometæ in P existentis distantia a stellâ E erat major quàm $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ A E, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ A E, ideóque æqualis $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ A E, seu $\frac{3}{9}$ A E quamproximè. A perpendiculo autem a stellâ A ad rectam P E demisso distantia cometæ erat $\frac{1}{3}$ P E.



Die Solis Feb. 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. cometæ in Q existentis distantia a stellâ O æquabat distantiam stellarum O et H, et recta Q O producta transibat inter stellas K et B. Positionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die Martis Mart. 1. hor. 11. p. m. cometa in R existens, stellis K et C accuratè interjacebat, et rectæ C R K pars C R paulo major erat quàm $\frac{1}{3}$ C K, et paulo minor quàm $\frac{1}{3}$ C K + $\frac{1}{8}$ C R, ideóque æqualis $\frac{1}{3}$ C K + $\frac{1}{16}$ C R seu $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ C K.

Die Mercurii Mart. 2. hor. 8. p. m. cometæ existentis in S distantia a stellâ C erat $\frac{1}{3}$ F C quamproximè. Distantia stellæ F a rectâ C S producta erat $\frac{1}{4}$ F C; et distantia stellæ B ab eâdem rectâ, erat quintuplo major quàm distantia stellæ F. Item recta N S producta transibat inter stellas H et I, quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ H quàm stellæ I.

Die Saturni Mart. 5. hor. $11\frac{1}{2}$ p. m. cometâ existente in T, recta M T æqualis erat $\frac{1}{2}$ M L, et recta L T producta transibat inter B et F, quadruplo vel quintuplo propior F quàm B, auferens a B F quintam vel sextam ejus partem versus F. Et M T producta transibat extra spatium B F ad partes stellæ B, quadruplo propior existens stellæ B quàm stellæ F.

Erat M stella perexigua quæ per telescopium videri vix potuit, et L stella major quasi magnitudinis octavæ.

Die Lunæ Mart. 7. hor. $9\frac{1}{2}$ p. m. cometâ existente in V, recta V α producta transibat inter B et F, auferens a B F versus F $\frac{1}{10}$ B F, et erat ad rectam V β ut 5 ad 4. Et distantia cometæ a rectâ $\alpha \beta$ erat $\frac{1}{2}$ V β .

Die Mercurii Mart. 9. horâ $8\frac{1}{2}$ p. m. cometâ existente in X, recta γ X æqualis erat $\frac{1}{4}$ $\gamma \delta$, et perpendicularum demissum a stellâ δ ad rectam γ X erat $\frac{2}{3}$ $\gamma \delta$.

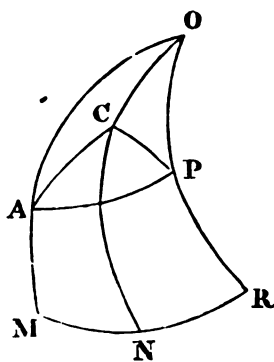
Eâdem nocte horâ 12, cometâ existente in Y, recta γ Y æqualis erat $\frac{1}{3}$ $\gamma \delta$, aut paulo minor, putâ $\frac{1}{4}$ $\gamma \delta$, et perpendicularum demissum a stellâ δ ad rectam γ Y æqualis erat $\frac{1}{2}$ $\gamma \delta$ vel $\frac{1}{4}$ $\gamma \delta$ circiter. Sed cometa ob viciniam horizontis cerni vix potuit, nec locus ejus tam distinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum et computationes derivabam (*) longitudines et latitudines cometæ, et Poundius noster ex correctis fixarum locis loca cometæ correxit, et loca correcta habentur supra. Micrometro parùm affabrè constructo usus sum, sed longitudinum tamen et latitudinum errores (quatenus ex observationibus nostris oriantur) minutum unum primum vix superant. Cometa autem (juxta observationes nostras) in fine motûs sui notabiliter deflectere cœpit boream versûs, a parallelo quem in fine mensis Februarii tenuerat.

(*) 149. * *Longitudines et latitudines.* Si observentur distantie cometæ a duabus fixis quarum longitudines et latitudines notæ sunt, inveniuntur cometæ longitudo et latitudo ad tempus observationis. Referat M R, portionem eclipticæ cujus polus O, sint A, P duæ stellæ quarum longitudines et latitudines datæ sunt, sitque C cometa cujus distantia a duabus stellis A, P nota sit. In triangulo A O P, ex datis A O, P O complementis latitudinum stellarum et angulo A O P cujus mensura est arcus M R differentia longitudinum, dabitur A P distantia stellarum, atque innotescet angulus O P A. Jam verò in triangulo A C P dantur omnia latera, unde inveniatur angulus C P A, quo subtracto ex angulo O P A relinquetur angulus O P C. Quare dabitur angulus P O C cujus mensura est arcus N R, differentia scilicet longitudinum stellæ P et cometæ C. Item innotescet arcus O C, qui est complementum latitudinis cometæ. Eâdem prorsus ratione, si observentur distantie cometæ a duabus fixis quarum ascensiones rectæ et declinationes notæ sunt, inde colliguntur ascensio recta et declinatio cometæ.

150. Datis declinatione et ascensione rectâ alicujus stellæ fixæ, inveniri possunt declinatio et ascensio recta cometæ, modò tamen stella et cometa transire vicissim possint per campum

telescopii immoti aut alio quocumque modo obtineatur differentia declinationis et ascensionis rectæ inter fixam et cometam (39. Lib. III.) et



hinc dabuntur cometæ longitudo et latitudo (17. Lib. III.).

151. Datis cometæ longitudine et latitudine, simulque notâ longitudine Solis, datur distantia

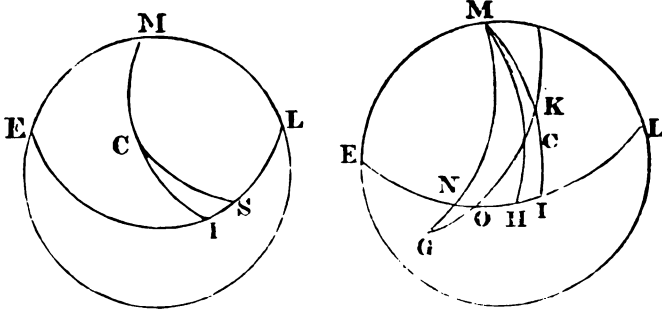
Jam ad orbem cometæ determinandum, selegi ex observationibus hactenus descriptis, tres quas Flamstedius habuit Dec. 21. Jan. 5. et Jan. 25. (b) Ex his inveni $S t$ partium 9842.1 et $V t$ partium 455, quales 10000 sunt semi-diameter orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo $t B$ partium 5657, inveni $S B$ 9747, $B E$ primâ vice 412, $S \mu$ 9503, $i \lambda$ 413 : $B E$ secundâ vice 421, OD 10186, X 8528.4 MP 8450,

cometæ a Sole. Sit enim $E L$ portio eclipticæ, Sol in S , latitudo cometæ $C I$; in triangulo $C I S$, ad I rectangulo (7. Lib. III.) datur latus $C I$, itemque notum est latus $I S$ differentia longitudinum Solis et cometæ, ideoque innotescit distantia cometæ a Sole $C S$.

152. Si duobus diebus sese invicem immediatè subsequentibus observentur longitudines H, I et latitudines $C H, K I$ cometæ alicujus, dabitur arcus $K C$ quem cometa motu diurno proprio descripsit. Quoniam enim in triangulo $K M C$, datur angulus quem metitur arcus $I H$ longitudinum differentia, simulque nota sunt latera $K M, C M$, quæ sunt datarum latitudinum $K I, C H$ complementa, innotescet arcus $K C$. Si verò altera latitudo fuerit australis, putâ $C H$, altera borealis ut $G N$, latus $G M$ est summa

observatus, a loco nodi O subtrahatur longitudo cometæ I , relinquetur arcus $O I$. Datis in triangulo $K O I$, ad I rectangulo, lateribus $K I, O I$, dabitur arcus $K O$ quem cometa a primo observationis die usque ad eclipticam descripsit. Jam verò arcus $K O$ conferatur cum arcubus descriptis ab initio observationis cometæ in K , ad datum usque aliquod momentum singulis diebus pro arbitrio assumptum. Hinc proportionali parte adhibita, circiter colligetur tempus quo cometa secuit eclipticam. Simili modo invenietur tempus quo trajecit æquatorem.

155. Si cometa primò observetur in eadem rectâ cum duobus fixis, deinde in aliâ quoque rectâ cum duobus aliis fixis observetur, accuratè trajectis per quatuor illas stellas ductus filis in superficie globi cœlestis, intersectio filorum de-



latitudinis $G N$ et quadrantis $N M$, ac proinde etiam in hoc casu dabitur arcus $C G$.

153. Iisdem manentibus, inveniri potest nodus O orbitæ cometæ, datis enim in triangulo $M C K$ lateribus $M C, M K$, cum angulo intercepto M quem metitur longitudinum datarum differentia $H I$, dabitur angulus $M K C$, qui ex 180° . subductus, relinquit angulum $O K I$. Jam verò datis triangulo $O K I$, ad I rectangulo, latitudine $I K$, et angulo $O K I$, invenitur angulus $I O K$, daturque arcus $O I$, quo addito longitudini I , obtinetur distantia nodi O a principio Arietis. Ex præcedentibus patet, datis duabus ascensionibus rectis et declinationibus, inveniri quoque motum cometæ proprium, inclinationem orbitæ ad æquatorem et punctum in quo orbita illa æquatorem intersecat.

154. Iisdem positus sit K locus cometæ primò

terminabit locum cometæ pro tempore observationis. Si eodem modo definiantur alia cometæ loca, illius semita in superficie globi cœlestis delineabitur.

156. Accuratè designatis in superficie globi cometæ locis, filum duobus locis applicatum per cætera omnia propemodum transire videbitur; hæc igitur loca ferè sunt in peripheriâ circuli maximi, ideoque cometa ex Terrâ in circuli maximi peripheriâ incidere apparebit. Quare si filum per duo loca transiens extendatur donec eclipticam et æquatorem secet, habebuntur loca nodi, et inclinatio orbitæ cometæ simulque punctum in quo cometa trajecit æquatorem.

(b) * Ex his invenit. Quâ ratione sequentes determinationes possint inveniri vel graphice vel arithmetice, patet ex constructione Prop. præced. et ex iis quæ huic Propositioni addidimus.

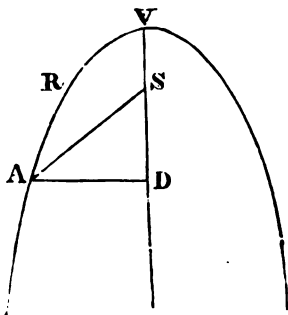
M N 8475, N P 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam t b 5640. Et per hanc operationem tandem distantias T X 4775 et r Z 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus descendentem in ϖ et ascendentem in ϖ 1st. 53'; inclinationem plani ejus ad planum eclipticæ 61st. 20 $\frac{1}{2}$ '; verticem ejus (seu perihelium cometæ) distare a nodo 8st. 38', et esse in \nearrow 27st. 43'. cum latitudine australi 7st. 34'; et ejus latus rectum esse 236.8, areamque radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semi-diametri orbis magni posito 100000000; cometam verò in hoc orbe secundum seriem signorum processisse, et Decemb. 8^d. 0^h. 4'. p. m. in vertice orbis seu perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium et chordas angulorum ex tabulâ sinuum naturalium collectas determinavi graphicè, construendo schema satis amplum, in quo videlicet semi-diameter orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16 $\frac{1}{2}$ pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an cometa in orbe sic invento verè moveretur, collegi per operationes partim arithmeticas partim graphicas loca cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in tabulâ sequente videre licet

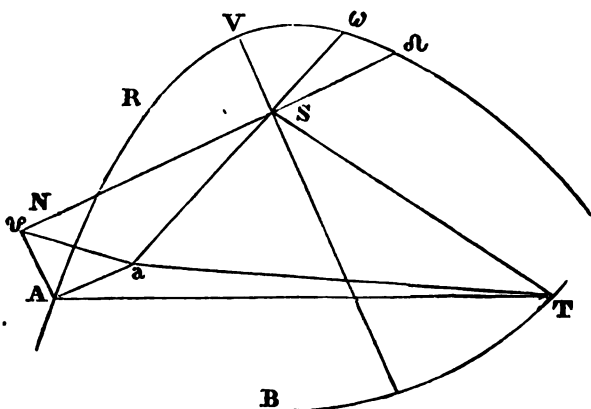
	Dist. Co- met. a Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr.	gr.	gr.	gr.		
Dec. 12	2792	ϖ 6. 32'	8. 18 $\frac{1}{2}$	ϖ 6. 31 $\frac{1}{2}$	8. 26	+ 1	- 7 $\frac{1}{2}$
29	8403	\nearrow 13. 13 $\frac{3}{4}$	28. 0	\nearrow 13. 11 $\frac{1}{2}$	28. 10 $\frac{1}{2}$	+ 2	- 10 $\frac{1}{2}$
Feb. 5	16669	\nearrow 17. 0	15. 29 $\frac{3}{4}$	\nearrow 16. 59 $\frac{1}{2}$	15. 27 $\frac{3}{4}$	+ 0	+ 2 $\frac{1}{4}$
Mar. 5	21737	29. 19 $\frac{1}{2}$	12. 4	29. 20 $\frac{1}{2}$	12. 3 $\frac{1}{2}$	- 1	+ $\frac{1}{2}$

Postea verò Halleius noster orbitam ^(c) per calculum arithmeticum accuratius determinavit, quàm per descriptiones linearum fieri licuit; et

^(c) 157. * Per calculum arithmeticum. Calculi hujus instituendi methodum exponemus. Sit S Sol. V R A orbita cometæ parabolica, cujus vertex V, sitque V S, distantia umbilici a vertice = f, erit parabolæ latus rectum principale = 4 f. Fiat A D = x, erit spatium V R A S = $\frac{x^3 + 12 f^2 x}{24 f}$ (140). Ponatur area illa dato rectilineo æqualis putà b b, habebitur æquatio $24 f b b = x^3 + 12 f^2 x$. Resolutâ hâc æquatione cubicâ per vulgares algebrae regulas, vel per constructionem geometricam, adhibitis parabolâ et circulo, innotescet ordinatim applicata A D. Datâ autem A D, dabitur V D, (per Theor. II. de parab.) quare nota quoque erit recta composita ex D V et V S, cui æqualis est recta S A, (ibid.), ideòque recta illa dabitur



his datis, calculo itidem arithmetico accuratè instituto, loca cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.



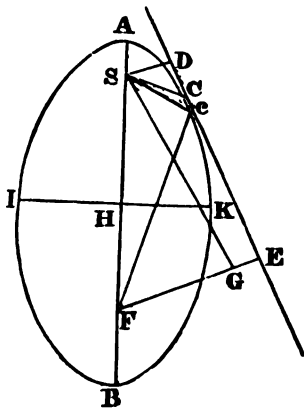
est positio rectæ Ta , hoc est, cometæ longitudo geocentrica, sive locus cometæ geocentricus ad eclipticam reductus. Deindè in triangulo rectangulo AaT , dantur latera duo in paribus mediocris distantie Telluris a Sole expressa (158. et ex theoriâ Telluris). Quare innotescent angulus ATa , hoc est, cometæ latitudo geocentrica, itemque dabitur hypothenusa Ta , distantia scilicet cometæ a Terrâ. Ex his itaque patet quomodo ad data observationum tempora, instituto calculo, loca cometæ possint computari. Clariss. Halleyus iisdem usue principiis ad definiendos cometarum motus maximo labore tabulas construxit. Harum tabularum normam videat lector in ejusdem celeberrimi viri Opusculo quod inscribitur: *Cométographia, seu Astronomiæ Cometæ Synopsis*.

160. Si cometæ orbitas ellipticas describere et duas Kepleri leges observare ponantur, hoc est, si temporum periodicorum quadrata sint ut cubi mediocrium distantiarum a Sole, et areæ ellipticæ radiis ad Solem ductis sint temporibus proportionales, faciliè determinabitur orbitæ cometæ magnitudo, omnesque motus cometarum circumstantiæ definientur, quod elegantissimè præstitit D. Bouguer in *Monum. Paris. an. 1733*. clarissimi viri methodum hic adjungemus.

Ex datis tribus observationibus a se invicem parum distantibus, inveniatur cometæ velocitas in aliquo orbitæ suæ loco, et exigua ejusdem orbitæ portio determinetur. Quoniam tria observationum tempora parum a se invicem distant, portio orbitæ hoc temporis intervallo descripta considerari poterit tanquam linea recta vel ipsamet tangens orbitæ motu uniformi percursa, ideoque portio hæc rectilinea orbitæ et ipsa cometæ velocitas inveniri poterunt per Lem. IV. et per ea quæ huic Lemmati addidimus. Idem

quoque obtinebitur duplici elegantissimâ methodo quæ in *Monum. Paris.* loco citato legitur.

His præmissis, sit S Sol, C c exigua orbitæ cometæ portio ex tribus observationibus determinata. Quoniam nota est SC , distantia scilicet cometæ a Sole, atquè etiam innotescent angulus SCD , dabitur perpendicularis SD , hujus anguli SCD sinus, sumpto SC , pro radio. Dicatur $SC = a$, $SD = b$, designet e , spatium Cc , tempusculo f percursum, atque



$x = AB$, seu axi principali ellipseos quam cometa circâ Solem in umbilico S , positum integro tempore periodico t , describit. Ut determinentur quantitates x et t , conferre oportet motum cometæ cum motu cognito planetæ alicujus. Sit

q axis principalis ellipsoos quam planeta describit, n tempus periodicum, dicaturque p periphæria circuli cujus diameter est q. Quoniam axis principalis ellipsoos est summa maximæ et minimæ distantie planetæ a Sole, erit distantia mediocris planetæ a Sole æqualis dimidio axi principali, hoc est $\frac{1}{2} x$ est distantia mediocris cometæ,

et $\frac{1}{2} q$ distantia mediocris planetæ. Jam verò

fiat (per leg. 1. Kepleri.) $\frac{1}{8} q^3 : n^2 = \frac{1}{8} x^3 : t^2$

hinc fit $t = \frac{n x}{q} \sqrt{\frac{x}{q}}$. Inveniendi superest altera expressio temporis periodici t. Quoniam C c, est portio orbitæ admodum exigua, sector CS c, considerari poterit instar trianguli evanescentis cujus area $\frac{1}{2} S D \times C c = \frac{1}{2} b e$.

Quarè, per alteram Kepleri regulam, dicatur $\frac{1}{2} b e$ est ad f, ut area tota ellipsoos A C B I, ad integrum tempus periodicum t, unde habetur $t = \frac{f}{\frac{1}{2} b e} \times A C B I$. Nunc ut obtineatur

area A C B I, ex puncto C, ad alterum umbilicum E, agatur recta C F = A B — S C = x — a (Theor. III. de ellipsi). Ex eodem umbilico F, ad tangentem C c productam in E, demittatur perpendicularis F E, sitque S G parallela rectæ D E, triangu rectangula S C D, F C E similia sunt, ob angulos S C D, F C E, æquales (Theor. IV. de ellipsi) ideòque S C(a) : S D(b) = F C(x — a) : F E = $\frac{b x - a b}{a}$, ac proindè F G, seu F E — S D = $\frac{b x - 2 a b}{a}$.

Deinde (ob eorundem triangulorum similitudinem) S C(a) : C D ($\sqrt{a^2 - b^2}$) = F C(x — a) : C E = $\frac{x - a}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$, et hinc D E, vel S G, seu C E + C D = $\frac{x - a}{a} \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$.

Sed F G = $\frac{b x - 2 a b}{a}$ (ex dem.), quarè est

$$S F = \sqrt{\frac{b^2 x^2 - 4 a b^2 x + 4 a^2 b^2 + a^2 x^2 - b^2 x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 x^2 - 4 a b^2 x + 4 a^2 b^2}{a^2}}; \text{ ideòque dis-}$$

tantia S H vel F H umbilici alterutrius a centro = $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 x^2 - 4 a b^2 x + 4 a^2 b^2}{a^2}}$. Jam

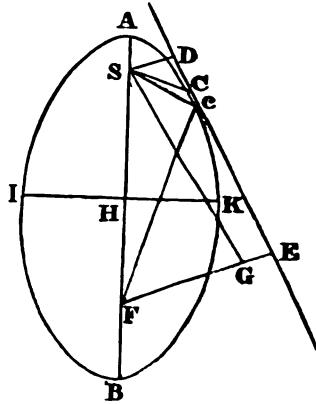
(ob triangulum S I H rectangulum in H, et per Theor. III. de ellipsi) erit I H = $\sqrt{\frac{1}{4} x^2 - \frac{a^2 x^2 - 4 a b^2 x + 4 a^2 b^2}{4 a^2}} = \frac{b}{a} \sqrt{a x - a^2}$

proindè axis minor I K = $\frac{2 b}{a} \sqrt{a x - a^2}$,

et factum ex axe majori in minorem = $\frac{2 b x}{a} \sqrt{a x - a^2}$. Sed est factum illud area rectanguli orbitæ ellipticæ circumscripti, et præterea (249. Lib. I.) area rectanguli hujus est ad aream ellipsoos ut quadratum axis A B, ad aream circuli huic quadrato inscripti; quarè $q^2 : \frac{1}{4} q p =$

$$\frac{2 b x}{a} \sqrt{a x - a^2} : A C B I = \frac{b p x}{2 a q}$$

$\sqrt{a x - a^2}$. Tandem in ultimâ expressione temporis periodici loco areæ A C B I, substituitur illius valor modò inventus, fiet $t = \frac{f p x}{a e q} \sqrt{a x - a^2}$, collatisque duobus ipsius t valoribus, habebitur $\frac{n x}{q} \sqrt{\frac{x}{q}} = \frac{f p x}{a e q} \sqrt{a x - a^2}$,



et reductâ æquatione $x = \frac{a f^2 p^2 q}{f^2 p^2 q - a e^2 n^2}$.

Jam si in expressionibus axis minoris et temporis periodici substituitur valor ipsius x, erit axis minor I K = $2 b e n \sqrt{\frac{a}{f^2 p^2 q - a e^2 n^2}}$

et tempus periodicum = $f^3 p^3 n \times \frac{a^{\frac{5}{2}}}{f^2 p^2 q - a e^2 n^2}^{\frac{3}{2}}$. Hinc patet determinari posse omnia quæ ad cometarum motus pertinent.

161. Si formulæ modò inventæ quantitates finitis et positivis exprimentur, orbita A C B I erit elliptica, ideòque cometa reditum habebit. Quia verò circulus est species quædam ellipsi, cometa circulum quoque poterit describere, in eo autem casu æquales erunt distantie S A, S C, S B, axisque A B duplus fiet distantie S C, ac proindè $\frac{a f^2 p^2 q}{f^2 p^2 q - a e^2 n^2} = 2 a$, et

hinc $e = \frac{f p}{n} \sqrt{\frac{q}{2 a}}$, valor scilicet spatioli C c a cometâ tempore f percursi. Si e a sit cometæ

Tempus verum.		Distantia Cometæ a ☉	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in	
					Long.	Lat.
d.	h. '		gr. ' "	gr. ' "	' "	' "
<i>Dec.</i>	12. 4. 46	28028	♊ 6. 29. 25	8. 26. 0 Bor.	— 3. 5	— 2. 0
	21. 6. 37	61076	♊ 5. 6. 50	21. 43. 20	— 1. 42	+ 1. 7
	24. 6. 18	70008	18. 48. 20	25. 22. 40	— 1. 3	— 0. 25
	26. 5. 21	75576	28. 22. 45	27. 1. 36	— 1. 28	+ 0. 44
	29. 8. 3	14021	♋ 13. 12. 40	28. 10. 10	+ 1. 59	+ 0. 12
	30. 8. 10	86661	17. 40. 5	28. 11. 20	+ 1. 45	— 0. 33
<i>Jan.</i>	5. 6. 1½	101440	♌ 8. 49. 49	26. 15. 15	+ 0. 56	+ 0. 8
	9. 7. 0	110959	18. 44. 36	24. 12. 54	+ 0. 32	+ 0. 58
	10. 6. 6	113162	20. 41. 0	23. 44. 10	+ 0. 10	+ 0. 18
	13. 7. 9	120000	26. 0. 21	22. 17. 30	+ 0. 33	+ 0. 2
	25. 7. 59	145370	♍ 9. 33. 40	17. 57. 55	— 1. 20	+ 1. 25
	30. 8. 22	155303	13. 17. 41	16. 42. 7	— 2. 10	— 0. 11
<i>Feb.</i>	2. 6. 35	160951	15. 11. 11	16. 4. 15	— 2. 42	+ 0. 14
	5. 7. 4½	166686	16. 58. 25	15. 29. 13	— 0. 41	+ 2. 10
	25. 8. 41	202570	26. 15. 46	12. 48. 0	— 2. 49	+ 1. 14
<i>Mar.</i>	5. 11. 39	216205	29. 18. 35	12. 5. 40	+ 0. 35	+ 2. 24

Apparuit etiam hic cometa mense Novembri præcedente, et Coburgi in Saxoniâ a d^{no}. Gottfried Kirch observatus est diebus mensis hujus quarto, sexto et undecimo, stilo veteri; et ex positionibus ejus ad proximas stellas fixas ope telescopii nunc bipedalis nunc decempedalis satis accuratè observatis, ac differentia longitudinum Coburgi et Londini graduum undecim et locis fixarum a Poundio nostro observatis, Halleius noster loca cometæ determinavit ut sequitur.

velocitas ut fiat $a e^2 n^2 = f^2 p^2 q$, tunc infinito æquales evadent expressiones axis majoris, minoris et temporis periodici; quare orbita cometæ mutabitur in ellipsim infinitè oblongatam seu parabolam, ideòque cometa reditum non habet. Tandem si $a e^2 n^2$, sit major quàm $f^2 p^2 q$, negativa fit expressio axis majoris, et orbita abit in hyperbolam, ac proinde cometa nunquam futurus est iterum conspicuus.

162. Ut prædictæ formulæ ad calculum reducantur, cometarum motus cum Telluris motu conferatur. Sit q dupla distantia mediocris Terræ a Sole, p peripheria circuli cujus diameter q , n annus sidereus seu intervallum 365. dier. 6^{hor}. 9': fiat mediocris distantia Telluris a Sole partium 10000000, ideòque $q = 20000000$, et $p = 62831853$, spatium $C c$ unius diei intervallo cometa ponatur descripsisse. His valoribus substitutis in formulis præcedentibus erit $x = \frac{59182659953557939 \times a}{59182659953557939 - a e^2}$ et $t = \frac{1659278095175402232 \times a^{\frac{3}{2}}}{59182659953557939 - a e^2}$. Jam nihil ampliùs faciendum superest, nisi ut in casibus

particularibus loco a , et e , substituantur valores per observationem determinati. Utrum verò cometa rediturus sit vel non cognoscetur, si quantitas $a e^2$, minor majorve reperitur numero constanti 59182659953557939. Minùs prolixus fiet calculus, si distantiam mediocrem Telluris a Sole ponamus partium 10000, tunc enim erit $x = \frac{591826599 \times a}{591826599 - a e^2}$ et $t = \frac{1859278095 \times a \sqrt{a}}{591826599 - a e^2 \times \sqrt{591826599 - a e^2}}$.

Exemplo sit cometa qui annis 1729. 1730. apparuit. Ex observationibus clariss. Cassini colligitur die 13. Octobris an. 1729. distantiam $S C$ cometæ a Sole, fuisse partium 42998, exiguam orbitæ portionem diei unius intervallo descriptam, fuisse partium 122 $\frac{452}{10000}$, atque angulum $D C S$, fuisse 82°. 11'. Hinc invenitur quantitas $a e^2$ major quàm 591826599, ideòque (161.) orbita cometæ est hyperbola, ac proinde expectandus non est hujus cometæ regressus. Cæterùm hæc vera sunt in eâ duntaxat hypothesi quod cometæ duas Kepleri leges observent.

Novemb. 3^d. 17^h. 2'. tempore apparente Londini, cometa erat in Ω 29^{gr}. 51'. cum lat. bor. 1^{gr}. 17'. 45".

Novemb. 5^d. 15^h. 58'. cometa erat in π 3^{gr}. 23'. cum lat. bor. 1^{gr}. 6'.

Novemb. 10^d. 16^h. 31'. cometa æqualiter distabat a stellis Leonis σ ac τ Bayero; nondum verò attigit rectam easdem jungentem, sed parum abfuit ab eâ. In stellarum catalogo Flamstediano σ tunc habuit π 14^{gr}. 15'. cum lat. bor. 1^{gr}. 41'. ferè, τ verò π 17^{gr}. 3½, cum lat. austr. 0^{gr}. 34'. Et medium punctum inter has stellas fuit π 15^{gr}. 39¼'. cum lat. bor. 0^{gr}. 33½'. Sit distantia cometæ a rectâ illâ 10' vel 1½ circiter, et differentia longitudinum cometæ et puncti illius mediî erit 7', et differentia latitudinum 7½' circiter. Et inde cometa erat in π 15^{gr}. 32'. cum lat. bor. 26'. circiter.

Observatio prima ex situ cometæ ad parvas quasdam fixas abundè satis accurata fuit. Secunda etiam satis accurata fuit. In tertiâ, quæ minis accurata fuit, error minutorum sex vel septem subesse potuit, et vix major. Longitudo verò cometæ in observatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat Ω 29^{gr}. 30'. 22". latitudo borealis 1^{gr}. 25'. 7". et distantia ejus a Sole 115546.

Porro Halleius observando quod cometa insignis intervallo annorum 575 quater apparuisset, scilicet mense Septembri post cædem Julii Cæsaris, anno Christi 531 Lampadio et Oreste Coss. anno Christi 1106 mense Febuario, et sub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ et insigni (præterquam quod sub mortem Cæsaris, cauda ob incommodam Telluris positionem minùs apparuisset:) quæsivit orbem ellipticum cujus axis major esset partium 1382957, existente mediocri distantia Telluris a Sole partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 (^d) revolvi possit. Et ponendo nodum ascendentem in ϖ 2^{gr}. 2'; inclinationem plani orbis ad planum eclipticæ 61^{gr}. 6'. 48"; perihelium cometæ in hoc plano \dagger 22^{gr}. 44'. 25"; tempus æquatum perihelii Decemb. 7^d. 23^h. 9'; distantiam perihelii a nodo ascendente in plano eclipticæ 9^{gr}. 17'. 35"; et axem conjugatum 18481.2: (^e) computavit motum cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus tam ex observationibus deducta quàm in hoc orbe computata exhibentur in tabulâ sequente.

(^d) 163. * *Revolvi possit.* Quadrata temporum periodicorum in cometis æquè ac in planetis ponantur ut cubi mediocrium distantiarum a Sole, tempus periodicum cometæ dicatur t , tempus periodicum Terræ circâ Solem dicatur T , distantia mediocris Terræ a Sole sit D , axis major ellipseos a cometâ descriptæ sit $2a$, ideóque mediocris distantia cometæ a Sole = a , erit $T^2 : t^2 = D^3 : a^3$. Fiat $D = 10000$ partibus $T = 365$ dieb. 6^{hor}. 9' = 525969, $t = 575$

annis, invenietur $2a$, seu axis major ellipseos a cometâ descriptæ, partium 1382957, existente mediocri distantia Telluris a Sole earundem partium 10000. In hoc igitur orbe cometa annis 575 revolvi potest.

(^e) *Computavi motum cometæ.* Ratio computi ineundi patet ex num. 158. 159. vel etiam ex methodo clariss. D. Bouguer num. 160 et seq.

Tempus verum.	Long. obs.		Lat. Bor. obs.	Long. Comp.		Lat. Comp.	Errores in	
							Long.	Lat.
d. h. "	gr. ' "	gr. ' "		gr. ' "	gr. ' "		' "	' "
Nov. 3. 16. 47	Ω 29. 51. 0	1. 17. 45	Ω	29. 51. 22	1. 17. 32 B		+ 0. 22	- 0. 11
5. 15. 37	π 3. 23. 0	1. 6. 0	π	3. 24. 32	1. 6. 9		+ 1. 32	+ 0. 9
10. 16. 18	15. 32. 0	0. 27. 0		15. 33. 2	0. 25. 7		+ 1. 2	- 1. 53
16. 17. 0			Δ	8. 16. 45	0. 53. 7 A			
18. 21. 34				18. 52. 15	1. 26. 54			
20. 17. 0				28. 10. 36	1. 53. 35			
23. 17. 5			π	13. 22. 42	2. 29. 0			
Dec. 12. 4. 46	ψ 6. 32. 30	8. 28. 0	ψ	9. 31. 20	8. 29. 6 B		- 1. 10	+ 1. 6
21. 6. 37	5. 8. 12	21. 42. 13		5. 6. 14	21. 44. 42		- 1. 58	+ 2. 29
24. 6. 18	18. 49. 23	25. 23. 5		18. 47. 30	25. 23. 35		- 1. 53	+ 0. 30
26. 5. 21	28. 24. 13	27. 0. 52		28. 21. 42	27. 2. 1		- 2. 31	+ 1. 9
29. 8. 3	χ 13. 10. 41	28. 9. 58	χ	13. 11. 14	28. 10. 38		+ 0. 33	+ 0. 40
30. 8. 10	17. 38. 20	28. 11. 53		17. 38. 27	28. 11. 37		+ 0. 7	- 0. 16
Jan. 5. 6. 1½	γ 8. 48. 53	26. 15. 7	γ	8. 48. 51	26. 14. 57		- 0. 2	- 0. 10
9. 7. 1	18. 44. 4	24. 11. 56		18. 43. 51	24. 12. 7		- 0. 13	+ 0. 21
10. 6. 6	20. 40. 50	23. 43. 32		20. 40. 23	23. 43. 25		- 0. 27	- 0. 75
13. 7. 9	25. 59. 48	22. 17. 28		26. 0. 8	22. 16. 32		+ 0. 20	- 0. 56
25. 7. 59	γ 9. 35. 0	17. 56. 30	γ	9. 34. 11	17. 56. 6		- 0. 49	- 0. 24
30. 8. 22	13. 19. 51	16. 42. 18		11. 18. 28	16. 40. 5		- 1. 23	- 2. 13
Feb. 2. 6. 35	15. 13. 53	16. 4. 1		15. 11. 59	16. 2. 7		- 1. 54	- 1. 54
5. 7. 4½	16. 59. 6	15. 27. 3		16. 59. 17	15. 27. 0		+ 0. 11	- 0. 3
25. 8. 41	26. 18. 35	12. 46. 46		26. 16. 59	12. 45. 22		- 1. 36	- 1. 24
Mar. 1. 11. 10	27. 52. 42	12. 23. 40		27. 51. 47	12. 22. 28		- 0. 55	- 1. 12
5. 11. 39	29. 18. 0	12. 3. 26		29. 20. 11	12. 2. 50		+ 2. 11	- 0. 26
9. 8. 38	0. 43. 4	11. 45. 52	Π	0. 42. 43	11. 45. 35		- 0. 21	- 0. 17

Observationes cometæ hujus a principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam descripto, quàm motus planetarum congruere solent cum eorum theoriis, et congruendo probant unum et eundem fuisse cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejusque orbem hic rectè definitum fuisse.

In tabulâ præcedente omisimus observationes diebus Novembris 16, 18, 20 et 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus observatus fuit. Ponthæus utique et socii, Novemb. 17. st. vet. horâ sextâ matutinâ Romæ, id est, horâ 5. 10'. Londini, filis ad fixas applicatis, cometam observarunt in Δ 8^{gr.} 30'. cum latitudine australi 0^{gr.} 40'. Extant eorum observationes in Tractatu, quem Ponthæus de hoc cometâ in lucem edidit. Cellius, qui aderat et observationes suas in Epistolâ ad D. Cassinum misit, cometam eâdem horâ vidit in Δ 8^{gr.} 30'. cum latitudine australi 0^{gr.} 30'. Eâdem horâ Galletius Avenioni (id est, horâ matutinâ 5, 42 Londini) cometam vidit in Δ 8^{gr.} sine latitudine. Cometa autem per theoriam jam fuit in Δ 8^{gr.} 16'. 45". cum latitudine australi 0^{gr.} 53'. 7".

Nov. 18. horâ matutinâ 6. 30'. Romæ (id est, horâ 5. 40'. Londini) Ponthæus cometam vidit in Δ 13^{gr.} 30'. cum latitudine australi 1^{gr.} 20'. Cellius in Δ 13^{gr.} 30'. cum latitudine australi 1^{gr.} 20'. Galletius autem

horâ matutinâ 5. 30'. Avenioni cometam vidit in $\simeq 13^{\text{gr.}} 00'$. cum latitudine australi $1^{\text{gr.}} 00'$. Et R. P. Ango in Academiâ Flexiensi apud Gallos, horâ quintâ matutinâ (id est, horâ 5. 9'. Londini) cometam vidit in medio inter stellas duas parvas, quarum una media est trium in rectâ lineâ in Virginis australi manu Bayero \downarrow , et altera est extrema ab Bayero δ . Unde cometa tunc fuit in $\simeq 12^{\text{gr.}} 46'$. cum latitudine australi $50'$. Eodem die Bostoniæ in Novâ Angliâ in latitudine $42\frac{1}{2}$. graduum, horâ quintâ matutinâ, (id est Londini horâ matutinâ 9. 44'.) cometa visus est prope $\simeq 14^{\text{gr.}}$ cum latitudine australi $1^{\text{gr.}} 30'$. uti a cl. Halleio accipi.

Nov. 19. hora mat. $4\frac{1}{2}$ Cantabrigiæ, cometa (observante juvene quodam) distabat a Spicâ π quasi $2^{\text{gr.}}$ boreazephyrum versus. Erat autem Spica in $\simeq 19^{\text{gr.}} 23' 47''$. cum lat. austr. $2^{\text{gr.}} 1' 59''$. Eodem die hor. 5. mat. Bostoniæ in Novâ Angliâ, cometa distabat a Spica π gradu uno, differentiâ latitudinum existente $40'$. Eodem die in Insula Jamaica, cometa distabat a Spicâ intervallo quasi gradus unius. Eodem die D. Arthurus Stoper ad fluvium Patuxent, prope Hunting Creek in Maryland, in confinio Virginie in lat. $38\frac{1}{2}^{\text{gr.}}$ horâ quintâ matutinâ (id est, horâ 10. Londini) cometam vidit supra Spicam π , et cum Spicâ propemodum conjunctum, existente distantia inter eosdem quasi $\frac{3}{4}^{\text{gr.}}$. Et (*) ex his observationibus inter se collatis colligo quod horâ 9. 44'. Londini cometa erat in $\simeq 18^{\text{gr.}} 50'$. cum latitudine australi $1^{\text{gr.}} 25'$. circiter. Cometa autem per theoriam jam erat in $\simeq 18^{\text{gr.}} 52' 15''$. cum latitudine australi $1^{\text{gr.}} 26' 54''$.

Nov. 20. D. Montenarus Astronomiæ Professor Paduensis, horâ sextâ matutinâ Venetiis (id est, horâ 5. 10'. Londini) cometam vidit in $\simeq 23^{\text{gr.}}$. cum latitudine australi $1^{\text{gr.}} 30'$. Eodem die Bostoniæ, distabat cometa a Spicâ π , $4^{\text{gr.}}$ longitudinis in orientem, ideoque erat in $\simeq 23^{\text{gr.}} 24'$. circiter.

Nov. 21. Ponthæus et socii hor. mat. $7\frac{1}{4}$. cometam observarunt in $\simeq 27^{\text{gr.}} 50'$. cum latitudine australi $1^{\text{gr.}} 16'$. Cellius in $\simeq 28^{\text{gr.}}$ Ango horâ quintâ matutinâ in $\simeq 27^{\text{gr.}} 45'$. Montenarus in $\simeq 27^{\text{gr.}} 51'$. Eodem die in Insulâ Jamaica cometa visus est prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spicâ Virginis, id est, $2^{\text{gr.}} 2'$. Eodem die ad horam quintam matutinam Ballasoræ in Indiâ Orientali, (id est ad horam noctis præcedentis 11. 20'. Londini) capta est distantia cometæ a Spicâ π $7^{\text{gr.}} 35'$. in orientem. In lineâ rectâ erat inter Spicam et Lancellum.

(*) * Ex his observationibus inter se collatis via cometæ inter stellas determinatur, et hinc colliguntur cometæ longitudo et latitudo (149.) hor. 9. 44'. Londini, reductione scilicet factâ ad meridianum Londinensem.

ideoque versabatur in $\simeq 26^{\text{gr.}} 58'$. cum lat. australi $1^{\text{gr.}} 11'$. circiter; et post horas 5. et 40'. (ad horam scilicet quintam matutinam Londini) erat in $\simeq 28^{\text{gr.}} 12'$. cum lat. austr. $1^{\text{gr.}} 16'$. Per theoriam verò cometa jam erat in $\simeq 28^{\text{gr.}} 10' 36''$. cum latitudine australi $1^{\text{gr.}} 53' 35''$.

Nov. 22. cometa visus est a Montenaro in $\text{m} 2^{\text{gr.}} 33'$. Bostoniæ autem in Novâ Angliâ apparuit in $\text{m} 3^{\text{gr.}}$ circiter, eadem ferè cum latitudine ac prius, id est, $1^{\text{gr.}} 30'$. Eodem die ad horam quintam matutinam Ballasoræ cometa observabatur in $\text{m} 1^{\text{gr.}} 50'$; ideoque ad horam quintam matutinam Londini cometa erat in $\text{m} 3^{\text{gr.}} 5'$. circiter. Eodem die Londini horâ mat. $6\frac{1}{2}$. Hookius noster cometam vidit in $\text{m} 3^{\text{gr.}} 30'$. circiter, idque in lineâ rectâ quæ transit per Spicam Virginis et Cor Leonis non exactè quidem, sed a lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. Montenarus itidem notavit quod linea a cometâ per Spicam ducta, hoc die et sequentibus transibat per australe latus Cordis Leonis, interposito perparvo intervallo inter Cor Leonis et hanc lineam. Linea recta per Cor Leonis et Spicam Virginis transiens, eclipticam secuit in $\text{m} 3^{\text{gr.}} 46'$; in angulo $2^{\text{gr.}} 51'$.

Et si cometa locatus fuisset in hâc lineâ in $\text{m} 3^{\text{gr.}}$ ejus latitudo fuisset $2^{\text{gr.}} 26'$. Sed cùm cometa consentientibus Hookio et Montenaro, nonnihil distaret ab hâc lineâ boream versus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex observatione Montenari, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem Spicæ m , eratque $1^{\text{gr.}} 30'$. circiter, et consentientibus Hookio, Montenaro et Angone perpetuò augebatur, ideoque jam sensibilibiter major erat quàm $1^{\text{gr.}} 30'$. Inter limites autem jam constitutos $2^{\text{gr.}} 26'$. et $1^{\text{gr.}} 30'$. magnitudine mediocri latitudo erit $1^{\text{gr.}} 58'$. circiter. Cauda cometæ, consentientibus Hookio et Montenaro, dirigebatur ad Spicam m , declinans aliquantulum a stellâ istâ, juxta Hookium in austrum, juxta Montenarum in boream; ideoque declinatio illa vix fuit sensibilis, et cauda æquatori fere parallela existens, aliquantulum deflectebatur ab oppositione Solis boream versus.

Nov. 23. st. vet. horâ quintâ matutinâ Noriburgi (id est hora $4\frac{1}{2}$. Londini) D. Zimmermann cometam vidit in $\text{m} 8^{\text{gr.}} 8'$. cum latitudine australi $2^{\text{gr.}} 31'$. captis scilicet ejus distantii a stellis fixis.

Nov. 24. ante ortum Solis cometa visus est a Montenaro in $\text{m} 12^{\text{gr.}} 52'$. ad boreale latus rectæ quæ per Cor Leonis et Spicam Virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quàm $2^{\text{gr.}} 38'$. Hæc latitudo, uti diximus, ex observationibus Montenari, Angonis et Hookii, perpetuò augebatur; ideoque jam paulò major erat quàm $1^{\text{gr.}} 58'$; et magnitudine mediocri, sine notabili errore, statui potest $2^{\text{gr.}} 18'$. Latitudinem Ponthæus et Galletius jam et decrevisse volunt, et Cellius et observator in Novâ

Angliâ eandem ferè magnitudinem retinuisse, scilicet gradûs unius vel unius cum semisse. Crassiores sunt observationes Ponthæi et Cellii, æ præsertim quæ per azimuthos et altitudines capiebantur, ut et æ Galletii: meliores sunt æ quæ per positiones cometæ ad fixas a Montenaro, Hookio, Angone, et observatore in Novâ Angliâ, et nonnunquam a Ponthæo et Cellio sunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam Ballasoræ cometa observabatur in $\text{m} 11^{\text{h}}. 45'$; ideóque ad horam quintam matutinam Londini erat in $\text{m} 13^{\text{h}}. \text{circiter}$. Per theoriam verò cometa jam erat in $\text{m} 13^{\text{h}}. 22'. 42''$.

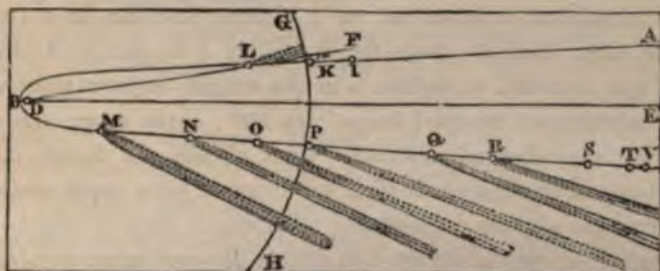
Nov. 25. ante ortum Solis Montenarus cometam observavit in $\text{m} 17\frac{1}{2}^{\text{h}}$. circiter. Et Cellius observavit eodem tempore quod cometa erat in lineâ rectâ inter stellam lucidam in dextro femore Virginis et lancem australem Libræ, et hæc recta secat viam cometæ in $\text{m} 18^{\text{h}}. 36'$. Per theoriam verò cometa jam erat in $\text{m} 18\frac{1}{2}^{\text{h}}$. circiter.

Congruunt igitur hæ observationes cum theoriâ quâtenus congruunt inter se, et congruendo probant unum et eundem fuisse cometam, qui toto tempore a quarto die Novembris ad usque nonum Martii apparuit. Trajectoria cometæ hujus (*) bis secuit planum eclipticæ, et propterea non fuit rectilinea. Eclipticam secuit non in oppositis cœli partibus, sed in fine Virginis et principio Capricorni, intervallo graduum 98. circiter; ideóque cursus cometæ plurimum deflectebatur a circulo maximo. Nam et mense Novembri cursus ejus tribus saltem gradibus ab eclipticâ in austrum declinabat, et postea mense Decembri gradibus 29. vergebat ab eclipticâ in septentrionem partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in Solem et redibat a Sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit Montenarus. Pergebat hic cometa per signa novem, a Leonis scilicet ultimo gradu ad principium Geminorum, præter signum Leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; et nulla alia extat theoria, quâ cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maximè inæquabilis. Nam circa diem vigesimum Novembris descripsit gradus circiter quinque singulis diebus; dein motu retardato inter Novemb. 26. et Decemb. 12. spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantum 40; postea verò motu iterum accelerato, descripsit gradus ferè quinque singulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè respondet, quæque easdem observat leges cum

(*) • *Bis secuit planum eclipticæ.* Tempus quo cometa secat eclipticam inveniri potest per num. 145. et 154.

theoriâ planetarum, et cum accuratis observationibus astronomicis accuratè congruit, non potest non esse vera.

Cæterùm trajectoryam quam cometa descripsit, et caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano trajectorye delineatas exhibere: ubi A B C denotat trajectoryam cometæ, D Solem, D E trajectoryæ axem, D F lineam nodorum, G H intersectionem sphaeræ



orbis magni cum plano trajectoryæ, I locum cometæ Nov. 4. ann. 1680, K locum ejusdem Nov. 11. L locum Nov. 19. M locum Dec. 12. N locum Dec. 21. O locum Dec. 29. P locum Jan. 5. sequent. Q locum Jan. 25. R locum Feb. 5. S locum Feb. 25. T locum Mar. 5. et V locum Mar. 9. Observationes verò sequentes in caudâ definiendâ adhibui.

Nov. 4. et 6. cauda nondum apparuit. Nov. 11. cauda jam cœpta non nisi semissem gradûs unius longa tubo decempedali visa fuit. Nov. 17. cauda gradûs amplius quindecim longa Ponthæo apparuit. Nov. 18. cauda $30^{\text{gr.}}$ longa, Solique directe opposita in Novâ Angliâ cernebatur, et protendebatur usque ad stellam δ , quæ tunc erat in $9^{\text{gr.}}$ $54'$. Nov. 19. in Maryland cauda visa fuit gradûs 15. vel 20. longa. Dec. 10. cauda (observante Flamstedio) transibat per medium distantie inter caudam Serpentis Ophiuchi et stellam δ in Aquilæ australi alâ, et desinebat prope stellas A, ω , b in tabulis Bayeri. Terminus igitur erat in $19\frac{1}{2}^{\text{gr.}}$ cum latitudine boreali circiter. Dec. 11. cauda surgebat ad usque caput Sagittæ (Bayero α , β ,) desinens in $26^{\text{gr.}}$ $43'$ cum latitudine boreali $38^{\text{gr.}}$ $34'$. Dec. 12. cauda transibat per medium Sagittæ, nec longè ultra protendebatur, desinens in $4^{\text{gr.}}$ cum latitudine boreali $42\frac{1}{2}^{\text{gr.}}$ circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda Dec. 12. hora 5. $40'$. Romæ (observante Ponthæo) supra Cygni uropygium ad gradus 10. sese extulit; atque ab hac stellâ ejus latus ad occasum et boream min. 45. destitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3. juxta terminum

superiorem, iteóque medium ejus distabat a stellâ illâ 2^{or} . $15'$. austrum versus, et terminus superior erat in κ 22^{or} . cum latitudine boreali 61^{or} . Et hinc longa erat cauda 70^{or} . circiter. Dec. 21. eadem surgebat fere ad cathedram Cassiopeiæ, æqualiter distans a β et Schedir, et distantiam ab utrâque distantiae earum ab invicem æqualem habens, ideóque desinens in ν 24^{or} . cum latitudine $47\frac{1}{2}^{\text{or}}$. Dec. 29. cauda tangebatur Scheat sitan ad sinistram, et intervallum stellarum duarum in pede boreali Andromedæ accuratè complebat, et longa erat 54^{or} ; ideóque desinebat in δ 19^{or} . cum latitudine 35^{or} . Jan. 5. cauda tetigit stellam π in pectore Andromedæ ad latus ejus dextrum, et stellam μ in ejus cingulo ad latus sinistram; et (juxta observationes nostras) longa erat 40^{or} ; curva autem erat et convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per Solem et caput cometæ transeunte angulum confecit graduum 4. juxta caput cometæ; et juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10. vel 11. graduum, et chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. Jan. 13. cauda luce satis sensibili terminabatur inter Al-mech et Algol, et luce tenuissimâ desinebat e regione stellæ α in latere Persei. Distantia termini caudæ a circulo Solem et cometam jungente erat 3^{or} . $50'$. et inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}^{\text{or}}$. Jan. 25. et 26. cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6. vel 7; et nocte unâ et alterâ sequente ubi cælum valde serenum erat, luce tenuissimâ et ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim et paulò ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali Aurigæ accuratè, ideóque declinabat ab oppositione Solis boream versus in angulo graduum decem. Denique Feb. 10. caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. Ponthæus autem Feb. 7. se caudam ad longitudinem graduum 12. vidisse scribit. Feb. 25. et deinceps cometa sine caudâ apparuit.

Orbem jam descriptum spectanti et reliqua cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit, quod corpora cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum planetarum. Nam si nihil aliud essent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis et planetarum, cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est, reciproè ut quadratum distantiae locorum a Sole. Ideóque cùm distantia cometæ a centro Solis Decemb. 8. ubi in perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ a centro Solis ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major

quàm calor quem Terra arida concipit ad æstivum Solem, ut expertus sum: et calor ferri candentis ⁽¹⁾ (si rectè convector) quasi triplo vel quadruplo major quàm calor aquæ ebullientis; ideòque calor, quem Terra arida apud cometam in perihelio versantem ex radiis solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores et exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, et calorem illum diutissimè conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aère consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illà ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideòque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id est, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, et idcirco annis 50000, vix refrigeraret. Suspicio tamen quod duratio caloris, ob causas latentes, augeatur in minore ratione quàm ea diametri: ⁽²⁾ et optarim rationem veram per experimenta investigari.

Porrò notandum est quod cometa mense Decembri, ubi ad Solem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem et splendidiorem quàm antea mense Novembri, ubi perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ et fulgentissimæ e cometis oriuntur statim post transitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio cometæ ad magnitudinem caudæ. ⁽¹⁾ Et indè colligere videor quod cauda nihil aliud sit quàm vapor longe tenuissimus, quem caput seu nucleus cometæ per calorem suum emittit.

Cæterùm de cometarum caudis triplex est opinio; eas vel jubar esse Solis per translucida cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progressu ipsius a capite cometæ in Terram, vel denique

⁽¹⁾ * *Si rectè convector.* Hanc Newtoni conjecturam experimenta confirmant. In Transact. Philosoph. num. 270. describitur tabula caloris gradus exhibens. (Hujus tabulæ constructionem jam exposuimus in not. ad Cor. 4. Prop. VIII. Lib. III.) Ex relatis ab autore experimentis colligitur calorem ferri, quantum levioris ignis auxilio fieri potuit, candefacti, circiter fuisse $2\frac{1}{2}$ majorem quam calor aquæ ebullientis. Hinc ignis vehementioris ope aucto calore ferri candentis, rectè conjectatur Newtonus calorem hujus ferri quasi triplo vel quadruplo majorem fieri quàm calor aquæ ebullientis.

⁽²⁾ * *Et optarim rationem veram.* Clariss. Hermannus Boerhaave in Elementis Chimiæ, diligentissimis experimentis se invenisse refert eò

diutius calorem in corporibus retineri quo majora sunt, cæteris paribus. Si autem corpora ejusdem diametri ejusdemque caloris, diversæ sint densitatis, quæ densiora sunt, caloris quoque sunt tenaciora; densitas enim ignem coërcet, illiusque egressum ex intimis partibus retardat. Quia verò intimæ corporum partes innumeris modis variari atque inter se permisceri possunt, hinc patet in ipsa caloris conservatione non leves varietates oriri posse. Hæ sunt fortasse latentes causæ quæ Newtonum in eam suspensionem induxerunt, durationem scilicet caloris augeri in minori ratione quàm eà diametri.

⁽¹⁾ * *Et indè colligere videor.* Hanc sententiam pluribus argumentis deinceps confirmat Newtonus.

nubem esse seu vaporem a capite cometæ jugiter surgentem et abeuntem in partes a Sole aversas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientiâ rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur, nisi quatenus lux reflectitur e pulverum et fumorum particulis per aërem semper volitantibus: ideóque in aëre fumis crassioribus infecto splendidius est, et sensum fortiùs ferit; in aëre clariore tenuius est et ægriùs sentitur: in cœlis autem sine materiâ reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quâtenus in jubare est, sed quâtenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce Solis illustratum uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variantur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux fixarum et planetarum distinctè ad nos transmissa demonstrat medium coeleste nullâ vi refractivâ pollere. Nam quod dicitur, fixas ab Ægyptiis cometas nonnunquam visas fuisse, id, quoniam rarissimè contingit, adscribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio et scintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ sunt: quippe quæ admotis oculo telescopiis evanescent. Aëris et ascendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de angusto pupillæ spatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde est quòd scintillatio in priori casu generetur, in posteriore autem cesset: et cessatio in posteriore casu demonstrat regularem transmissionem lucis per cœlos sine omni refractione sensibili. Ne quis contendat quod caudæ non soleant videri in cometis, oùm eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis virium ad oculos movendos, et propterea caudas fixarum non cerni: ^(m) sciendum est quod lux fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò nullæ: cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est et valde obtusa. Sic enim cometa anni 1680, mense Decembri, quo tempore caput luce suâ vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50, 60 vel 70 longitudinis et ultrâ: postea Jan. 27 et 28 caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui sed satis sensibili longa erat 6. vel 7. gradus, et luce obscurissimâ; quæ cerni vix

(^m) • *Sciendum est.* Ut notum est ex telescopiorum theoriâ apud omnes passim rerum opticarum et catoptricarum scriptores. Sed ea potissimum legi merentur quæ de lucis intensitate,

visionis distinctione et telescopiorum beneficiâ dedit clariss. vir Robert Smith in eximio Opere Optico.

posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulò ultrà: ut supra dictum est. Sed et Feb. 9 et 10 ubi caput nudis oculis videri desierat, caudam gradus duos longam per telescopium contemplatus sum. Porro si cauda oriretur ex refractione materiæ cœlestis, et pro figurâ cœlorum deflecteretur de Solis oppositione, deberet deflexio illa in iisdem cœli regionibus in eandem semper partem fieri. Atqui cometa anni 1680. Decembr. 28. hora $8\frac{1}{2}$ p. m. Londini, versabatur in κ 8^{gr}. 41'. cum latitudine boreali 28^{gr}. 6'. Sole existente in ϑ 18^{gr}. 26'. Et cometa anni 1577. Dec. 29. versabatur in κ 8^{gr}. 41'. cum latitudine boreali 28^{gr}. 40'. Sole etiam existente in ϑ 18^{gr}. 26'. circiter. Utroque in casu Terra versabatur in eodem loco, et cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen casu cauda cometæ (ex meis et aliorum observationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppositione Solis aquilonem versus; in posteriore verò (ex observationibus Tychoonis) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiâtâ cœlorum refractione, superest ut phænomena caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

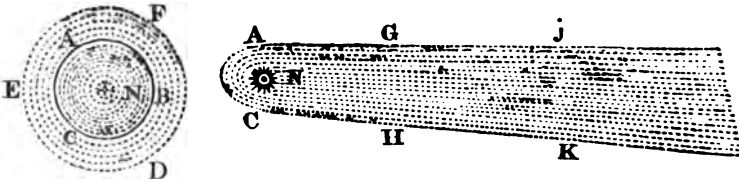
Caudas autem a capitibus oriri et in regiones a Sole aversas ascendere confirmatur (*) ex legibus quas observant. Ut quod in planis orbium cometarum per Solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione Solis in eas semper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quòd spectatori in his planis constituto apparent in partibus a Sole

(*) 164. * *Ex legibus quas observant.* Leges illæ quas observant cometarum caudæ cum prædictâ Newtoni sententiâ apprime congruunt. Cauda a cometæ capite vaporis instar in altum, id est, in partes a Sole aversas assurgens in plano orbis cometæ per Solem transeunte jacere debet; in æthere enim quieto nulla est ratio cur ad hanc potius quàm ad illam partem deflectat. Quia autem vapor a capite exiens duos motus simul componit, alterum scilicet ascensus recti a Sole, alterum verò progressus capitis, hinc fit ut cauda non directè a Sole aversa sit, sed aliquantulum inde deviet in eas partes quas cometæ caput in orbe suo progrediens relinquit; si tamen spectator in orbis cometici plano per Solem transeunte constituitur, deviatio caudæ neutiquam sentitur, quia tota in plano isto jacet. Licet vapor assurgens motum capitis participet, tamen propter aliqualem ætheris resistantiam, minus velociter quàm caput ipsum progreditur, et quo altius ascendit vapor eò fit rarior, id est, quo longior est cauda eò majorem experitur resistantiam, ideoque præcedens caudæ latus, quod scilicet proximus est partibus ad quas tendit cometa, convexum erit, sequens verò concavum, ac proinde cauda non a Sole duntaxat aversa est, sed etiam incurvatur. Hæc a Sole deviatio et curvatura eò minor est quò recta Solem cometamque conjungens obliquior est ad cometæ orbitam; si

enim cometa directè a Sole vel ad Solem tenderet, cauda quoque foret recta et a Sole directè aversa. Hinc patet in ipso cometæ perihelio maximam esse caudæ deviationem maximamque curvaturam; tunc enim recta Solem et cometam conjungens ad orbem cometæ normalis est. Præterea ob prædictam licet admodum exiguam ætheris resistantiam, convexa caudæ facies in ætherem incurrens densior est, ac proinde lucidior et distinctius terminata apparebit quàm facies concava. Hæc sunt præcipua caudarum phænomena quibus satisfaciunt Newtoni opinio. Hinc caudas a capitibus oriri et in regiones a Sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant.

165. Descriptis opinionibus de cometarum caudis adjungenda est illa quam clariss. D. de Mairan in eximio Opere de Aurorâ Boreali hîc tuetur rationum momentis. Cometæ ad Solem proximè accedere observationibus compertum est; hinc Newtonianæ attractionis legibus consentaneum videtur ut aliquam solaris atmosphæræ materiam cometa attrahat. Cur autem materia hæc instar comæ vento agitata dispergatur et ad Solis oppositum dirigatur, ex radiorum solarium impulsione oriri potest. Plurimis enim experimentis certum est solares radios omni prorsus impulsione vi non carere. Clariss. Hombergius varia materiæ levissimæ filamenta radios

directè aversis; digrediente autem spectatore de his planis deviatio paulatim sentitur, et indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem cometæ, ut et ubi caput cometæ ad Solem propiùs accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput cometæ: præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, et magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque idèò quod cauda convexo sui latere partes respicit a quibus fit deviatio, quæque in rectâ sunt lineâ a Sole per caput cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt et latiores, et luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiore et limite minus indistincto terminatæ quàm ad concava. Pendent igitur phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in quâ caput conspicitur; et propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed a capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aëre nostro fumus corporis cujusvis igni petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel obliquè si corpus moveatur in latus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in Solem, fumi et vapores ascendere debent a Sole (uti jam dictum est) et superiora vel rectâ petere, si corpus fumans quiescit, vel obliquè, si corpus progrediendo loca semper deserit a quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum



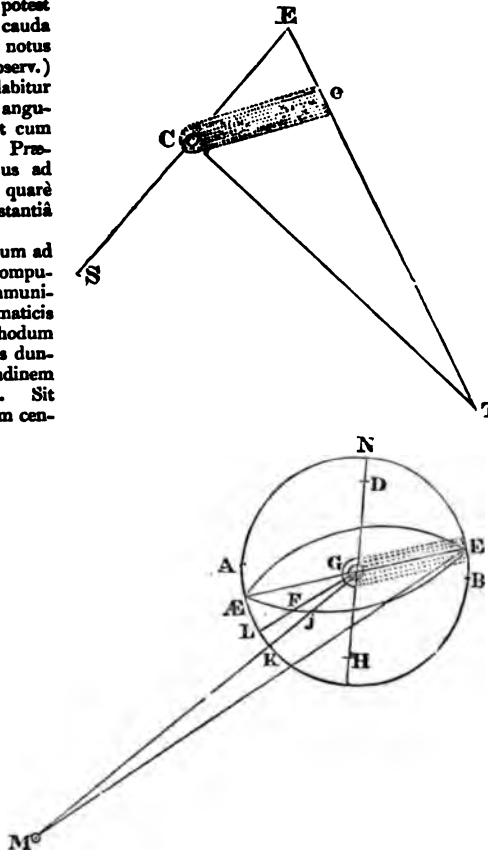
solaribus in vitri ustorii foco objecta notabiliter impelli observavit. Lamellam quoque elasticam ità lignæ tabulæ affixit ut extremitas una liberè penderet, collectis vitri ustorii ope solaribus radiis exposita hæc lamella instar penduli sensibiliter ibat et redibat. Quamvis autem levissima sit hic apud nos radiorum solarium impulsio, maxima tamen esse potest in spatiis liberrimis in quibus cometæ deferuntur, præsertim cùm tenuissima sit materia quæ cometarum caudas componit. Jam verò concipiatur cometa N, apparenti cinctus atmosphæra E D F, in transitu scilicet propè Solem collectâ, ità ut in majori a cometæ nucleo N, distantiâ levior rariorque semper fiat hæc ma-

teria, quemadmodum in apparenti cometarum atmosphæra solet observari. Sphæra interior A B C, ex iis ponatur constare particulis quæ radiorum solarium impulsioni possint resistere, e contrâ verò orbis superior A F B D C E, leviores contineat particulas quæ huic impulsioni cedant, manifestum est radiorum solarium impulsione projici versus Solis oppositionem materiæ vestigium B G H j K, quod figuram caudarum representat. Ex dictis patet hanc sententiam cùm Newtonianis Principiis consentire; et quidem Newtonus describens postea Kepleri opinionem quæ eadem ferè est, ab eâ non videtur alienus.

in vicinia Solis et juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: et quia vapor in colummæ latere præce-

166. Longitudo caudæ hoc modo potest inveniari. Sit S Sol, C cometa cuius cauda C e; ex cognitis Solis et cometæ locis nota erit angulus T C E, datique (per observ.) deviatione caudæ a Solis opposito, dabitur angulus E C e, ac proinde innoscescit angulus T C e, quem scilicet cauda efficit cum rectâ Terram et cometam iungente. Præterea (per observ.) innoscescit angulus ad Terram C T e, quem cauda subten dit, quare (per theoriâ cometæ) datâ cometæ distantia a Terrâ, dabitur caudæ longitudo.

167. Novam elegantemque methodum ad cometarum motus in orbē parabolico computandos nobiscum, suā humanitate, communicavit clariss. vir et in rebus mathematicis veratissimus D. de Chezeaux. Methodum hanc describere longius foret: paucis duntaxat exponemus quā ratione longitudinem atque deviationem caudæ investigat. Sit cometa in puncto G circa quod tanquam centrum describitur sphaera cujus radii G A, G E, sint æquales longitudini caudæ cometæ. Concipiatur in hac sphaerâ planum eclipticæ parallelum habens polos in D et H, itemque concipiatur planum A K B E parallelum orbitæ veræ cometæ habens polum unum in G, sit Terra in M, ejus longitudo et cometâ visa et ad planum orbitæ A K B E reducta, exprimetur per arcum K B, latitudo autem per arcum K j. Quia verò datur (per observ.) longitudo cometæ e Terrâ visa, dabitur longitudo Terræ et cometâ visa; sed datur latitudo cometæ (per observ.) et (per theoriam cometæ) habetur inclinatio plani A K B E, ad planum eclipticæ, itemque innoscitur locus nodi B. Quarè (per trigon. sphaer.) invenietur longitudo Terræ respectu plani A K B E, cujus mensura est arcus B N A K, dabiturque latitudo K j. Jam verò ductâ lineâ M E, ex Terrâ M, ad extremitatem caudæ E, cujus extremitatis longitudo et latitudo e Terrâ visæ (per observ.) notæ sunt, agatur G F parallela rectæ E M, eodem planè modo ac supra innoscet positio puncti F in superficie sphaeræ respectu plani A K B E, descriptoque arcu circuli maximi G F L, invenientur arcus B N A L et F L. Sed in triangulo sphaerico G j F, datè latere G j, complemento scilicet ad j K, et latere G F, complemento ad F L, atque latere F j, mensurâ anguli F G j, qui æqualis est angulo G M E, invenietur angulus G F j. Tandem concipiatur planum circuli maximi transiens per puncta F, j, per centrum G, commune sphaeræ et cometæ, atque per extremitatem caudæ E, cujusque sectio cum plano A N B, sit recta E G Æ, formabitur alterum triangulum sphaerici-



cum $\angle F L$, cujus jam innotescunt angulus $\angle F L$ et latus $F L$, quare dabitur latus $\angle E L$, ac proinde etiam dabitur arcus $B A E$, ob datum arcum $B A L$; innotescet præterea arcus $B E$, atque obtinebitur arcus $\angle E F$, qui additus arcui $F j$, dabit arcum $\angle E j$, ideoque dabitur arcus $E j$, mensura anguli rectilinei $j G E$, vel $M G E$. Datis autem in triangulo rectilineo $M G E$, angulis $M G E$, $G M E$ et latere $G M$, dabitur latus $G E$, hoc est, longitudo caudæ. Si itaque habeatur distantia cometæ a Terrâ in partibus mediocris distantie Terræ a Sole expressa, in iisdem quoque partibus obtinebitur longitudo caudæ. Quoniam verò (ex theoriâ cometæ) datur distantia cometæ a nodo ex Sole visa, si ex hac distantia subtrahatur arcus $B E$, habebitur angulus quem recta per Solem et cometam ducta comprehendit cum caudâ $G E$, hoc est, deviatio cometæ a Sole.

dente paulo recentior est, ideò etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, et limite minus indistincto terminabitur. De caudarum agitationibus subitaneis et incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio propterea quod vel a mutationibus aëris nostri, et motibus nubium caudas aliquâ ex parte obscurantium oriantur; vel forte a partibus Viæ Lactæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatiis tam immensis implendis sufficiant, ex cometarum atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate aëris nostri. Nam aër juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 partibus majus quàm aqua ejusdem ponderis, ideòque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columnâ pedali latitudinis ejusdem. Columna autem aëris ad summitatem atmosphære assurgens æquat pondere suo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; et propterea si columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam aquæ altam pedes 32. Inde verò (per regulam ^(b)) multis experimentis confirmatam, quod compressio aëris sit ut pondus atmosphære incumbentis, quodque gravitas sit reciprochè ut quadratum distantie locorum a centro Terræ) computationem ^(c) per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod aër, si ascen-

^(b) * Multis experimentis confirmatam. Experimenta illa referunt passim rerum physicarum scriptores, sed præsertim clariss. Muskembroek in Physicâ. Videantur etiam Transactiones Philosophicæ an. 1671. num. 73.

^(c) 168. * Per Corol. Prop. XXII. Lib. II. Sit (in figurâ Prop. XXII.) S centrum Terræ, S A ejusdem semi-diameter mediocris pedum 19615800 = r, A B pedum 850, et ideò S P = 19616650 = a, S F = 2 r, dignitas hyperbolæ f a h = r r, ideòque A a = r, F f = $\frac{1}{2}$ r, et B b = $\frac{r r}{a}$ ac proinde A a — F f

= $\frac{1}{2}$ r, et A a — B b = $\frac{a r - r r}{a}$. Densitas

A H seu S t = m = 33, densitas B j, seu S u = n = 32, et densitas F N, sive S Z = d. His positis, (ex naturâ hyperbolæ per Theor. IV. de hyperbolâ), erit area t h n z, ad

aream t h i u, ut L. $\frac{m}{d}$ ad L. $\frac{m}{n}$, et

(per Corol. Prop. XXII. Lib. II.) erit L. $\frac{m}{d}$: L. $\frac{m}{n}$ = $\frac{1}{2}$ r : $\frac{a r - r r}{a}$ = a : 2 a — 2 r,

ideòque L. $\frac{m}{d}$ = $\frac{a}{2 a - 2 r} \times L. \frac{33}{32}$. Est autem $\frac{a}{2 a - 2 r} = \frac{1961665}{170}$, et ex tabulis vul-

garibus L. $\frac{33}{32} = 0.0133639$. Quare L. $\frac{m}{d} = 154.20879349$. Densitas ergò aëris in A seu in superficie Telluris se habet ad densitatem aëris in F, seu in distantia semi-diametri Telluris ab eadem superficie ut numerus respondens logarithmo 154.20879349 ad unitatem. Porro logarithmo 3.2087100 in tabulis vulgaribus respondet numerus 1617 et ideò logarithmo 3.20879349 respondere debet numerus unitate fere integrâ major quàm 1617. Logarithmo igitur invento 154.20879349 respondet numerus major quàm 1617 cum 151 zeri adscriptis. Jam verò semi-diameter Terræ sit ut prius 19615800 pedum. Parallaxis Solis ponatur 10', cujus sinus rectus est partium 485 posito radio partium 10000000. Quoniam semi-diameter orbis magni est ad semi-diameter Terræ ut radius ad sinum parallaxis Solis (30. Lib. III.) erit semi-diameter orbis magni pedum circiter 5000000000000. Sed semi-diameter orbis Saturni circiter decuplo major est (Phæn. IV.) erit igitur hæc semi-diameter pedum 5000000000000, ideòque diameter pedum 10000000000000, sive digitorum 120000000000000. Est igitur sphaera Saturni ad globum cujus diameter est digitus unus, ut præcedentis numeri cubus sive 1728 cum annexis 39 cyphris ad unitatem; sed ratio illa multo minor est ratione densitatum modò inventi;

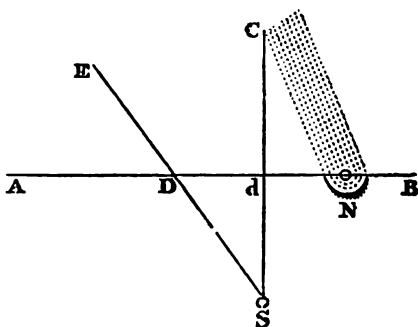
datur a superficie Terræ ad altitudinem semi-diametri unius terrestres, rarior sit quàm apud nos in ratione longè majori, quam spatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus aëris nostri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine semi-diametri unius terrestres, impleret omnes planetarum regiones usque ad sphaeram Saturni et longè ultra. Proinde cum aër adhuc altior in immensum rareseat, et coma seu atmosphæra cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quàm superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debet cauda esse quàm rarissima. Et quamvis ob longè crassiorem cometarum atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, et gravitationem particularum aëris et vaporum in se mutuò, fieri possit ut aër in spatiis cœlestibus inque cometarum caudis non adeò rareseat; perexiguam tamen quantitatem aëris et vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abundè sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam et caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucetibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine suâ paucorum milliarium, et astra omnia et ipsam Lunam obscurat et extinguit penitus: per immensam verò caudarum crassitudinem, luce pariter solari illustratam, astra minima sine claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quàm aëris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo temporis spatio vapor a capite ad terminum caudæ ascendit, (4) cognosci ferè potest ducendo rectam a termino caudæ ad Solem, et

quæd globus aëris nostri digitum unum latus eâ cum raritate quam haberet in altitudine semi-diametri unius terrestres, impleret omnes planetarum regiones usque ad sphaeram Saturni et longè ultra.

propressivum quem antè ascensum suum habebat, componit. Sed per varias methodos paulò antè explicatas inveniri potest tempus quo comete

(4) 169. * *Cognosci ferè potest.* Referat S Solem, A B tractorem cometæ portionem. Sit N cometæ nucleus ab A versus B progrediens, C terminus caudæ. Ducatur recta a termino illo C ad Solem, punctum d, ubi recta tractorem secet, designabit locum ex quo vapor in termino caudæ ascendere coepit a capite, si vapor ille rectè ascendat a Sole. Quia autem vapor non rectè ascendit a Sole, sed vergit versus partes A, quas cometa reliquit (164.) agatur recta S E, parallela longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) recta illa a lineâ caudæ divergat, atque tractorem cometæ alicubi intersectet, putà in D, vapor qui nunc terminum caudæ constituit, a nucleo coepit ascendere dum cometa in tractoris suo loco D versabatur; hic enim vapor cum motu ascensu a Sole, motum cometæ



locum D occupavit, et potest definiri quanto temporis spatio opus sit ut cometa tractoris portionem D N, longitudine datam, percurrat,

notando locum ubi recta illa trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si recta ascendat a Sole, ascendere coepit a capite, quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non rectâ ascendit a Sole, sed motum cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, et cum motu ascensûs sui eundem componendo, ascendit obliquè. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa, quæ orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) ut eadem a lineâ caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ Jan. 25. ascendere coeperat a capite ante Dec. 11. ideòque ascensu suo toto, dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ Dec. 10. apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui a tempore perihelii cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in viciniâ Solis celerimè ascendeat, et postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; et ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiù apparuit, ex vapore ferè omni constabat, qui a tempore perihelii ascenderat; et vapor, qui primus ascendit, et terminum caudæ composuit, non priùs evanuit quàm ob nimiam suam tam a Sole

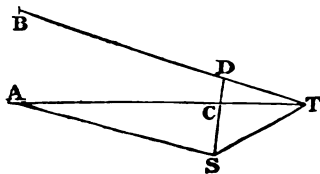
ideòque habebitur proxime tempus quo vapor ad terminum caudæ ascendit. Simili modo determinari potest temporis spatium quo vapor ascendit ad datum caudæ punctum.

170. Ex his quæ de cometarum caudis hactenus dicta sunt, cometarum, quandiù nobis conspicui sunt, maxima possibilis distantia a Sole et Terrâ definiri potest. Referat S Solem, T Terram, S T A distantiam cometæ a Sole, sitque A T B, apparens longitudo caudæ. Quoniam lux propagatur a termino caudæ secundum lineam rectam T B, reperitur terminus ille alicubi in lineâ T B, putâ in D. Jungatur D S, secans lineam T A in C, et quia cauda semper opponitur Soli quamproximè, ideòque Sol, caput cometæ et terminus caudæ jacent in directum, reperitur caput cometæ in C. Rectæ T B, agatur parallela S A, occurrens lineæ T A, in A, caput cometæ C necessariò reperietur inter T et A, nam terminus caudæ reperitur alicubi in lineâ infinitâ T B, et lineæ omnes ut S D, quæ ab S ad lineam T B duci possunt, secant lineam T A, alicubi inter T et A. Quare cometa non potest longius abesse a Terrâ quàm intervallo T A, nec a Sole quàm intervallo S A ultrâ Solem, vel S T, citrà. Exemplo sit cometa an. 1680. cometa ille die 12. Dec. distabat 9°. a Sole et longitudo caudæ erat 35°. Quare construatur triangulum T S A, cujus angulus T æqualis sit distantie 9°. et angulus A seu angulus A T B æqualis sit longitudini caudæ 35°. erit S A ad S T, id est, limes maximæ possibilis distantie cometæ a Sole ad semidiametrum orbis magni ut sinus anguli T, ad sinum anguli A, hoc est, ut 3. ad 11. circiter. Quare cometa eo tempore minus distabat a Sole quàm

$\frac{3}{11}$ partibus distantie Terræ a Sole, et propterea versabatur aut intrâ orbem Mercurii aut inter orbem illum et Terram. Rursus die 21. Dec. distantia cometæ a Sole erat 32°. $\frac{2}{5}$ et longitudo

caudæ 70°, ergò ut sinus 32°. $\frac{2}{5}$. ad sinum 70°.

hoc est, ut 4 ad 7, ita erat limes intervalli inter cometam et Solem ad distantiam Terræ a



Sole, et propterea nondum cometa excesserat ex orbe Veneris. Die 28. Decembr. distantia cometæ a Sole erat 55°. et longitudo caudæ 56°. Quare, iisdem calculi vestigiis insistendo, limes intervalli inter cometam et Solem, nondum æquabat distantiam Terræ a Sole, et propterea cometa nondum excesserat ex orbe Telluris. Hâc methodo quam ex Newtoni Opusculo de Mundi Systemate descripsimus, aliorum cometarum distantias limitando inventum est cometæ omnes, quandiù se nobis ostendunt, versari intrâ spatium sphericum centro Sole et intervallo Solis ac Terræ vel duplicato vel ad summum triplicato descriptum.

illustrante quàm ab oculis nostris distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri et perpetuò a capitibus et mox evanescent, sed sunt permanentes vaporum et exhalationum columnæ, a capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cœlos unà cum capitibus moveri pergunt. (°) Et hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida planetarum et cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrimè peragunt ac diutissimè conservant.

Ascensum caudarum ex atmosphæris capitum et progressum in partes a Sole aversas Keplerus ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longè tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, (f) non est a ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ impeditissimis in regionibus nostris a radiis Solis sensibilibiter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quàm graves dari posse existimat, et materiam caudarum levitare, perque levitatem suam a Sole ascendere. Cùm autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideòque servatà quantitate materiæ intendi et remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potiùs oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, et fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda cometæ ad eundem modum ascenderit a Sole? Nam radii solares non agitant media, quæ permeant, nisi in reflexione et refractione. Particulæ reflectentes eâ actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, et ob diminutam eâ raritate gravitatem suam specificam, quâ priùs tendebat in Solem, ascendet et secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: ad ascensum vaporum conducit etiam, quod hi gyranter circa Solem et eâ actione conantur a Sole recedere, at Solis atmosphæra et materia cœlorum vel planè quiescit, vel motu solo quem a Solis rotatione acceperit, tardiùs gyratur. Hæ sunt causæ ascensûs caudarum in viciniâ Solis, ubi orbes curviores sunt, et cometæ intra densiorem et eâ ratione graviorem Solis atmosphæram consistunt, et caudas quàm longissimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc nascuntur, conservando motum suum et interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in ellipsis pro more capitum, et per

(°) • *Et hinc rursus colligitur.* Legantur quæ dicta sunt in scholio Prop. XI. Lib. II.

(f) • *Non est a ratione prorsus alienum* (165).

motum illum capita semper comitabuntur et iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ postea decendant a capitibus Solem versus, quàm gravitas capitum efficere possit, ut hæc decendant a caudis. Communi gravitate vel simul in Solem cadent, vel simul in ascensu suo retardabuntur; ideóque gravitas illa non impedit, quò minùs caudæ et capita positionem quamcunque ad invicem a causis jam descriptis, aut aliis quibuscunque facillimè accipiant et postea liberrimè servant.

Caudæ igitur, quæ in cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, et vel indè post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potiùs ibi rarefactæ paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu a capitibus propagari debebunt, et subindè in periheliis cometarum illorum, qui ad usque atmosphæram Solis descendent, in immensum auferi. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuò rarescit ac dilatatur. Quâ ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quàm juxta caput cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem et spargi per coelos universos, deindè paulatim in planetas per gravitatem suam attrahi, et cum eorum atmosphæris misceri, rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiosè satis excitentur, qui vel in nubes coacti decendant in pluviis, et Terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent et nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (⁂) ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes et flumina: sic ad conservationem marium et humorum in planetis requiri videntur cometæ, ex quorum exhalationibus et vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem et putrefactionem consumitur et in Terram aridam convertitur, continuò suppleri et refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omninò crescunt, dein magnâ ex parte in Terram aridam per putrefactionem abeunt, et limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decedit. Hinc moles Terræ aridæ in dies augetur, et liquores, nisi aliundè augmentum sumerent, perpetuò decrescere deberent, ac tandem deficere. Porrò suspicor spiritum illum, qui aëris nostri par minima est, sed subtilissima et optima, et ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipue venire.

(⁂) * *Ut aliqui cum ratione philosophantur.* Horum philosophorum rationes videre est passim apud omnes cultiores physicos. Legantur

Transact. Philosoph. an. 1687. 1694. 1725 et Monum. Acad. Paris. an. 1703.

Atmosphære cometarum in descensu eorum in Solem excurrendo in caudas, diminuuntur, et (eâ certè in parte quæ Solem respicit) angustiores redduntur: et vicissim in recessu eorum a Sole, ubi jam minùs excurrunt in caudas, ampliantur; si modò phænomena eorum Hevelius rectè *notavit*. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modò ad Solem calefacta in caudas maximas et fulgentissimas abièrè, et nuclei fumo forsàn crassiore et nigriore in atmosphærarum partibus infimis *circundantur*. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior et *nigrior* esse solet. Sic caput cometæ, de quo egimus, in æqualibus a Sole ac Terrâ distantis obscurius apparuit post perihelium suum *quàm* antea. Mense enim Decembri cum stellis tertiæ magnitudinis *conferri* solebat, at mense Novembri cum stellis primæ et secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt cometam *priorem*. Nam juveni cuidam Cantabrigiensi, Novem. 19. cometa *hicce* luce suâ quantumvis plumbeâ et obtusâ, æquabat Spicam Virginis, et clarius micabat *quàm* postea. Et Montenaro Nov. 20. st. vet. cometa apparebat major stellis primæ magnitudinis, existente caudâ duorum graduum longitudinis. Et D. Storer literis, quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus mense Decembri, ubi caudam maximam et fulgentissimam emittebat, parvum esse et magnitudine visibili longè cedere cometæ, qui mense Novembri ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quod materia capitis sub initio copiosior esset, et paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur, quod capita cometarum aliorum, qui caudas maximas et fulgentissimas emisérunt, apparuerint subobscura et exigua. Nam anno 1668. Mart. 5. st. nov. horâ septimâ vespertinâ R. P. Valentinus Estancius, Brasiliæ agens, cometam vidit horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo et vix conspicuo, caudâ verò *suprà* modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus e mari reflexam *facile* cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, et horizonti *ferè* parallela. Tantus autem splendor tres solùm dies durabat, subindè notabiliter decrescens; et interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Undè etiam in Lusitaniâ quartam *ferè* cœli partem (id est, gradus 45) occupasse dicitur ab occidente in orientem splendore cum insigni portensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus *infra* horizontem delitescente. Ex incremento caudæ et decremento splendoris manifestum est, quod caput a Sole recessit, eique proximum fuit initio, pro more cometæ anni 1680. Et in Chronico Saxonico similis legitur cometa anni 1106. *cujus stella erat parva et obscura* (ut ille anni 1680.) *sed splendor*

qui ex eâ exivit valde clarus et quasi ingens trabs ad orientem et aquilonem tendebat, ut habet etiam Hevelius ex Simeone Dunelmensi Monacho. Apparuit initio mensis Februarii, ac deinceps circa vesperam, ad occasum Solis brumalem. Indè verò et ex situ caudæ colligitur caput fuisse Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Parisiensis, *distabat quasi cubito uno, ab horâ tertiâ (rectiùs sextâ) usque ad horam nonam radium ex se longum emittens*. Talis etiam erat ardentissimus ille cometa ab Aristotele descriptus Lib. I. Meteor. VI., *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante Solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente verò die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia Solem reliquit, et mox occubuit. Ob nimium ardorem (caudæ scilicet) nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore (ait Aristoteles) cum (cauda) jam minus flagraret, reddita est (capiti) cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiâ usque cæli partem (id est, ad 60^{gr.}) extendit. Apparuit autem tempore hyberno (an. 4. Olymp. 101.) et ascendens usque ad cingulum Orionis ibi evanuit*. Cometa ille anni 1618, qui e radiis solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulò superare videbatur, sed majores apparere cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquasse traduntur.

(^b) Diximus cometas esse genus planetarum in orbibus valde eccentricis circa Solem revolvendum. Et quemadmodum e planetis non caudatis minores esse solent, qui in orbibus minoribus et Soli propioribus gyrantur, sic etiam cometas, qui in periheliis suis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores esse, ne Solem attractione suâ nimis agitent, rationi consentaneum videtur. (¹) Orbium verò transversas diametros et revolutionum tempora periodica, ex collatione cometarum in iisdem orbibus

(^b) 171. * Diximus cometas esse genus planetarum, idque gravissimis rationibus confirmatur. Hâc enim factâ hypothesi computatisque per methodos præcedentes cometarum trajectorys, hujusmodi trajectorys semper cum phenomenon congruunt quamproximè clariss. Halleus suspicatur cometam an. 1531. ab Appiano observatum, eundem fuisse cum illo qui anno 1607. descriptus est a Keplero et Longomontano, et quem Halleus ipse redeuntem observavit an. 1682. quadrabant enim elementa omnia, solaque periodorum inæqualitas adversari videbatur. Verùm tanta non fuit inæqualitas illa ut causis physicis adscribi non possit. Saturni enim motus a cæteris planetis et præsertim a Jove ita perturbatur ut per aliquot dies integros incertum sit hujus planetæ tempus periodicum. Rectè etiam

animadvertit clariss. Cassinus in Mon. Paris. 1699. cometam diversis temporibus observatum ideòque pro duobus cometis usurpatum, unum eundemque esse posse, licet non conveniant inter se omnia motuum elementa; fieri scilicet potest ut unus idemque cometa bis observatus non secet eclipticam sub eodem angulo et in iisdem locis, ut cometæ hujus velocitas in perigæo non sit eadem. Talibus enim erroribus aliisque plurimis Luna est obnoxia. Cæterum clara Halleus diligenter perpensis motibus cometæ an. 1682. hujus cometæ reditum anno 1758. futurum esse prædixit.

(¹) * Orbium verò transversas diametros et revolutionum tempora periodica. Hæc duo observari possunt per methodum num. 160. expeditam.

post longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio Propositio sequens lumen accendere potest.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Inventam cometæ trajectoryam corrigere.

Operatio 1. Assumatur positio plani trajectoryæ, per Propositionem superiorem inventa; et seligantur tria loca cometæ observationibus accuratissimis definita, et ab invicem quàmmaximè distantia; sitque A tempus inter primam et secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo ^(*k*) in perigæo versari convenit, vel saltem non longè a perigæo abesse. ^(*l*) Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes trigonometricas, loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoryæ. Deindè per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, describatur sectio conica: ^(*m*) et ejus areæ, radiis a Sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunt D et E, nempe D area inter observationem primam et secundam, et E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D + E velocitate cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa describi debet.

Oper. 2. Augeatur ^(*n*) longitudo nodorum plani trajectoryæ; additis ad longitudinem illam 20'. vel 30'. quæ dicantur P; et servetur plani illius inclinatio ad planum eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut suprà: deinde etiam orbis per loca illa transiens, ^(*o*) et ejusdem areæ duæ inter

^(*k*) * *In perigæo versari convenit.* Versante enim cometa in perigæo vel saltem non longè a perigæo, illius motus magis accuratè definitur.

^(*l*) * *Ex his locis apparentibus.* Inveniantur per operationes trigonometricas (ut in Prop. præced.) loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoryæ tanquam accurato, hoc est, inveniantur tria prius definiti plani puncta in quibus cometa eandem longitudinem ac latitudinem obtineret quam reverà habere observatur.

^(*m*) * *Ejus areæ.* Ex datâ cometæ semitâ ejusque partium magnitudine, respectu semitæ Telluris ejusque partium, dabitur velocitas quâ cometa illam describit, ideòque dabitur tempus quo cometa areas duas jam inventas percurrit. Tempus illud totum dicatur T, capiaturque numerus C, qui sit ad 1, ut tempus inter observationem primam et secundam ad tempus inter observationem secundam et tertiam, hoc est, ut A ad B. Sumatur præterea G ad 1, ut areæ inter observationem primam et secundam ad

aream inter observationem secundam et tertiam, id est, ut D ad E; eadem quoque erit ratio inter tempora quibus areæ illæ radiis ad Solem ductis describentur. Sit S, tempus verum inter observationem primam et tertiam. Si reperiatur $T = S$, et $G = C$, inventa plani trajectoryæ positio vera erit et accurata, nullâ indigens correctione. Sin aliter, erit $T - S$, error in tempore toto inter observationem primam et tertiam ortus, nimirum ex positione plani trajectoryæ minus accuratâ, et $G - C$, erit error ex eâdem causâ ortus in ratione temporis inter observationem primam et secundam, ad tempus inter observationem secundam et tertiam, ut patet; nam in utroque casu unitas usurpatur pro consequente rationis inter bina tempora.

^(*n*) * *Longitudo nodorum,* per num. 145. inventa.

^(*o*) * *Et ejusdem areæ duæ.* Harumce arearum inter tres observationes radiis ad Solem ductis descriptarum ratio sit ut g, ad 1; sitque t,

observationes descriptæ, quæ sint d et e , nec non tempus totum t , quo area tota $d + e$ describi debeat.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, et augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additis ad inclinationem illam $20'$. vel $30'$. quæ dicantur Q . Deinde ex observatis prædictis tribus cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbisque per loca illa transiens, ^(P) ut et ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ et ϵ , et tempus totum τ , quo area tota $\delta + \epsilon$ describi debeat.

⁽⁹⁾ Jam sit C ad 1 ut A ad B , et G ad 1 ut D ad E , et g ad 1 ut d ad e , et γ ad 1 ut δ ad ϵ ; sitque S tempus verum inter observationem primam ac tertiam; et signis $+$ et $-$ probè observatis quærantur numeri m et n , eâ lege, ut sit $2G - 1C = mG - mg + nG - n\gamma$, et $2T - 2S$

tempus totum quo cometa utramque aream describeret. Si deprehendatur $t = S$ et $g = C$, assumpta plani positio vera erit et accurata. Sin aliter erit, ut suprà in operatione 1^a, $t = S$, error in tempore toto inter observationem primam et tertiam, et $g = C$ error in ratione temporis inter observationem primam et secundam ad tempus inter observationem secundam ad tertiam. Uterque hic error oritur ex positione non satis accuratâ plani trajectoriæ ad planum eclipticæ.

^(P) * Ut et ejusdem areæ duæ. Sint areæ illæ ut γ ad 1 , sitque τ tempus totum quo area tota $\delta + \epsilon$ describi debeat. Si fuerit $\tau = S$ et $\gamma = C$, assumpta plani trajectoriæ positio vera est et accurata. Sin contrâ, erit $\tau = S$, error in tempore toto inter observationem primam et tertiam, et $\gamma = C$, error in ratione temporis inter observationem primam et secundam ad tempus inter observationem secundam et tertiam.

⁽⁴⁾ * Jam sit C ad 1 . Iisdem servatis denominationibus quas adhibet Newtonus, instituatur operatio per regulam falsæ positionis. Ad inveniendum errorem ortum ex assumptâ inclinatione plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, fiat juxta prædictam regulam, ut differentia errorum $T - \tau$ ad differentiam positionum $T - S$, ita error Q , ad quartam quantitatem, erit hæc ipsa quantitas $\frac{T-S}{T-\tau} \times Q$, error inclinationis

plani in toto scilicet tempore inter observationem primam et tertiam. Simili modo dicatur, $G - \gamma : G - C = Q : \frac{G-C}{G-\gamma} \times Q$, erit

quantitas $\frac{G-C}{G-\gamma} \times Q$ error ejusdem inclinationis in ratione inter bina trium observationum tempora. Similiter error longitudinis nodi in toto tempore inter observationem primam et tertiam invenitur $\frac{T-S}{T-t} \times P$, error verò in ra-

tionem inter bina tempora est $\frac{G-C}{G-g} \times P$. Est itaque vera et correcta inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ $I + \frac{T-S}{T-\tau} \times Q$, areæ

$I + \frac{G-C}{G-\gamma} \times Q$; et vera longitudo nodi est $K + \frac{T-S}{T-t} \times P$ vel $K + \frac{G-C}{G-g} \times P$.

Jam verò quoniam corrigendus est error utentium in toto tempore quàm in ratione inter bina tempora, ponamus $\frac{T-S}{T-t} \times P$ et $\frac{G-C}{G-g} \times P$.

separatim æquari $m \times P$ hoc est $\frac{T-S}{T-t} = m$ et $\frac{G-C}{G-g} = m$. Ponamus quoque $\frac{T-S}{T-\tau} \times Q$ et $\frac{G-C}{G-\gamma} \times Q = n \times Q$, id est $\frac{T-S}{T-\tau} = n$ et $\frac{G-C}{G-\gamma} = n$. Hinc proveniet $mT - m t$

$= T - S$ et $mG - mg = G - C$; ita $nT - n\tau = T - S$, et $nG - ng = G - C$, undè fit $2T - 2S = mT - m t + nT - n\tau$, et $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$. Quare si tales quærantur numeri m et n , ut sit $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, et $2T - 2S = mT - m t + nT - n\tau$, erit $\frac{T-S}{T-\tau} \times Q$ et $\frac{G-C}{G-\gamma} \times Q = n \times Q$. Similiter fiet $\frac{T-S}{T-t} \times P$ et $\frac{G-C}{G-g} \times P = m \times P$.

ac proinde error inclinationis plani trajectoriæ erit nQ et error longitudinis nodi mP . Quare vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ erit $I + nQ$, et $K + mP$ vera longitudo nodi. Hæc omnia patent ex notis in tres operationes præcedentes.

æquale $m T - m t + n T - n \tau$. Et si in operatione primâ I designet inclinationem plani trajectorye ad planum eclipticæ et K longitudinem nodi alterutrius, erit $I + n Q$ vera inclinatio plani trajectorye ad planum eclipticæ, et $K + m P$ vera longitudo nodi. (*) Ac denique si in operatione primâ, secundâ ac tertiâ, quantitates R, r et ρ designent latera recta trajectorye, et quantitates $\frac{1}{L}, \frac{1}{l}, \frac{1}{\lambda}$ ejusdem latera transversa respectivè: erit $R + m r - m R + n \rho - n R$ verum latus rectum, et $\frac{1}{L + m l - m L + n \lambda - n L}$ verum latus transversum trajectorye quam cometa describit. (†) Dato autem latere transverso datur etiam tempus periodicum cometæ. Q. e. i.

Cæterum cometarum revolvendum tempora periodica, et orbium latera transversa, haud satis accuratè determinabuntur, nisi per collationem cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum et eundem cometam, in eodem orbe revolventem. (‡) Et tum demum ex revolutionum temporibus dabuntur orbium latera transversa, et ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur cometarum plurium trajectorye, ex hypothesi quod sint parabolicæ. Nam hujusmodi trajectorye cum phænomenis semper congruent quamproximè. Id liquet, non tantum ex trajectoryâ parabolicâ cometæ anni 1680, quàm cum observationibus suprâ

(*) * *Ac deniquè.* Nota sint latera recta trium trajectoryarum in operatione primâ, secundâ et tertiâ descriptorum. Designet R, latus rectum primæ trajectorye, r secundæ, ρ tertiæ, et trajectorye quam cometa describit desideretur verum latus rectum; per regulam falsæ positionis eadem planè methodo quam modò adhibuimus poterit inveniri. Ut obtineatur vera longitudo nodi, additur ejus longitudini in primo plano excessus longitudinis assumptæ in plano secundo suprâ præcedentem ductus in m, et ut habeatur vera inclinatio plani trajectorye ad planum eclipticæ, additur inclinationi plani primi, excessus inclinationis assumptæ in plano tertio suprâ inclinationem præcedentem ductus in n. Sed trajectory cometæ ejusque latus rectum corrigi debent tum ob correctam longitudinem nodi, tum ob correctam inclinationem plani ad planum eclipticæ, quare lateri recto trajectorye in primo plano descriptæ sive ipsi R, addi debet $m r - m R$, excessus scilicet lateris recti in plano secundo suprâ latus rectum in plano primo ductus in m. Addere insuper oportet $n \rho - n R$, qui est ex-

cessus lateris recti in plano tertio suprâ latus rectum in primo ductus in n, ideòque erit $R + m r - m R + n \rho - n R$, verum latus rectum. Simili modo patet datis lateribus transversis in operatione primâ, secundâ et tertiâ respectivè $\frac{1}{L}, \frac{1}{l}, \frac{1}{\lambda}$, esse verum latus transversum

trajectorye $\frac{1}{L + m l - m L + n \lambda - n L}$.

(†) 172. * *Dato autem latere transverso.* Accuratè descriptâ cometæ trajectoryâ (per methodos præced.) si deprehendatur ellipsim Solis centro tanquam umbilico descriptam, non verò parabolam per determinatâ trajectorye puncta transire, cometa in orbem redibit et dato latere transverso trajectorye hujus, dabitur tempus periodicum; erit scilicet, quadratum temporis periodici cometæ ad quadratum temporis periodici Telluris circâ Solem ut cubus majoris axis orbitæ cometice ad cubum majoris axis orbitæ terrestris (160).

(‡) * *Et tum demum* (160).

contuli; sed etiam ex eâ cometæ illius insignis, qui annis 1664 et 1665 apparuit, et ab Hevelio observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudes et latitudes hujus cometæ computavit, sed minùs accuratè. Ex iisdem observationibus Halleius noster ^(u) loca cometæ hujus denuò computavit, et tum demum ex locis sic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus nodum ascendentem in π $21^{\text{st}}. 13'. 55''$, inclinationem orbitæ ad planum eclipticæ $21^{\text{st}}. 18'. 40''$. distantiam perihelii a nodo in orbitâ $49^{\text{st}}. 27'. 30''$. Perihelium in Ω $8^{\text{st}}. 40'. 30''$. cum latitudine austrinâ heliocentricâ $16^{\text{st}}. 1'. 45''$. Cometam in perihelio Novemb. 24^d. 11^h. 52'. p. m. tempore æquato Londini, vel 13^h. 8'. Gedani, stylo veteri, et latus rectum parabolæ 410286, existente mediocri Terræ a Sole distantia 100000. Quàm probè loca cometæ in hoc orbe computata congruunt cum observationibus, patebit ex tabulâ sequente ab Halleio supputatâ.

^(u) * *Loca cometæ hujus denuò computavit. Varias computi hujus ineundi methodos exp- tradidimus.*

Temp. appar. Gedani, st. vet.	Observatæ cometæ distantiz.		Loca observata.		Loca compu- tata in orbe.
<i>Decemb.</i>		gr. ' "		gr. ' "	gr. ' "
3 ^d . 18 ^b . 29 ¹ / ₂	a Corde Leonis	46. 24. 20	Long. ♄ 7. 1. 0	♄ 7. 1. 29	
	a Spica Virginis	22. 52. 10	Lat. aust. 21. 39. 0	21. 38. 50	
4. 18. 1 ¹ / ₂	a Corde Leonis	46. 2. 45	Long. ♄ 10. 15. 0	♄ 10. 16. 5	
	a Spica Virginis	23. 52. 40	Lat. aust. 22. 24. 0	22. 24. 0	
7. 17. 48	a Corde Leonis	44. 48. 0	Long. ♄ 3. 0. 0	♄ 3. 7. 33	
	a Spica Virginis	27. 56. 40	Lat. aust. 25. 22. 0	25. 21. 40	
17. 14. 43	a Corde Leonis	53. 15. 15	Long. ♄ 2. 56. 0	♄ 2. 56. 0	
	ab Hum. Orionis dext.	45. 43. 30	Lat. aust. 49. 25. 0	49. 25. 0	
19. 9. 25	a Procyone	35. 13. 50	Long. ♀ 28. 40. 50	♀ 28. 43. 0	
	a Lucid. Mandib. Ceti	52. 56. 0	Lat. aust. 45. 48. 0	45. 46. 0	
20. 9. 53 ¹ / ₂	a Procyone	40. 49. 0	Long. ♀ 13. 3. 0	♀ 15. 5. 0	
	a Lucid. Mandib. Ceti	40. 4. 0	Lat. aust. 39. 54. 0	29. 53. 0	
21. 9. 9 ¹ / ₂	ab Hum. dext. Orionis	26. 21. 25	Long. ♀ 2. 16. 0	♀ 2. 18. 30	
	a Lucid. Mandib. Ceti	29. 28. 0	Lat. aust. 33. 41. 0	33. 39. 40	
22. 9. 0	ab Hum. dext. Orionis	29. 47. 0	Long. ♀ 24. 24. 0	♀ 24. 27. 0	
	a Lucid. Mandib. Ceti	20. 29. 30	Lat. aust. 27. 45. 0	27. 46. 0	
26. 7. 58	a Lucida Arietis	23. 20. 0	Long. ♀ 9. 0. 0	♀ 9. 2. 28	
	ab Aldebaran	26. 44. 0	Lat. aust. 12. 36. 0	12. 34. 13	
27. 6. 45	a Lucida Arietis	20. 45. 0	Long. ♀ 7. 5. 40	♀ 7. 8. 45	
	ab Aldebaran	28. 10. 0	Lat. aust. 10. 23. 0	10. 23. 13	
28. 7. 39	a Lucida Arietis	18. 29. 0	Long. ♀ 5. 24. 45	♀ 5. 27. 12	
	a Palilicio	29. 37. 0	Lat. aust. 8. 22. 50	8. 23. 37	
31. 6. 45	a Cing. Androm.	30. 48. 10	Long. ♀ 2. 7. 40	♀ 2. 8. 20	
	a Palilicio	32. 53. 30	Lat. aust. 4. 13. 0	4. 16. 25	
<i>Jan.</i> 1665.	a Cing. Androm.	25. 11. 0	Long. ♀ 28. 24. 47	♀ 28. 24. 0	
7. 7. 37 ¹ / ₂	a Palilicio	37. 12. 25	Lat. bor. 0. 54. 0	0. 53. 0	
13. 7. 0	a Capite Androm.	28. 7. 10	Long. ♀ 27. 6. 54	♀ 27. 6. 39	
	a Palilicio	38. 55. 20	Lat. bor. 3. 6. 50	3. 7. 40	
24. 7. 29	a Cin. Androm.	20. 32. 5	Long. ♀ 26. 29. 15	♀ 26. 28. 50	
	a Palilicio	40. 5. 0	Lat. bor. 5. 25. 50	5. 26. 0	
<i>Feb.</i>			Long. ♀ 27. 24. 46	♀ 27. 24. 55	
7. 8. 57			Lat. bor. 7. 3. 26	7. 3. 15	
22. 8. 46			Long. ♀ 28. 29. 46	♀ 28. 29. 58	
			Lat. bor. 8. 12. 36	8. 10. 25	
<i>Mart.</i>			Long. ♀ 29. 18. 15	♀ 29. 18. 20	
1. 8. 16			Lat. bor. 8. 36. 26	8. 56. 12	
7. 8. 57			Long. ♀ 0. 2. 48	♀ 0. 2. 42	
			Lat. bor. 8. 56. 30	8. 56. 56	

Mense Febuario anni ineuntis 1665, stella prima Arietis quam in sequentibus vocabo γ , erat in \cap 28^{gr}. 30'. 15". cum latitudine boreali

7^h. 8'. 58". secunda Arietis erat in Υ 29^h. 17'. 18". cum latitudine boreali 8^h. 28'. 16". et stella quædam alia septimæ magnitudinis, quam vocabo A, erat in Υ 28^h. 24'. 45". cum latitudine boreali 8^h. 28'. 33". Cometa verò Feb. 7^d. 7'. 30". Parisiis (id est Feb. 7^d. 8'. 37". Gedani) st. vet. triangulum constituiebat cum stellis illis γ et A rectangulum ad γ . Et distantia cometæ a stella γ æqualis erat distantie stellarum γ et A, id est 1^h. 19'. 46". in circulo magno, atque ideò ea erat 1^h. 20'. 26". in parallelo latitudinis stellæ γ . Quare si de longitudine stellæ γ detrahatur longitudo 1^h. 20'. 26". manebit longitudo cometæ Υ 27^h. 9'. 49". Auzoutius ex hâc suâ observatione cometam posuit in Υ 27^h. 0'. circiter. Et ex schemate, quo Hookius motum ejus delineavit, is jam erat in Υ 26^h. 59'. 24". Ratione mediocri posui eundem in Υ 27^h. 4'. 46". Ex eâdem observatione Auzoutius latitudinem cometæ jam posuit 7^h. et 4'. vel 5'. boream versus. Eandem rectius posuisset 7^h. 3'. 29". existente scilicet differentia latitudinum cometæ et stellæ γ æquali differentie longitudinum stellarum γ et A.

Feb. 22^d. 7^h. 30'. Londini, id est Feb. 22^d. 8^h. 46'. Gedani, distantia cometæ a stella A, juxta observationem Hookii a seipso in schemate delineatam, ut et juxta observationes Auzoutii a Petito in schemate delineatas, erat pars quinta distantie inter stellam A et primam Arietis, seu 15'. 57". Et distantia cometæ a linea jungente stellam A et primam Arietis erat pars quarta ejusdem partis quintæ, id est 4'. Ideoque cometa erat in Υ 8^h. 29'. 46". cum lat. bor. 8^h. 12'. 36".

Mart. 1^d. 7^h. 0'. Londini, id est Mart. 1^d. 8^h. 16'. Gedani, cometa observatus fuit prope secundam Arietis, existente distantia inter eosdem ad distantiam inter primam et secundam Arietis, hoc est ad 1^h. 33". ut 4 ad 45 secundum Hookium, vel ut 2 ad 23 secundum Gottignies. Unde distantia cometæ a secundâ Arietis erat 8'. 16". secundum Hookium, vel 8'. 5". secundum Gottignies, vel ratione mediocri 8'. 10". Cometa verò secundum Gottignies jam modo prætergressus fuerat secundam Arietis quasi spatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti, id est 1'. 35". circiter (quocum satis consentit Auzoutius) vel paulo minorem secundum Hookium, puta 1'. Quare si ad longitudinem primæ Arietis addatur 1'. et ad latitudinem ejus 8'. 10". habebitur longitudo cometæ Υ 29^h. 18'. et latitudo borealis 8^h. 36'. 26".

Mart. 7^d. 7^h. 30'. Parisiis (id est Mart. 7^d. 8^h. 37". Gedani) ex observationibus Auzoutii distantia cometæ a secundâ Arietis æqualis erat distantie secundæ Arietis a stellâ A, id est 52'. 29". Et differentia longitudinum cometæ et secundæ Arietis erat 45'. vel 46', vel ratione mediocri 45'. 30". ideoque

cometa erat in 8° . $2'$. $48''$. Ex schemate observationum Auzoutii, quod Petitus construxit, Hevelius deduxit latitudinem cometæ 8° . $54'$. Sed sculptor viam cometæ sub finem motus ejus irregulariter incurvavit, et Hevelius in schemate observationum Auzoutii a se constructo incurvationem irregularem correxit, et sic latitudinem cometæ fecit esse 8° . $55'$. $30''$. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere potest 8° . $56'$. vel 8° . $57'$.

Visus etiam fuit hic cometa Martii die 9, et tunc locari debuit in 8° . $18'$. cum lat. bor. 9° . $3\frac{1}{2}'$ circiter.

Apparuit hic cometa menses tres, signaque ferè sex descripsit, et uno die gradus fere viginti confecit. Cursus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; et motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, theoriâ a principio ad finem cum observationibus non minus accuratè congruit, quàm theoriæ planetarum cum eorum observationibus congruere solent, ut inspicienti tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter nodum ascendentem et perihelium, seu constituendo (*) angulum illum 49° . $27'$. $18''$. Cometæ utriusque (et hujus et superioris) parallaxis annua insignis fuit, (†) et indè demonstratur motus annuus Terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano eclipticæ angulum ferè rectum continebat. Hujus nodus ascendens (computante Halleio) erat in π 23° . $23'$.; inclinatio orbitæ ad eclipticam 83° . $11'$.; perihelium in π 25° . $29'$. $30''$.; distantia perihelia a Sole 56020, existente radio orbis magni 100000, et tempore perihelii Julii 2^d . 3^h . $50'$. Loca autem cometæ in hoc orbe ab Halleio computata, et cum locis a observatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

(*) * *Angulum illum* inter nodum ascendentem et perihelium invenerat Halleus 49° . $27'$. $30''$. constituto autem angulo illo 49° . $27'$. $18''$. computationibusque repetitis, subducta inveniuntur duo minuta prima circiter, ut oportet, et theoriâ a principio ad finem cum observationibus congruit. Corrigendam esse theoriâ duobus mi-

nutis primis circiter ex observatione cometæ, ubi motus ejus velocissimus fuit, colligitur.

(†) * *Et indè demonstratur.* † Quâ ratione annua cometarum parallaxis cum Telluris quiete conciliari possit, legatur apud Ricciolum in Almagesto, Tacquetum in Astronomiâ, aliosque passim, ubi de planetarum retrogradationibus agunt.

1683. Temp. Æquat.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. '	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "	' "	' "
Jul. 13. 12. 55	Ω 1. 2.30	Ω 13. 5. 42	29. 28. 13	Ω 13. 6. 42	29. 28. 20	+ 1. 0	+ 0. 7
15. 11. 15	2. 5.12	11. 37. 4	29. 34. 0	11. 39. 43	29. 34. 50	+ 1. 55	+ 0. 50
17. 10. 20	4.45.45	10. 7. 6	29. 33. 30	10. 8. 40	29. 34. 0	+ 1. 34	+ 0. 30
23. 13. 40	10.38.21	5. 10. 27	28. 51. 42	5. 11. 30	28. 50. 28	+ 1. 3	- 1.14
25. 14. 5	12.35.28	3. 27. 53	24. 24. 47	3. 27. 0	28. 23. 40	- 0. 53	- 1. 7
31. 9. 42	18. 9.22	Π 27. 55. 3	26. 22. 52	Π 27. 54. 24	26. 22. 25	- 0. 39	- 0. 27
31. 14. 55	18.21.53	27. 41. 7	26. 16. 57	27. 41. 8	26. 14. 50	+ 0. 1	- 2. 7
Aug. 2. 14. 56	20.17.16	25. 29. 32	25. 16. 19	25. 28. 46	25. 17. 28	- 0. 46	+ 1. 9
4. 10. 49	22. 2.50	23. 18. 20	24. 10. 49	23. 16. 55	24. 12. 19	- 1. 25	+ 1. 30
6. 10. 9	23.56.45	20. 42. 23	22. 47. 5	20. 40. 32	22. 49. 5	- 1. 51	+ 2. 0
9. 10. 26	26.50.52	16. 7. 57	20. 6. 37	16. 5. 55	20. 6. 10	- 2. 2	- 0. 27
15. 14. 1	π 2.47.13	3. 30. 48	11. 37. 33	3. 26. 18	11. 32. 1	- 4. 30	- 5. 32
16. 15. 10	3.48. 2	0. 43. 7	9. 54. 16	0. 41. 55	9. 34. 13	- 1. 12	- 0. 5
18. 15. 44	5.45.33	χ 24. 52. 53	5. 11. 15	χ 24. 49. 5	5. 9. 11	- 3. 48	- 2. 4
		Austr.		Austr.			
22. 14. 44	9.35.49	11. 7. 14	5. 16. 58	11. 7. 12	5. 16. 58	- 0. 2	- 0. 3
23. 15. 52	10.36.48	7. 2. 18	8. 17. 9	7. 1. 17	8. 16. 41	- 1. 1	- 0. 28
26. 16. 2	13.31.10	ϣ 24. 45. 31	16. 38. 0	ϣ 24. 44. 0	16. 38. 20	- 1. 31	+ 0. 20

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus nodus ascendens (computante Halleio) erat in δ 21st. 16'. 30". Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 17st. 56'. 0". Perihelium in \approx 2st. 52'. 50". Distantia perihelia a Sole 58328, existente radio orbis magni 100000. Et tempus æquatum perihelii Sept. 4^d. 7^h. 39'. Loca verò ex observationibus Flamstedii computata, et cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

1682. Temp. Appar.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. '	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "	' "	' "
Aug. 19. 16. 38	π 7. 0. 7	Ω 18. 14. 28	25. 50. 7	Ω 18. 14. 40	25. 49. 55	- 0. 12	+ 0. 12
20. 15. 38	7.55.52	24. 46. 23	26. 14. 42	24. 46. 22	26. 12. 52	+ 0. 1	+ 1. 50
21. 8. 21	8.36.14	29. 37. 15	26. 20. 3	29. 38. 2	26. 17. 37	- 0. 47	+ 2. 28
22. 8. 8	9.33.55	π 6. 29. 53	26. 8. 42	π 6. 30. 3	26. 7. 12	- 0. 10	+ 1. 3
29. 8. 20	16.22.40	Δ 12. 37. 54	18.37.47	Δ 12.37.49	18.34. 5	+ 0. 5	+ 3. 42
30. 7. 45	17.19.41	15. 36. 1	17.26.45	15.35.18	17.27.17	+ 0. 43	- 0. 34
Sept. 1. 7. 33	19.16. 9	20. 30. 53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9. 49	+ 3. 49	+ 3. 11
4. 7. 22	22.11.28	25. 42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+ 1. 2	+ 1. 48
5. 7. 32	23.10.29	27. 0. 46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+ 1. 22	- 0. 43
8. 7. 16	26. 5.58	29. 58. 44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	- 0. 1	+ 0. 5
9. 7. 26	27. 5. 9	μ 0. 44. 10	8.49.10	μ 0.44. 4	8.48.25	+ 0. 6	+ 0. 45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus nodus ascendens (computante D. Bradleio, Astronomiæ apud Oxonienses Professore Saviliano) erat in ν 14st. 16'. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 49st. 59'. Perihelium in δ 12st. 15'. 20". Distantia perihelia a Sole 998651, existente radio orbis magni 1000000, et tempore æquato perihelii Sept. 16^d. 16^h. 10'. Loca verò cometæ in

hoc orbe a Bradleio computata, et cum locis a seipso et patruo suo D. Poundio, et a D. Halleio observatis collata exhibentur in tabulâ sequente.

1723. Tempus Æquat.			Comet. Long. Observat.	Lat. Bor. Observat.	Comet. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d.	h.	'	o	'	o	'	"	"
Oct.	9.	8. 5	7. 22. 15	5. 2 0	7. 21. 26	5. 2. 47	+ 49	- 47
	10.	6. 21	6. 41. 12	7. 44. 13	6. 41. 42	7. 42. 18	- 50	+ 55
	12.	7. 22	5. 39. 58	11. 55. 0	5. 40. 19	11. 54. 55	- 21	+ 5
	14.	8. 57	4. 59. 49	14. 43. 50	5. 0. 37	14. 44. 1	- 48	- 11
	15.	6. 35	4. 47. 41	15. 40. 51	4. 47. 45	15. 40. 55	- 4	- 4
	21.	6. 22	4. 2. 32	19. 41. 49	4. 2. 21	10. 42. 3	+ 11	- 14
	22.	6. 24	3. 59. 2	20. 8. 12	3. 59. 10	20. 8. 17	- 8	- 5
	24.	8. 2	3. 55. 29	20. 55. 18	3. 55. 11	20. 55. 9	+ 18	+ 9
	29.	8. 56	3. 56. 17	22. 20. 27	3. 56. 42	22. 20. 10	- 25	+ 7
	30.	6. 20	3. 58. 9	22. 32. 28	3. 58. 17	22. 32. 12	- 8	+ 16
Nov.	5.	5. 53	4. 16. 30	23. 38. 33	4. 16. 23	23. 38. 7	+ 7	+ 26
	8.	7. 6	4. 29. 36	24. 4. 30	4. 29. 54	24. 4. 40	- 18	- 10
	14.	6. 20	5. 2. 16	24. 48. 46	5. 2. 51	24. 48. 6	- 35	+ 30
	20.	7. 45	5. 42. 20	25. 24. 45	5. 43. 13	25. 25. 17	- 53	- 32
Dec.	7.	6. 45	8. 4. 13	26. 54. 18	8. 3. 55	26. 53. 42	+ 18	+ 36

His exemplis abundè satis manifestum est, quod motus cometarum per theoriam a nobis expositam non minus accuratè exhibentur, quàm solent motus planetarum per eorum theorias. (*) Et propterea orbes cometarum per hanc theoriam enumerari possunt, et tempus periodicum cometæ in quolibet orbe revolventis tandem sciri, et tum demum orbium ellipticorum latera transversa et apheliorum altitudines innotescunt.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, descripsit orbem, cujus nodus ascendens (computante Halleio) erat in $8^{\text{or.}} 21'$; inclinatio plani orbis ad planum eclipticæ erat $17^{\text{or.}} 2'$; perihelium erat in $\approx 2^{\text{or.}} 16'$; et distantia perihelia a Sole erat 58680, existente radio orbis magni 100000. Et cometa erat in perihelio Octob. 16^a. 3^b. 50'. Congruit hic orbis quamproximè cum orbe cometæ, qui apparuit anno 1682. Si cometæ hi duo fuerint unus et idem, revolvetur hic cometa spatio annorum 75, (a) et axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c} : 75 \times 75$ ad 1, seu 1778 ad 100 circiter. (b) Et distantia aphelia cometæ hujus a Sole, erit ad distantiam mediocrem Terræ a Sole, ut 35 ad 1 circiter. (c) Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem ellip-

(*) * Et propterea. Quomodò hæc omnia fieri possint, variis methodis suprâ exposuimus.

(a) * Et axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni ut radix cubica numeri 75×75 ad 1 (172).

(b) * Et distantia aphelia. Quoniam distantia perihelia cometæ a Sole erat 58680, existente radio orbis magni 100000 erit eadem distantia perihelia 29, circiter existente radio orbis magni

100, ac proindè distantia aphelia quæ est differentia inter axem majorem orbitæ cometice 1778 et distantiam perihelium 29, erit earundem partium 1749, ideòque distantia aphelia cometæ hujus a Sole erit ad distantiam mediocrem Terræ a Sole ut 1749 ad 29, hoc est, ut 35 ad 1 circiter.

(c) * Quibus cognitis. (Per Prop. XX. Lib. I.).

ticum cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt, si cometa, spatio annorum septuaginta quinque, in hoc orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur et altiùs ascendere.

Cæterum cometæ, ob magnum eorum numerum, et magnam apheliorum a Sole distantiam, et longam moram in apheliis, per gravitates in se mutuo nonnihil turbari debent, et eorum eccentricitates et revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proindè non est expectandum ut cometa idem in eodem orbe, et iisdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenierint, quàm quæ a causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, ^(d) cur cometæ non comprehendantur zodiaco more planetarum, sed indè migrent et motibus variis in omnes cælorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in apheliis suis, ubi tardissimè

(^d) 173. * *Cur cometæ non comprehendantur zodiaco.* Ex observato sæpè sæpius cometarum cursu retrogrado deduxit Newtonus cometas non comprehendi zodiaco more planetarum, sed indè migrare et motibus variis in omnes cælorum regiones excurrere. Attamen clariss. Cassinus in Monum. Paris. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos reduxit. Verùm eo artificio utitur vir doctissimus ut distantiam cometæ a Terrâ vel Sole pro arbitrio assumat, et modò Tellurem inter Solem et cometam, modò cometam inter Solem et Tellurem ac denique Solem inter cometam et Tellurem, pro necessitate, colloct. Quâ ratione id fieri possit non satis intelligitur, nisi ignota omninò fingatur cometarum theoria; concesso enim aliquo cometarum systemate, distantias illas pro lubitu usurpare non licet, sed ex datis motuum elementis, cometarum distantia totaque trajectory determinantur. Sic Halleus definivit trajectory cometæ qui annis 1664. et 1665. apparuit. Ut autem retrogradum hujus cometæ motum ad directum reducat clariss. Cassinus, talem huic cometæ motum tribuit qui cum Halleii computo nequaquam convenit. Quàm probè tamen cum observationibus theoria congruat, ostendit tabula paulò antè exhibita. Quamvis itaque retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosâ arte reduxerit Cassinus, non id tamen satis esse arbitramur ut eam rejiciamus cometarum theoriam quæ phenomenis apprime respondet, atque incerti sine ullâ theoriâ erremus. Præterea talem orbitam prædicto cometæ assignat Cassinus ut extrâ orbem annuum ferè non excurrat; quod si res ita se haberet, hic cometa in conspectum citò rediisset, cometas enim ad maximam quoquè distantiam conspicuos esse constat ex defectu paralaxe. Nec feliciori successu ad motum directum reduci posse videtur motus retrogradus cometæ an. 1680. Nam præter quàm quod omnem cometarum theoriam fictis ad arbitrium hypothesis everti necesse sit, in explicatione Cassini gravissima occurrit difficultas cujus vim

totam sensit clariss. vir. Oporteret scilicet ut cometa ille paulò ante 27. diem Novembris per nodum descendentem transierit et vix diem 17. Decembris ad nodum ascendentem pervenerit, ideòque cometa breviori quàm unius mensis intervallo, totum spatium quod est infra planum eclipticæ trajecisset. Porro tanta velocitas caret verisimilitudine, nec conciliari posse videtur cum observatis longo temporis spatio hujus cometæ motibus; hic enim astronomorum oculis citò sese subduxiasset. Singulas explicationes quæ in loco cit. Monum. Paris. leguntur percurrere longius foret, satis erit addere eas hoc potissimum fine excogitatas fuisse ut nempe servaretur et a gravissimâ objectione liberaretur vorticum hypothesis. Verùm his explicationibus cæteroquin ingeniosissimis nondum tamen propositus finis obtineri videtur; hanc enim difficultatem effugientes vorticum patroni, in aliam incurrunt. Oporteret siquidem ut cometarum vortices ipsum saltem Telluris vorticem interearent, quod sine vorticum perturbatione ac tandem destructione fieri posse non intelligitur. Alias hypotheses finxerunt alii. Quidam cometas habuerunt tanquam planetas non circa Solem nostrum, sed circa alium velut centrum revolventes. Nonnulli eos habuerunt velut satellites planetæ cujusdam primarii in nostro vortice constituti, qui tamen ob maximam illius a nobis distantiam conspici non potest, ità ut cometæ seu satellites sese nobis duntaxat conspicuos præbent, dum in inferiori et Telluris proximiori orbitarum suarum parte versantur. Sed a Newtonianâ cometarum theoriâ, quæ phenomenis consentanea est, nequaquam nos remove debent hypothesis illæ quæ eam duntaxat ob causam subtiliter inventæ sunt ut servaretur vorticum hypothesis, quam aliis multis difficultatibus premi passim ostendimus. Cæterum quicquid de hac materia diximus, et ipsa, prout nobis visum est, rei veritas et commentatorum officium a nobis postulabant.

moventur, quam longissimè distent ab invicem, et se mutuò quàm minimè trahant. Quà de causâ cometæ, quia altiùs descendunt, ideòque tardissimè moventur in apheliis, debent altiùs ascendere.

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus distabat a Sole in perihelio suo quàm parte sextâ diametri Solis; et propter summam velocitatem in viciniâ illâ, et densitatem aliquam atmosphæræ Solis, resistantiam nonnullam sentire debuit, et aliquantulum retardari, et propiùs ad Solem accedere: et singulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed et in aphelio ubi tardissimè movetur, aliquando per attractionem aliorum cometarum retardari potest, et subindè in Solem incidere. (*) Sic etiam stellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem et vapores, cometis in ipsas incidentibus refici possunt, et novo alimento accensæ pro stellis novis haberi. Hujus generis sunt stellæ fixæ, quæ subito apparent, et sub initio quàm maximè splendent, et subindè paulatim evanescent. Talis fuit stella in cathedrâ Cassiopeiæ quam Cornelius Gemma octavo Novembris 1572, lustrando illam cœli partem nocte serenâ minimè vidit; at nocte proximâ (Novemb. 9.) vidit fixis omnibus splendidior, et luce suâ vix cedentem Veneri. Hanc Tycho Brahæus vidit undecimo ejusdem mensis ubi maximè splenduit; et ex eo tempore paulatim decrescentem et spatio mensium sexdecim evanescentem observavit. Mense Novembri, ubi primùm apparuit, Venerem luce suâ æquabat. Mense Decembri nonnihil diminuta Jovem æquare videbatur. Anno

(*) 174. * *Sic etiam stellæ fixæ.* De stellarum variationibus nonnulla hic afferemus quæ habet clariss. D. de Maupertuis in eximio Opusculo de *Figuris Astrorum* et in *Mon. Paris.* an. 1734. Fixas, quæ sunt totidem Soles, variis donatas esse figuris et ex iis aliquas ad figuram planam vel planitiem accedere non repugnat. Nam a spheroidæ propemodum spherico per innumeros gradus depressionis versus polos tandem devenitur ad planum circulare, si continuò varietur ratio vis centrifugæ ad gravitatem, ut patet ex num. 56. His positis, ratio reddi poterit cur fixæ quædam nunc appareant, nunc evanescant, cur mutetur apparens stellarum quarundam magnitudo, nec non etiam cur stellæ aliquæ quasi recens accensæ oriri visæ sint, quædam verò quasi extinctæ videri desierint. Si in stellarum numero reperiantur aliquæ ad figuram planam accedentes, illæ dum faciem suam nobis obvertunt, spherarum instar apparebunt. Si autem respectu nostri situm suum mutant, magis vel minus stellarum illarum splendor decrescet, prout hoc vel illo modo sese nobis ostendent, ac tandem exiguæ crassitiæ latus exhibeant et satis longè a nobis distent, conspectui nostro sese omninò subducent. Quomodo autem fixæ respectu nostri positionem suam mutant, explicari potest,

si ponamus circâ stellam compressam revolvère planetam aliquam ingentis molis aut cometam in orbitâ valde excentricâ et ad æquatorem stellæ inclinatâ; in hac enim hypothesi, planeta ad perihelium suum accedens juxta attractionis leges inclinationem fixæ planæ perturbabit, et hinc fieri poterit ut partem lucidam disci nobis obversam conspiciamus, quæ ob exiguam lateris compressi crassitiem oculos nostros antea effugiebat. Ex his quoque intelligitur fieri posse ut circâ planetam congregetur annulus Saturni annulo similis, si nempe cometa cujus cauda ex vaporibus tenuissimis æstu Solis in perihelio elevatis componitur, ad planetam aliquem maximè potentem proximè accederet. Hic enim vaporum torrens attractionis vi ad revolvendum circâ planetam annuli instar posset detorqueri; imò impossibile non foret ipsum quoque corpus cometæ circâ planetam rapi et sic planeta satellitem acquireret. Haberet autem planeta satellitem sine annulo, si cometa destitueretur caudâ, sed adjicietur etiam annulus, si cometa caudam habuerit, atque annulus aderit sine satellite, si cauda duntaxat a planetâ attrahatur. Hæc sunt quæ ad hunc Newtoni locum præcipuè referuntur; cæterum in laudatis opusculis elegantissima sunt Problemata quæ consulat lector.

1573, mense Januario minor erat Jove et major Sirio, cui in fine Februarii et Martii initio evasit æqualis. Mense Aprili et Maio stellis secundæ magnitudinis, Junio, Julio et Augusto stellis tertiæ magnitudinis, Septembri, Octobri et Novembri stellis quartæ, Decembri et anni 1574 mense Januario stellis quintæ, et mense Febuario stellis sextæ magnitudinis æqualis videbatur, et mense Martio ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac splendidus, postea flavus, et anni 1573 mense Martio rutilans instar Martis aut stellæ Aldebaran, Maio autem altitudinem sublividam induxit, qualem in Saturno cernimus, quem colorem usque in finem servavit, semper tamen obscurior facta. Talis etiam fuit stella in dextro pede Serpentarii, quam Kepleri discipuli anno 1604, die 30 Septembris st. vet. apparere cœpisse observarunt, et luce suâ stellam Jovis superasse, cùm nocte præcedente minimè apparuisset. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, et spatio mensium quindecim vel sexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam stellâ novâ supra modum splendente Hipparchus ad fixas observandas et in catalogum referendas excitatus fuisse dicitur. Sed fixæ, quæ per vices apparent et evanescunt, quæque paulatim crescunt, et luce suâ fixas tertiæ magnitudinis vix unquam superant, videntur esse generis alterius, et revolvendo partem lucidam et partem obscuram per vices ostendere. Vapores autem, qui ex Sole et stellis fixis et caudis cometarum oriuntur, incidere possunt per gravitatem suam in atmosphæras planetarum et ibi condensari et converti in aquam et spiritus humidos, et subindè per lentum calorem in sales, et sulphura, et tincturas, et limum, et lutum, et argillam, et arenam, et lapides, et coralla, et substantias alias terrestres paulatim migrare.

SCHOLIUM GENERALE.

(¹) Hypothesis vorticum multis premitur difficultatibus. Ut planeta unusquisque radio ad Solem ducto areas describat tempori proportionales, tempora periodica partium vorticis deberent esse in duplicatâ ratione distantiarum a Sole. Ut periodica planetarum tempora sint in proportionem sesquiplucatâ distantiarum a Sole, tempora periodica partium vorticis deberent esse in sesquiplucatâ distantiarum proportionem. Ut vortices minores circum Saturnum, Jovem et alios planetas gyratione conserventur et tranquillè natent in vortice Solis, tempora periodica partium vorticis solaris deberent esse æqualia. Revolutiones Solis et planetarum

(¹) * *Hypothesis vorticum.* (Prop. LII. Lib. II. cum Coroll. Schol. Prop. XL. Lib. II. et not. 173. Lib. huj.).

circum axes suos, quæ cum motibus vorticum congruere deberent, ab omnibus hisce proportionibus discrepant. Motus cometarum sunt summè regulares, et easdem leges cum planetarum motibus observant, et per vortices explicari nequeunt. Feruntur cometæ motibus valdè eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non potest, nisi vortices tollantur.

Projectilia, in aëre nostro, solam aëris resistantiam sentiunt. Sublato aëre, ut fit in vacuo Boyliano, resistantia cessat, siquidem pluma tenuis et aurum solidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Et par est ratio spatiorum cœlestium, quæ sunt suprâ atmosphæram Terræ. Corpora omnia in istis spatiis liberrimè moveri debent; et propterea planetæ et cometæ in orbibus specie et positione datis secundum leges suprâ expositas perpetuò revolvi. Perseverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitùs acquirere per leges hasce minimè potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eâdem motùs directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem et Saturnum in circulis concentricis, eâdem motùs directione, in planis orbium planetarum quamproximè. (*) Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis mechanicis; siquidem cometæ in orbibus valde eccentricis, et in omnes cœlorum partes liberè feruntur. Quo motùs genere cometæ per orbes planetarum celerrimè et facillimè transeunt, et in apheliis suis ubi tardiores sunt et diutiùs morantur, quàm longissimè distant ab invicem, ut se mutuò quàm minimè trahant. Elegantissima hæcce Solis, planetarum et cometarum compages non nisi consilio et dominio entis intelligentis et potentis oriri potuit. Et si stellæ fixæ sint centra similium systematum, hæc omnia simili consilio constructa suberunt *Unius* dominio: præsertim cùm lux fixarum sit ejusdem naturæ ac lux Solis, et systemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne fixarum systemata per gravitatem suam in se mutuò cadant, hic eadem immensam ab invicem distantiam posuerit.

(*) * *Et hi omnes motus regulares.* Celeberrimi viri Joannes et Daniel Bernoullius, prior in *Physicâ Cœlesti*, posterior in *Disquisitionibus Physico-astronomicis* mechanicam horumce motuum causam ex vorticibus repetunt. Sed cùm mechanicæ explicationes illæ omnibus obnoxie sint difficultatibus quibus vorticum hypothesim premi jam ostendimus, huic rei diutiùs non immorabimur. Satis erit describere verba quæ habet Joan. Bernoullius mentionem faciens de hoc ipso Newtoni loco. (Si causæ illæ non sunt mechanicæ, erunt præternaturales et miraculo

tribuendæ; sed magnum philosophum non decet ad miraculum recurrere, ubi alicujus phænomeni quæritur explicatio.) Numquid pari jure Cartesianum philosophum possumus interrogare quânam causâ mechanicâ vortices secundum varias directiones ferantur, cur planetarum circumsolarium vortices ab occidente in orientem moveantur? ubi phænomenon aliquod ad primam causam deductum est, hic hæreere causamque mechanicam ulterius non quærere, magnum philosophum non dedecet.

Hic omnia regit non ut anima mundi, sed ut universorum dominus. Et propter dominium suum, dominus deus (*) *Παντοκράτωρ* dici solet. Nam deus est vox relativa et ad servos refertur: et deitas est dominatio dei, non in corpus proprium, uti sentiunt quibus deus est anima mundi, sed in servos. Deus summus est ens æternum, infinitum, absolute perfectum: sed ens utcumque perfectum sine dominio non est dominus deus. Dicimus enim deus meus, deus vester, deus Israël, deus deorum, et dominus dominorum: sed non dicimus æternus meus, æternus vester, æternus Israël, æternus deorum; non dicimus infinitus meus, vel perfectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad servos. Vox deus passim (+) significat dominum: sed omnis dominus non est deus. Dominatio entis spiritualis deum constituit, vera verum, summa summum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ sequitur deum verum esse vivum, intelligentem et potentem; ex reliquis perfectionibus summum esse, vel summè perfectum. Æternus est et infinitus, omnipotens et omnisciens, id est, durat ab æterno in æternum, et adest ab infinito in infinitum: omnia regit, et omnia cognoscit, quæ fiunt aut fieri possunt. Non est æternitas et infinitas, sed æternus et infinitus; non est duratio et spatium, sed durat et adest. Durat semper, et adest ubique, et existendo semper et ubique, durationem et spatium constituit. Cùm unaquæque spatii particula sit semper, et unumquodque durationis indivisibile momentum ubique, certè rerum omnium fabricator ac dominus non erit nunquam, nusquam. Omnis anima sentiens diversis temporibus, et in diversis sensuum, et motuum organis eadem est persona indivisibilis. Partes dantur successivæ in duratione, co-existent in spatio, neutræ in persona hominis seu principio ejus cogitante; et multò minùs in substantiâ cogitante dei. Omnis homo, quatenus res sentiens, est unus et idem homo durante vitâ suâ in omnibus et singulis sensuum organis. Deus est unus et idem deus semper et ubique. Omnipræsens est non per *virtutem* solam, sed etiam per *substantiam*: nam virtus sine substantiâ subsistere non potest. In ipso (‡) continentur et moventur universa, sed sine mutuâ passione. Deus

(*) Id est imperator universalis.

(†) Pocokius noster vocem *dei* deducit a voce Arabicâ *du*, (et in casu aliquo *dî*) quæ dominum significat. Et hoc sensu principes vocantur *dîi*, Psal. LXXXIV. 6. et Joan. x. 45. Et Moses dicitur *deus* fratris Aaron, et *deus* regis Pharaoh (Exod. iv. 16. et vii. 1.). Et eodem sensu animæ principum mortuorum olim a gentibus vocabantur *dîi*, sed falso propter defectum dominii. (Nota Autoris.)

(‡) Ita sentiebant veteres, ut Pythagoras apud Ciceronem, de Naturâ Deorum, Lib. I. Thales,

Anaxagoras, Virgilius, Georgic. Lib. IV. v. 220. et Æneid. Lib. VI. v. 721. Philo Allegor. Lib. I. sub initio. Aratus in Phenom. sub initio. Ita etiam scriptores sacri, ut Paulus in Act. xvii. 27. 28. Johannes in Evang. iiv. 2. Moses in Deut. iv. 39. et x. 4. David Psal. cxxxix. 7. 8. 9. Salomon 1 Reg. viii. 27. Job. xxii. 12. 13. 14. Jeremias xxiii. 23. 24. Fingebant autem idololatræ Solem, Lunam, et astra, animas hominum et alias mundi partes esse partes Dei summi, et ideo colendas, sed falsò. (Nota Auctoris.)

nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam sentiunt resistantiam ex omnipræsentiâ dei. Deum summum necessariò existere in confesso est: et eâdem necessitate *semper* est et *ubique*. Unde etiam totus est sui similis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis sentiendi, intelligendi, et agendi, sed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorsus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, sic nos ideam non habemus modorum, quibus deus sapientissimus sentit et intelligit omnia. Corpore omni et figurâ corporeâ prorsus destituitur, ideoque videri non potest, nec audiri, nec tangi, nec sub specie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, sed quid sit rei alicujus substantia minimè cognoscimus. Videmus tantum corporum figuras et colores, audimus tantum sonos, tangimus tantum superficies externas, olfacimus odores solos, et gustamus sapes: intimas substantias nullo sensu, nullâ actione reflexâ cognoscimus; et multò minùs ideam habemus substantiæ dei. Hunc cognoscimus solummodo per proprietates ejus et attributa, et per sapientissimas et optimas rerum structuras et causas finales, et admiramur ob perfectiones; veneramur autem et colimus ob dominium. Colimus enim ut servi, et deus sine dominio, providentiâ, et causis finalibus nihil aliud est quàm fatum et natura. A cæcâ necessitate metaphysicâ, quæ utique eadem est semper et ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diversitas, ab ideis, et voluntate entis necessariò existentis solummodo oriri potuit. Dicitur autem deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, irasci, pugnare, fabricare, condere, construere. Nam sermo omnis de deo a rebus humanis per similitudinem aliquam desumitur, non perfectam quidem, sed aliqualem tamen. Et hæc de Deo, de quo utique ex phænomenis disserere, ad philosophiam naturalem pertinet.

Hactenus phænomena cœlorum et maris nostri per vim gravitatis exposui, sed causam gravitatis nondum assignavi. Oritur utique hæc vis a causâ aliquâ, quæ penetrat ad usque centra Solis et planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum, in quas agit (ut solent causæ mechanicæ) sed pro quantitate *materiæ solidæ*; et cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicatâ ratione distantiarum. Gravitatis in Solem componitur ex gravitatibus in singulas Solis particulas, et recedendo a Sole decrescit accuratè in duplicatâ ratione distantiarum ad

usque orbem Saturni, ^(h) ut ex quiete apheliorum planetarum manifestum est, et ad usque ultima cometarum aphelia, si modò aphelia illa quiescant. Rationem verò harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum potui deducere, et hypotheses non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *hypothesis* vocanda est; et hypotheses seu metaphysicæ, seu physicæ, seu qualitarum occultarum, seu mechanicæ, in *philosophiâ experimentalî* locum non habent. In hâc philosophiâ Propositiones deducuntur ex phænomenis, et redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, et impetus corporum et leges motuum et gravitatis innotuerunt. Et satis est quod gravitas reverà existat, et agat secundum leges a nobis expositas, et ad corporum cœlestium et maris nostri motus omnes sufficiat.

Addicere jam liceret nonnulla de spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, et in iisdem latente; cujus vi et actionibus particule corporum ad minimas distantias se mutuò attrahunt, et contiguæ factæ cohærent: et corpora electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quàm attrahendo corpuscula vicina; et lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, et corpora calefacit; et sensatio omnis excitatur, et membra animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus scilicet hujus spiritus per solida nervorum capillamenta ab externis sensuum organis ad cerebrum et a cerebro in musculos propagatis. ⁽ⁱ⁾ Sed hæc paucis exponi non possunt; neque adest sufficiens copia experimentorum, quibus leges actionum hujus spiritus accuratè determinari et monstrari debent.

^(h) * *Ut ex quiete apheliorum.* Prop. II. Lib. huj.)

⁽ⁱ⁾ * *Sed hæc paucis exponi non possunt.* De

hoc subtilissimo spiritu plurimas quæstiones ubi proponit Newtonus in Tractatu *Opticæ*.

INDEX PROPOSITIONUM

IN

VOLUMINIS II. PARTE I.

	Fig.		Fig.
PROP. I. THEOR. I.		PROP. VIII. THEOR. VIII.	
Vires quibus planetæ circumjoviales perpetuò retrahuntur a motibus rectilineis et in orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis, et esse reciproce ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.....	17	Si globorum duorum in se mutuò gravitatum materia, undique in regionibus quæ a centrīs æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum distantie inter centra.....	34
PROP. II. THEOR. II.		PROP. IX. THEOR. IX.	
Vires, quibus planetæ primarii perpetuò retrahuntur a motibus rectilineis et in orbibus suis retinentur, respicere Solem, et esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.....	ibid.	Gravitatem pergendo a superficiebus planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum a centro quamproximè.....	40
PROP. III. THEOR. III.		PROP. X. THEOR. X.	
Vim, quâ Luna retinetur in orbe suo, respicere Terram et esse reciproce ut quadratum distantie locorum ab ipsius centro.....	18	Motus planetarum in cœlis diutissimè conservari posse.....	ibid.
PROP. IV. THEOR. IV.		PROP. XI. THEOR. XI.	
Lunam gravitare in Terram, et vi gravitatis retrahi semper a motu rectilineo, et in orbe suo retineri.....	19	Commune centrum gravitatis Terræ, Solis et planetarum omnium quiescere.....	44
PROP. V. THEOR. V.		PROP. XII. THEOR. XII.	
Planetæ circumjoviales gravitare in Jovem, circumsaturnios in Saturnum et circumsolares in Solem, et vi gravitatis suæ retrahi semper a motibus rectilineis, et in orbibus curvilineis retineri.....	24	Solem motu perpetuò agitari; sed nunquam longè discedere a communi gravitatis centro planetarum omnium.....	ibid.
PROP. VI. THEOR. VI.		PROP. XIII. THEOR. XIII.	
Corpora omnia in planetas singulos gravitare et pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus distantis a centro planetæ proportionalia esse quantitati materiæ in singulis.....	25	Planetæ moventur in ellipsis umbilicum habentibus in centro Solis, et radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.....	45
PROP. VII. THEOR. VII.		PROP. XIV. THEOR. XIV.	
Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.....	32	Orbium aphelia et nodi quiescunt.....	47
Vol. II.		PROP. XV. PROBL. I.	
		Invenire orbium principales diametros.....	50
		PROP. XVI. PROBL. II.	
		Invenire orbium excentricitates et aphelia.....	ibid.

<p>PROP. XVII. THEOR. XV. Planetarum motus diurnos uniformes esse, et librationem Lunæ ex ipsius motu diur- no oriri..... 51</p>	<p>PROP. XXI. THEOR. XVII. Puncta æquinoctialia regredi, et axem Ter- ræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in eclipticam et bis redire ad positionem priorem..... 83</p>
<p>PROP. XVIII. THEOR. XVI. Axes planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse... 54</p>	<p>PROP. XXII. THEOR. XVIII. Motus omnes lunares omnesque motuum in- æqualitates ex allatis principiis consequi. 59</p>
<p>PROP. XIX. PROBL. III. Invenire proportionem axis planetæ ad dia- metros eidem perpendiculares..... 55</p>	<p>PROP. XXIII. PROBL. V. Motus inæquales satellitum Jovis et Satur- ni a motibus lunaribus derivare..... 90</p>
<p>PROP. XX. PROBL. IV. Invenire et inter se comparare pondera cor- porum in Terræ hujus regionibus diversis. 78</p>	<p>PROP. XXIV. THEOR. XIX. Fluxum et refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri..... 92</p>

INDEX PROPOSITIONUM

IN

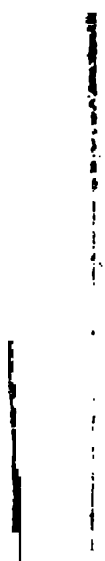
VOLUMINIS II. PARTE II.

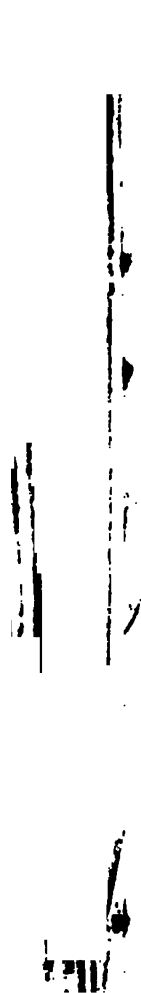
	Pag.		Pag.
PROP. XXV. PROBL. VI.		PROP. XXXIV. PROBL. XV.	
Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.....	1	Invenire variationem horariam inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ.....	56
PROP. XXVI. PROBL. VII.		PROP. XXXV. PROBL. XVI.	
Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in orbe cir- culari describit.....	4	Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum eclipticæ.....	61
PROP. XXVII. PROBL. VIII.		PROP. XXXVI. PROBL. XVII.	
Ex motu horario Lunæ invenire ipsius dis- tantiam a Terrâ.....	11	Invenire vim Solis ad mare movendum....	107
PROP. XXVIII. PROBL. IX.		PROP. XXXVII. PROBL. XVIII.	
Invenire diametros orbis in quo Luna, sine excentricitate moveri deberet.....	ibid.	Invenire vim Lunæ ad mare movendum....	109
PROP. XXIX. PROBL. X.		PROP. XXXVIII. PROBL. XIX.	
Invenire variationem Lunæ.....	17	Invenire figuram corporis Lunæ.....	114
PROP. XXX. PROBL. XI.		PROP. XXXIX. PROBL. XX.	
Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe circulari.....	22	Invenire præcessionem æquinociorum.....	122
PROP. XXXI. PROBL. XII.		PROP. XL. THEOR. XX.	
Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe elliptico.....	32	Cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri et radiis ad Solem ductis areas temporibus pro- portionales describere.....	134
PROP. XXXII. PROBL. XIII.		PROP. XLI. PROBL. XXI.	
Invenire motum medium nodorum Lunæ..	39	Cometæ in parabola moti trajectoryam ex datis tribus observationibus determinare..	146
PROP. XXXIII. PROBL. XIV.		PROP. XLII. PROBL. XXII.	
Invenire motum verum nodorum Lunæ....	45	Inventam cometæ trajectoryam corrigere....	187

FINIS.

GLASGUÆ:

EXCUDIT GEORGIUS BROOKMAN.





1000

1000

1000



3 2044 019 567 544

A FINE IS INCURRED IF THIS BOOK IS
NOT RETURNED TO THE LIBRARY ON
OR BEFORE THE LAST DATE STAMPED
BELOW.

4006908

JAN -- '73 H

WIDENER
WIDENER

FEB 8 2 1996

CANCELLED

